

SKOVTÅRNET

v. / Steen Toft Jørgensen, steen@sigynsvej29.dk og
Steen Markvorsen, stema@dtu.dk, InterMat, August, 2021



Figur 1: Skovtårnet ved Gissselfeld. [Link](#).

1.1 En geometrisk design- og konstruktions-opgave

Dette projekt går ud på at analysere de to mest basale strukturer i skovtårnet: Hvordan fremkommer den signifikante gitterstruktur i tårnet og hvordan findes den spiral-kurve langs tårn-yder-fladen som danner basis for gangbroen fra bund til top? Se figurerne ovenfor. Besøg selv tårnet med henblik på at blive inspireret til endnu flere interessante opgaver og projekter – ligesom i følgende beskrivelser og i referencerne der: [\[Fra Steen Toft's hjemmeside\]](#) og [\[Et oplæg, STJ, 2020\]](#).

1.2 Opvarmning

Den tårn-flade, som intuitivt dannes/udspændes af de to systemer af stål-rør i tårnet, er tydeligvis rotationssymmetrisk omkring en z-akse, som går lodret ned igennem midten af tårnet. Ved at rotere hele tårnet nogle ganske bestemte vinkler omkring z-aksen afbildes stål-rør systemet på sig selv – i den forstand, at ethvert roteret rør bliver positioneret præcis der hvor der før rotationen også var et rør i systemet.

||| Opgave 1

Hvilke vinkler er der tale om i ovenstående påstand når det oplyses, at tårnet indeholder ialt 36 stål-rør?

1.3 Rotationer i planen

Vi beskriver først rotation af et punkt p omkring origo $\mathcal{O}$ (i et sædvanligt $\{\mathcal{O}, x, y\}$ -koordinatsystem) i *planen*. Med hensyn til det givne koordinatsystem har punktet p koordinaterne $p = (p_1, p_2)$. Koordinaterne (med hensyn til den sædvanlige basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ for vektorer i planen) for *stedvektoren* $\mathbf{p}$ (dvs. vektoren fra $\mathcal{O}$ til p) er så de samme:

$$\begin{aligned} p &= (p_1, p_2)|_{\{\mathcal{O}, x, y\}} \\ \mathbf{p} &= p_1 \cdot \mathbf{i} + p_2 \cdot \mathbf{j} = (p_1, p_2)|_{\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}} \end{aligned} \quad (1)$$

||| Sætning 1

Vi roterer $p = (p_1, p_2)$ (og den tilhørende stedvektor $\mathbf{p}$) en vinkel v om $\mathcal{O}$ i positiv omløbsretning (dvs. mod uret) i planen. Derved afbildes p i et punkt q (med tilhørende stedvektor $\mathbf{q}$), og koordinaterne for billedet $q = (q_1, q_2)$ er givet ved:

$$(q_1, q_2) = (p_1 \cdot \cos(v) - p_2 \cdot \sin(v), p_1 \cdot \sin(v) + p_2 \cdot \cos(v)) \quad , \quad (2)$$

hvilket på matrix-form er ækvivalent med:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

||| Opgave 2

Vis, at den givne afbildning i sætningen har alle de ønskede rotations-egenskaber for enhver vinkel v , altså at det netop er en rotation der beskrives ved (2) og (3):

1. Afstanden fra q til $\mathcal{O}$ er lig med afstanden fra p til $\mathcal{O}$, således at længden af de respektive stedvektorer $\mathbf{p}$ og $\mathbf{q}$ er ens. Vink: Længden af $\mathbf{p}$ er $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2}$.
2. Cosinus af vinklen mellem de to stedvektorer $\mathbf{q}$ og $\mathbf{p}$ er netop lig med cosinus til den givne vinkel v i rotationen.
3. Punktet p er drejet vinklen v i *positiv omløbsretning* for at ramme q .
4. Hvilket punkt $\hat{q}$ ville blive ramt hvis vi roterede p vinklen v i *negativ omløbsretning* (dvs. mod uret, dvs. vinklen $-v$ i positiv omløbsretning)?

Definition 2

Rotationsmatricen (rotations-operatoren) i ligning (3) vil vi benævne med

$$R_{\mathcal{O}}(v) = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} . \quad (4)$$

Bemærkning 3

Læg mærke til, at første søjle i rotationsmatricen er enhedsvektoren $(\cos(v), \sin(v))$, som netop er billedet af $(1, 0)$ ved brug af rotationen $R_{\mathcal{O}}(v)$. På samme måde er den anden søjlevektor $(-\sin(v), \cos(v))$ netop billedet af $(0, 1)$ ved rotationen.

Opgave 3

Vis, at hvis vinklen mellem to givne vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er θ , så er vinklen mellem billedvektorerne $(R_{\mathcal{O}}(v))(\mathbf{a})$ og $(R_{\mathcal{O}}(v))(\mathbf{b})$ ligeledes θ .

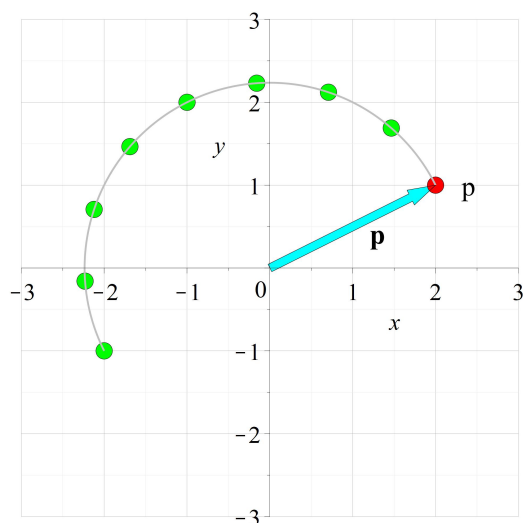
1.3.1 Diskrete rotationer i planen

For et givet punkt p kan vi nu bruge $R_{\mathcal{O}}(v)$ på $p = (p_1, p_2)$ med forskellige v -værdier, f.eks. $v = 0, \pi/8, 2\pi/8, \dots, 8\pi/8$ hvorved der fremkommer 9 jævnt fordelte billedpunkter på den (halv-)cirkel, der har centrum i $\mathcal{O}$ og radius $\|p\|$, se figur 2.

Hvis vi kan rotere punkter, så kan vi også rotere kurver og andre geometriske objekter i planen. De simpleste kurver i planen er de rette linjer. Enhver ret linje $\mathcal{L}$ kan fremstilles på parameterform som i fremstillingen nedenfor, hvor p er et punkt på linjen og $\mathbf{e} \neq (0, 0)$ er en *retningsvektor* for linjen (dvs. ud fra punktet p peger $\mathbf{e}$ og $-\mathbf{e}$ direkte i linjens retning(er)).

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \quad \mathbf{r}(u) &= \mathbf{p} + u \cdot \mathbf{e} \\ &= (p_1, p_2) + u \cdot (e_1, e_2) \\ &= (p_1 + u \cdot e_1, p_2 + u \cdot e_2) \\ &= (r_1(u), r_2(u)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5)$$

Den reelle parameter u løber her fra $-\infty$ til $+\infty$ svarende til at punktet $(r_1(u), r_2(u))$ løber fra den ene ende af linjen (som ligger i uendelig i retningen $-\mathbf{e}$ fra p) til den anden



Figur 2: Diskrete rotationer af punktet $p = (2, 1)$ i planen omkring origo.

ende af linjen (som ligger i uendelig i retningen e fra p).

Vi bruger nu $R_{\mathcal{O}}(v)$ på alle punkterne på linjen og får dermed en sekvens af linjer i planen ved f.eks. igen at vælge de 9 vinkelværdier $v_1 = 0, v_2 = \pi/8, v_3 = 2\pi/8, \dots, v_9 = 8\pi/8$ – se figur 3, hvor $p = (2, 1)$ og hvor e er valgt til at være enhedsvektorerne $e = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ med $\theta = \pi/3, \theta = \pi$ og $\theta = \pi/2 + \arctan(1/2)$, henholdsvis.

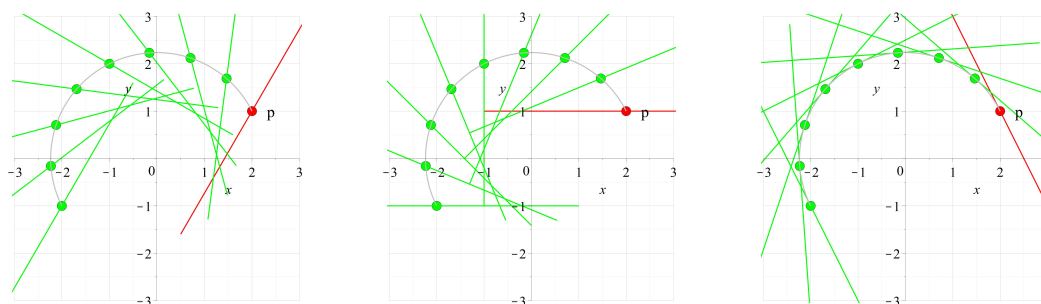
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_i : \quad r_i(u) &= (R_{\mathcal{O}}(v_i))(r(u)) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(v_i) & -\sin(v_i) \\ \sin(v_i) & \cos(v_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1(u) \\ r_2(u) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(v_i) & -\sin(v_i) \\ \sin(v_i) & \cos(v_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 + u \cdot \cos(\theta) \\ 1 + u \cdot \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1, \dots, 9 \quad .
 \end{aligned} \tag{6}$$

|||| Opgave 4

Hvorfor fås rette linjer når $R_{\mathcal{O}}(v)$ bruges på en ret linje som ovenfor?

|||| Opgave 5

Hvad er vinklen mellem ethvert par af linjer $\mathcal{L}_i$ og $\mathcal{L}_j$ i hver enkelt af de tre sekvenser af 9 linjer i figur 3?



Figur 3: Diskrete rotationer af tre forskellige startlinjer (linjestykker) igennem $p = (2, 1)$ i planen omkring origo med forskellige ϵ -vektorer for den røde start-linje.

1.4 Rotationer om z-aksen i rummet

rummet bruger vi et koordinatsystem $\{\mathcal{O}, x, y, z\}$ med tilsvarende basisvektorer $\{i, j, k\}$. Et punkt p i rummet og den tilsvarende stedvektor $\mathbf{p}$ har så tre koordinater $p = (p_1, p_2, p_3)$.

Ved rotation af p omkring z-aksen bevares tredje-koordinaten p_3 . Dvs. alle billed-punkterne $q = (q_1, q_2, q_3)$ som opnås ved rotationen af p har $q_3 = p_3$. Rotationen foregår altså udelukkende i de to andre (x, y) -koordinater og de rotationer har vi allerede fundet og udtrykt ovenfor ved hjælp af $R_{\mathcal{O}}(v)$. På matrixform har vi derfor direkte:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} . \quad (7)$$

Definition 4

Den udvidede rotationsmatrix vil vi kalde $R_z(v)$:

$$R_z(v) = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (8)$$

således at vi kan skrive (7) kort:

$$\mathbf{q} = (R_z(v))(\mathbf{p}) . \quad (9)$$

Og den kan vi nu bruge på punkter og geometriske objekter i rummet på samme måde som vi ovenfor har brugt $R_{\mathcal{O}}(v)$ på punkter og rette linjer i planen:

1.5 Rotation af rette linjer om z -aksen i rummet

Enhver ret linje $\mathcal{L}$ i rummet kan fremstilles på parameterform på samme måde som de rette linjer i planen. Vi vælger et punkt p på linjen og en retningsvektor $e \neq (0,0,0)$ for linjen. Så kan $\mathcal{L}$ repræsenteres således:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \quad r(u) &= p + u \cdot e \\ &= (p_1, p_2, p_3) + u \cdot (e_1, e_2, e_3) \\ &= (p_1 + u \cdot e_1, p_2 + u \cdot e_2, p_3 + u \cdot e_3) \\ &= (r_1(u), r_2(u), r_3(u)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad .\end{aligned}\tag{10}$$

Vi kan bruge $R_z(v)$ på linjen $\mathcal{L}$ for en sekvens af rotationsvinkler $v_i, i = 1, \dots, n$ og får dermed en sekvens af linjer i rummet – se allerede nu figur 7.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i : \quad r_i(u) &= R_z(v_i)(r(u)) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(v_i) & -\sin(v_i) & 0 \\ \sin(v_i) & \cos(v_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1(u) \\ r_2(u) \\ r_3(u) \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad .\end{aligned}\tag{11}$$

|||| Opgave 6

I hvilken højde, dvs. for hvilken z -værdi kommer de roterede linjer tættest på z -aksen? Vink: Højden kan findes ved hjælp af projektionen af linjen $r(u)$ på (x, y) -planen.

Selve tårnfladen fremkommer nu ved at bruge *alle* vinkler i hele parameterområdet $[0, 2\pi]$. Dvs, tårnfladen kan beskrives ved følgende parameterfremstilling, som er en funktion af de *to* variable u og v .

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_r : \quad F(u, v) &= (R_z(v))(r(u)) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1(u) \\ r_2(u) \\ r_3(u) \end{bmatrix} \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad v \in [0, 2\pi] \quad .\end{aligned}\tag{12}$$

|||| Eksempel 1

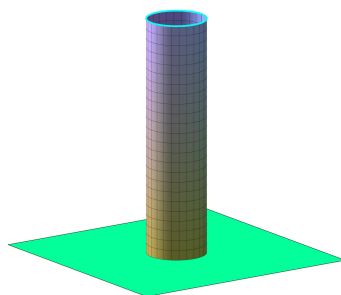
Et af de simpleste eksempler på en tårnflade fås ved at vælge $b = 0$, dvs. $p = (1, 0, 0)$ og $e = (0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned}r(u) &= (r_1(u), r_2(u), r_3(u)) = (p_1 + u \cdot e_1, p_2 + u \cdot e_2, p_3 + u \cdot e_3) \\ &= (0, 0, u) \quad ,\end{aligned}\tag{13}$$

således at

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= (R_z(v))(r(u)) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ u \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in [0, 2\pi],
 \end{aligned} \tag{14}$$

som fremstiller en cylinder med z-aksen som center-akse og tværsnitsradius 1, se figur 4.



Figur 4: Cylinderen fra eksempel 1.

|||| Opgave 7

Hvilke 'tårnflader' $\mathcal{T}_r$ frembringes ved ovenstående ligning (12) når vi vælger følgende respektive ingredienser til parameterfremstillingen $r(u)$ for den rette start-linje som roteres om z-aksen. (Illustrér med et passende matematik-værktøj.)

1. $p = (1, 0, 0)$ og $e = (0, 1, 0)$
2. $p = (0, 0, 1)$ og $e = (0, 0, 1)$
3. $p = (0, 0, 1)$ og $e = (0, 1, 0)$
4. $p = (0, 0, 1)$ og $e = (0, 1, 1)$.

1.6 Regulære tårn-flader

Vi antager, at $\mathcal{L}$ ikke skærer z-aksen, ikke er parallel med z-aksen, og ikke er vinkelret på z-aksen (jvf. opgave 7). Så har $\mathcal{L}$ netop ét punkt som er tættest på z-aksen, og vi vil antage at dette punkt har koordinaterne $p = (a, 0, 0)$ for et bestemt $a > 0$. (Hvis dette ikke er tilfældet kan vi altid vælge et nyt koordinatsystem med samme z-akse, så det

bliver opfyldt.) Så er første-koordinaten for retningsvektoren e nødvendigvis 0 (ellers ville $\mathcal{L}$ ikke have mindste afstand til z -aksen i punktet p):

$$\begin{aligned} p &= (a, 0, 0) \quad , \quad a > 0 \\ e &= (0, b, 1) \quad , \quad b \in \mathbb{R} - \{0\} \quad . \end{aligned} \quad (15)$$

||| Opgave 8

Overvej ovenstående påstande, og vis, at vi altid under de givne betingelser kan vælge e på den angivne form, altså med $e_3 = 1$.

Vi kan nu formulere en mere præcis definition af de flader, vi er interesserede i:

||| Definition 5

En regulær skovtårn-flade $\mathcal{T}_{(a,b)}$ er givet ved parameterfremstillingen (ligesom i den generelle fremstilling (12)):

$$\mathcal{T}_{(a,b)} \quad : \quad F_{(a,b)}(u, v) = (R_z(v))(r(u)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad v \in [0, 2\pi] \quad , \quad (16)$$

hvor den benyttede startlinje, der roteres omkring z -aksen, nu er bestemt ved de to konstanter a og b :

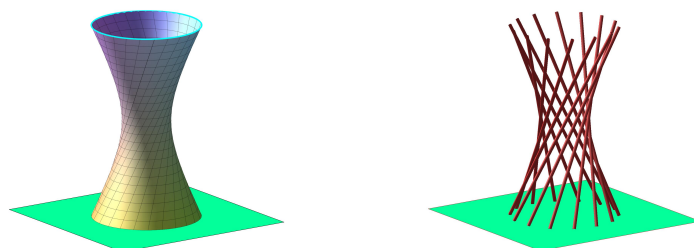
$$\mathcal{L}_{(a,b)} \quad : \quad r(u) = (a, 0, 0) + u \cdot (0, b, 1) \quad , \quad a > 0 \quad , \quad b \in \mathbb{R} - \{0\} \quad . \quad (17)$$

Når a og b er givne har vi derfor eksplicit:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(a,b)} \quad : \quad F_{(a,b)}(u, v) &= \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ u \cdot b \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \cdot \cos(v) - u \cdot b \cdot \sin(v) \\ a \cdot \sin(v) + u \cdot b \cdot \cos(v) \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

||| Eksempel 2

Hvis vi vælger konstanterne $a = 1$ og $b = 1/2$ fås det regulære skovtårn som er vist i figur 5. De tilhørende 14 rette linjer (stål-rør på fladen), som fremkommer ved at vælge konstante vinkler fra vinkel-sekvensen $v \in \{0, \pi/7, 2\pi/7, 3\pi/7, \dots, 13\pi/7\}$ i parameterfremstillingen $F_{(1,1/2)}(u, v)$ er vist til højre i figuren.



Figur 5: Det regulære skovtårn $F_{(1, \frac{1}{2})}(u, v)$ samt 14 rør i den tilsvarende rør-konstruktion.

1.6.1 Ligningen for regulære skovtårne

Hvis vi skriver de tre koordinatfunktioner for $F_{(a,b)}(u, v)$ fra (18) på formen

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos(v) - u \cdot b \cdot \sin(v) \\ y &= a \cdot \sin(v) + u \cdot b \cdot \cos(v) \\ z &= u \end{aligned} \quad (19)$$

så fås det af en (rimelig simpel) udregning, at x , y , og z tilfredsstiller følgende anden-gradsligning:

$$x^2 + y^2 - (b \cdot z)^2 = a^2 \quad \text{for alle } u \text{ og } v. \quad (20)$$

||| Opgave 9

Vis ovenstående påstand, dvs.: Hvis x , y , og z er givet ved ligningerne (19), så er ligning (20) opfyldt for alle u og v .

||| Opgave 10

Vis også omvendt: Hvis (x, y, z) tilfredsstiller ligningen (20) så ligger punktet (x, y, z) på det regulære skovtårn $\mathcal{T}_{(a,b)}$, dvs. så findes der u og v , sådan at (19) også er opfyldt.

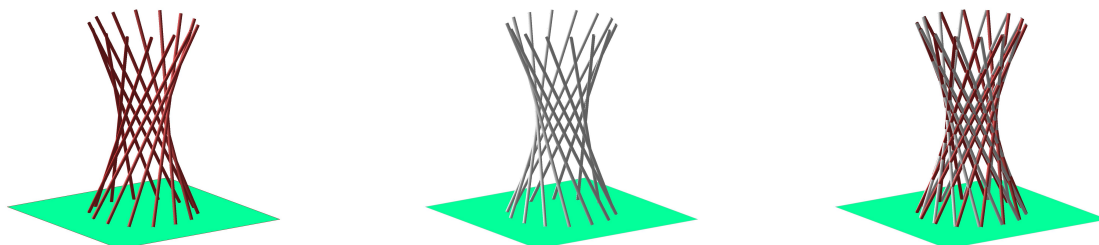
||| Opgave 11

Brug ligningen for $\mathcal{T}_{(a,b)}$, altså ligning (20), til at vise, at $F_{(a,b)}(u, v)$ og $F_{(a,-b)}(u, v)$ er parametrfremstillinger for *den samme flade*.

De to stålrørs-versioneringer af henholdsvis $\mathcal{T}_{(a,b)}$ og $\mathcal{T}_{(a,-b)}$ er vist i figur 7. Dermed har vi endelig konstrueret/udtrykt hele det dobbelte stålrør-system for alle regulære skovtårne.



Figur 6: Skovtårnet på afstand og tæt på.



Figur 7: Her vises 28 rør fra (den dobbelte) konstruktion af $\mathcal{T}_{(1, \frac{1}{2})} = \mathcal{T}_{(1, -\frac{1}{2})}$.

||| Opgave 12

Vis, at følgende *også* er en parameterfremstilling for $\mathcal{T}_{(a,b)}$, hvor igen parametrene er $u \in \mathbb{R}$ og $v \in [0, 2\pi]$:

$$\mathcal{T}_{(a,b)} : Q(u, v) = (a \cdot \cosh(u) \cdot \cos(v), a \cdot \cosh(u) \cdot \sin(v), \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \sinh(u)) \quad (21)$$

Dette viser eksplicit (igen), at tårnfladerne $\mathcal{T}_{(a,b)}$ er *omdrejningsflader* og at de har generator-meridiankurverne $\gamma_{(a,b)}(u) = (a \cdot \cosh(u), 0, (\frac{a}{b}) \cdot \sinh(u))$ i (x, z) -planen. Med andre ord: De enkelte tårnflader kan også fremstilles ved at rotere kurverne $\gamma_{(a,b)}$ om z -aksen. Alle disse kurver er *hyperbler* – de tilfredsstiller følgende ligning i (x, z) -planen:

$$x^2 - (b \cdot z)^2 = a^2 \quad , \quad (22)$$

hvilket jo i øvrigt fås direkte af tårnligningen (20) ved simplethen at sætte $y = 0$. Derfor kaldes de regulære tårnflader også *hyperboloider*.

1.7 Ledekurven for spiral-gangbroen i skovtårnet

Gangbroen i skovtårnet følger en kurve som ligger helt i tårn-fladen $\mathcal{T}_{(a,b)}$. Det er den kurve, vi vil kalde ledekurven for gangbroen. En parameterfremstilling for den kurve fås direkte af parameterfremstillingen $F_{(a,b)}$ på følgende måde.

Vi skal blot bevæge et punkt på den rette linje $r(u)$ samtidig med at linjen roteres rundt om z-aksen ved hjælp af $R_z(v)$. Dette opnås ved at lade parameteren u i $r(u)$ være en funktion af vinkel-parameteren v for rotationen. Dvs. hvis vi indsætter $u = h(v)$ for en passende funktion h i $F_{(a,b)}(u, v)$ fås en kurve på tårnfladen $\mathcal{T}_{(a,b)}$, som typisk er en spiral-lignende kurve – hvis vi blot kræver, at $h'(v) \neq 0$ således at bevægelsen foregår samtidig både opad og rundt om tårnfladen.

Hvis vi vælger $h(v) = k \cdot v$ med f.eks. $k = 1/7$ fås spiral-kurven i figur 8. Det ses tydeligt, at hældningen af kurven i forhold til lodret er større på midten af tårnet end i top og bund. Det skyldes at bevægelsen når hurtigere rundt (på en kortere strækning) på midten, men med det samme 'løft' som i top og bund.

Det kan vi også indse ved at finde enhedstangentvektoren til kurven. For en generel værdi af $k > 0$ har vi spiralkurvens parameterfremstilling:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(a,b,k)} \quad : \quad \xi_{(a,b,k)}(v) &= F_{(a,b)}(k \cdot v, v) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ k \cdot v \cdot b \\ k \cdot v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \cdot \cos(v) - k \cdot v \cdot b \cdot \sin(v) \\ a \cdot \sin(v) + k \cdot v \cdot b \cdot \cos(v) \\ k \cdot v \end{bmatrix} \quad , \quad v \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (23)$$

Denne rumkurves hastighedsvektor er:

$$\xi'(v) = (-(a + b \cdot k) \cdot \sin(v) - k \cdot b \cdot v \cdot \cos(v), -k \cdot v \cdot b \cdot \sin(v) + (a + b \cdot k) \cdot \cos(v), k) \quad ,$$

og farten i bevægelsen er så:

$$\|\xi'(v)\| = \sqrt{b^2 \cdot k^2 \cdot (1 + v^2) + 2 \cdot k \cdot b \cdot a + a^2 + k^2} \quad (24)$$

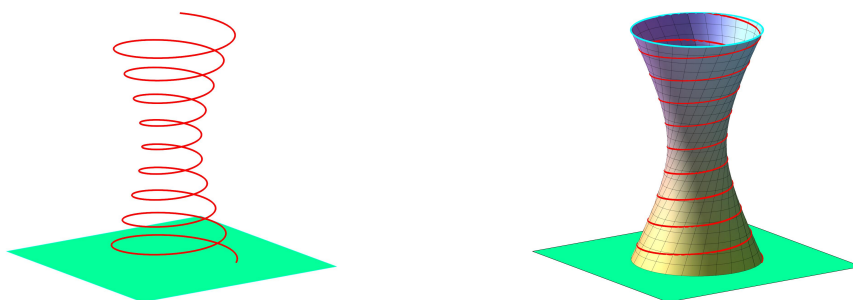
Hældningen $\alpha(v)$ af spiralkurven i forhold til lodret er 3. die koordinaten af enhedstangentvektoren:

$$e(v) = \frac{\xi'(v)}{\|\xi'(v)\|} \quad . \quad (25)$$

Det vil sige:

$$\alpha(v) = \frac{k}{\sqrt{b^2 \cdot k^2 \cdot (1 + v^2) + 2 \cdot k \cdot b \cdot a + a^2 + k^2}} \quad (26)$$

Heraf fås direkte, at hældningen $\alpha(v)$ er størst for $v = 0$, dvs. midt på tårnfladen, som påstået ovenfor.



Figur 8: Spiralkurven $\mathcal{S}_{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{7})}$ på tårnfladen $\mathcal{T}_{(1, \frac{1}{2})}$.

1.8 Avanceret, ekstra: Hvordan opnås konstant hældning/stigning af spiral-gangbroen?

I dette afsnit vil vi sluttelig undersøge, hvordan funktionen $h(v)$ kan vælges, sådan at spiralkurven $\mathcal{S}_{(a,b,h)}$ får konstant hældning i forhold til lodret.

For en helt generel løfte-funktion $h(v)$ har spiralkurven nu parameterfremstillingen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(a,b,h)} \quad : \quad \boldsymbol{\zeta}_{(a,b,h)}(v) &= \boldsymbol{F}_{(a,b)}(h(v), v) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ h(v) \cdot b \\ h(v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \cdot \cos(v) - h(v) \cdot b \cdot \sin(v) \\ a \cdot \sin(v) + h(v) \cdot b \cdot \cos(v) \\ h(v) \end{bmatrix} \quad , \quad v \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (27)$$

Denne rumkurves hastighedsvektor $\boldsymbol{\zeta}'(v)$ kan nu udtrykkes via den afledede funktion $h'(v)$. Farten i bevægelsen og dermed hældningen fås derefter:

$$\alpha(v) = \frac{h'(v)}{\sqrt{(1 + b^2) \cdot (h'(v))^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot h'(v) + h^2(v) \cdot b^2 + a^2}} \quad (28)$$

Hvis vi – ligesom i de konkrete eksempler ovenfor – nu igen sætter $a = 1$ og $b = 1/2$ samt eksplicit vælger at gå efter en konstant hældning på $\alpha = 1/10$, skal vi altså løse følgende *differentialligning* for at bestemme en løfte-funktion $h(v)$, som netop giver denne hældning:

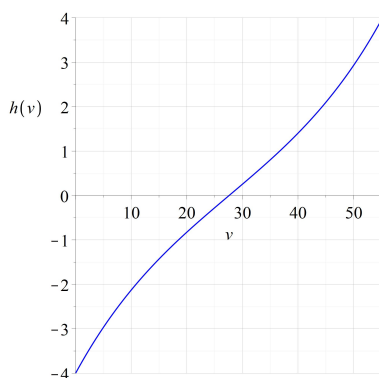
$$h'(v) = \frac{1}{20} \cdot \sqrt{5 \cdot (h'(v))^2 + 4 \cdot h'(v) + h^2(v) + 4} \quad , \quad (29)$$

hvorfra vi kan isolere (den positive) funktion $h'(v)$ (ved at løse en passende 2.grads-ligning):

$$h'(v) = \frac{1}{395} \cdot (2 + \sqrt{1584 + 395 \cdot h^2(v)}) \quad . \quad (30)$$

Dermed har vi fundet en (ganske vist noget kompliceret) differentialligning for $h(v)$, og den kan løses (numerisk) hvis vi samtidig specificerer en begyndelsesværdi, f.eks. $h(0) = -4$ (som igen er motiveret af de konkrete eksempler ovenfor, hvor bunden af tårnfladen netop er placeret i $z = -4$ svarende til $u = -4$ i parameterfremstillingen $F_{(1, \frac{1}{2})}$).

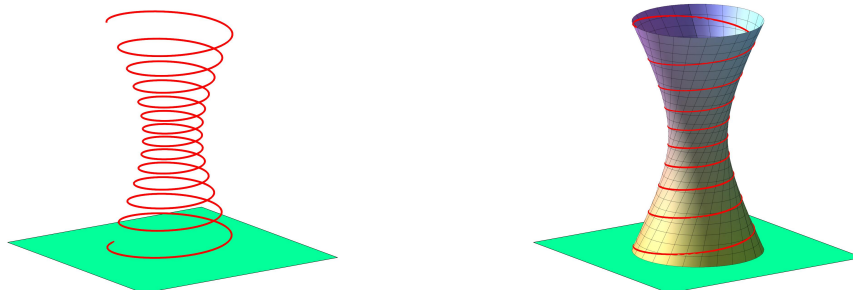
Resultatet $h(v)$ er vist i figur 9, og den tilhørende spiralkurve $\mathcal{S}_{(1, \frac{1}{2}, h)}$ er præsenteret i figur 10.



Figur 9: Den funktion $h(v)$, som giver konstant hældning $\alpha(v) = 1/10$ for spiralkurven på tårnfladen $F_{(1, \frac{1}{2})}$.

||| Opgave 13

Undersøg, hvad der foregår i følgende blog, og vis, at det resultat, som præsenteres der, giver en gang-bro hældning som kun *næsten* er konstant og som faktisk også kun *næsten* ligger på den præsenterede tårnflade: [\[Intmath.com blog\]](https://intmath.com/blog)



Figur 10: Spiralkurven $\mathcal{S}_{(1, \frac{1}{2}, h)}$ på tårnfladen $\mathcal{T}_{(1, \frac{1}{2})}$ med en 'løfte'-funktion $h(v)$ som giver konstant hældning i forhold til lodret.

|||| Opgave 14

Vi kan følge ideen i ovennævnte blog på følgende måde: Vi ser på den tårnflade, der dannes ved rotation af hyperblen $(\cosh(u), 0, \sinh(u))$ omkring z-aksen, se opgave 12. Vi bevæger et punkt på den hyperbel samtidig med at hyperblen roteres, dvs. vi vælger igen en funktion f og sætter $u = f(v)$. Derved får vi – for så vidt at $f'(v) > 0$ – igen en spirallignende kurve på tårnfladen på følgende måde:

$$\eta_f(v) = R_z(v)(\cosh(f(v)), 0, \sinh(f(v))) \quad , \quad v \in \mathbb{R} \quad . \quad (31)$$

1. Find hældningen af kurven η_f i forhold til lodret når $f(v) = v$, og vis, at hældningen igen er størst på midten af tårnet – men også, at hældningen er meget tæt på at være konstant.
2. Bestem (evt. kun numerisk) $f(v)$ således at η_f får konstant hældning i forhold til lodret.

1.9 Ekstra: Dimensionering af det faktiske skovtårn

|||| Opgave 15

Find data for det 'rigtige' skovtårn og modificér de konstanter, der er benyttet i denne projektbeskrivelse sådan at skovtårn-fladen og gangbroen (f.eks. antal vindinger i 'ledkurven') kommer til at stemme overens med de virkelige data.

1.10 Avanceret, ekstra: Alternative skovtårne med ellipse-tværsnit

De regulære skovtårne ovenfor har cirkulære tværsnit: Ved skæring med horisontale planer fås cirkler i de planer.

||| Opgave 16

Givet et regulært skovtårn $\mathcal{T}_{(a,b)}$: Hvad er radius af cirklerne som funktion af den højde, hvori der skæres?

Vi deformerer nu hele skovtårn-fladen ved at dividere alle x -koordinaterne for alle punkter på fladen med en positiv konstant $c > 0$. Derved opnås en ny flade, som er lidt sammenpresset eller udvidet i x -akse-retningen.

||| Opgave 17

Vis, at det deformerede tårn (stadig) er dobbelt retlinet frembragt, dvs. de rette rør-linjer fra tårnet med de cirkulære tværsnit ved deformationen afbildes over i rette rør-linjer på tårnet med det elliptiske tværsnit.

||| Opgave 18

Vis, at det deformerede tårn har elliptiske tværsnit: Ved skæring med horisontale planer fås ellipser i de planer. Hvad er halvakslerne for de ellipser som funktioner af den højde hvori der skæres? Vink: [Wiki/Ellipse](#).

||| Opgave 19

Hvordan fås nu konstant hældning på spiral-gangbroen på det deformerede tårn?

SLUT