2 Tredjegradsligningen i historisk lys

Det var imidlertid hverken Egypterne eller Heron, der indførte de komplekse tal, ej heller var det under løsningen af ligninger af 2. grad, at man indså behovet for komplekse tal. Selvom Heron var de komplekse tal snublende nær, så var det først i 1500-tallet, i forlængelse af forsøget på at løse tredjegradsligninger, at der kom skred i sagerne.

Siden oldtiden havde man kunnet løse visse typer af 2. gradsligninger, men den første bog med den generelle løsning udkom først i det 12. århundrede. Det næste skridt var naturligvis at finde en formel for 3. gradsligningen.

Den generelle 3. gradsligning kan skrives:

$$x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0, \tag{1}$$

idet vi altid kan fjerne koefficienten foran x^3 ved division af hele ligningen med denne.

Babylonerne kunne løse visse 3. gradsligninger, men ikke alle. Det 13. århundredes italienske matematikere kastede sig over problemet, men havde så lidt succes, at Luca Pacioli (1445-1517) i sin bog *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportinalitá* (1494) konstaterede, at hverken 3. eller 4. gradsligningen havde kunnet løses. Den skulle blive starten til et sandt kapløb.

2.1 Del Ferro

Først ser vi på et specialtilfælde: den *reducerede* tredjegradsligning, hvor der ikke er noget 2. gradsled dvs. $a_2 = 0$.
Der er fire separate tilfælde

$$x^3 + p \cdot x + q = 0 \tag{2}$$
$$x^3 + q = p \cdot x$$
$$x^3 = p \cdot x + q$$
$$x^3 + p \cdot x = q$$

hvor p og q er positive koefficienter. Selv i 1500-tallet havde man nemlig stor modvilje mod negative tal.

Scipione Del Ferro (1465-1526) var søn af en papirmager, men studerede matematik og blev 1495 ansat som professor i matematik ved universitetet i Bologna. Del Ferro var en bedre matematiker end Pacioli. De to mødtes formentlig i Bologna i 1501. Del Ferro løste i 1515 den sidste af ligningerne.
Her er hans løsningsmetode. Lad

$$x = u + v$$

så kan den nederste variant i ligning (2) skrives:

$$(u+v)^3+p\cdot(u+v)=q \Leftrightarrow$$
$$u^3+v^3+(3\cdot u\cdot v+p)\cdot(u+v)=q.$$

Del Ferros genistreg var nu at omskrive ovenstående til to ligninger:

$$u^3+v^3=q \quad \wedge \quad (3\cdot u\cdot v+p)\cdot(u+v)=0.$$

Da $u+v\neq 0$ kan vi isolere v i den anden ligning: $v=-\dfrac{p}{3\cdot u}$ som indsat i den første giver:

$$\left(u^3\right)^2-q\cdot u^3-\frac{p^3}{27}=0.$$

Dette er en andengradsligning i u^3 og én løsning er:

$$u^3=\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{3}$$

Øvelse 4

Er der andre løsninger? Hvordan påvirker det de følgende udregninger?

og da $v^3=q-u^3$ får vi:

$$u=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \quad v=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{4}$$

En løsning til sidste ligning i (2) er derfor:

Del Ferros formel

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

hvor vi har benyttet $(-1)^3=-1$ til at omskrive udtrykket for v.

Øvelse 5

Kontroller ved indsættelse af x i ligning (2) at ovenstående er en løsning.

Eksempel 1

$x^3 + 6 \cdot x = 20$

her er $p = 6, q = 20$. Del Ferros Formel ser umiddelbart ret indviklet ud. Man kan imidlertid hurtigt overbevise sig om, at $x = 2$ er en løsning til problemet. Heraf slutter vi

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}} = 2$$

Hvilket nemt checkes med en lommeregner. Husk lige:
Del Ferro havde ingen lommeregner!

Øvelse 6

Er der andre reelle løsninger?

Modviljen mod negative koefficienter besværliggør dog tingene:

Ligningen

$$x^3 = 6 \cdot x + 20, \qquad (5)$$

(som ikke har en "pæn" løsning!) ville Del Ferro aldrig skrive som

$$x^3 - 6 \cdot x = 20.$$

I stedet måtte man udlede formlen på ny for hver af de tre andre tilfælde i (2). Det problem har vi ikke og de tre øvrige tilfælde kan indfattes i Del Ferros formel ved passende udskiftning af p med $-p$ og q med $-q$.
Del Ferros formel gælder kun for reducerede tredjegradsligninger og det kunne jo være rart med én formel til alle tredjegradsligninger. Fortvivl ikke, den findes faktisk.
Del Ferro hemmeligholdte formlen (men undlod naturligvis ikke at prale med at kunne løse ligningen) og gav den kun til nogle få venner heriblandt sin svigersøn Annibale della Nave. På dødslejet videregav han den også til en af sine studenter, Antonio Maria Fior. Fior var ikke helt så god til at holde på hemmeligheder som sin læremester.
Fior gemte dog ligningen til den rette lejlighed bød sig. I 1535 udfordrede han med Del Ferros formel i baghånden, som det var kutyme på den tid, den kendte matematiker Nicola Fontana (1499-1557) til en duel på 30 matematikopgaver.

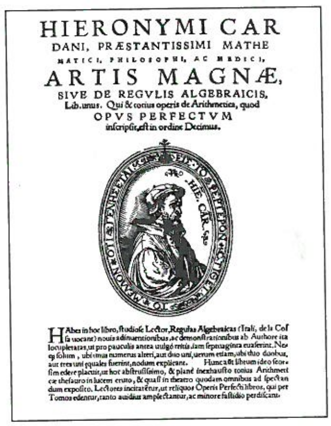
Nicola Fontana

Fontana er i dag mest kendt under det lidet flatterende navn Tartaglia, der betyder stammeren. Fontana havde i 1530 annonceret, at han kunne løse ligningen

$$x^3 + p \cdot x^2 = q,$$

men Fior troede, at Fontana bluffede. Fior var en matematisk letvægter i forhold til Fontana, så Fontana fik mistanke om, at Fior var kommet i besiddelse af Del Ferros hemmelighed, og kastede sig derfor over problemet. Det lykkedes Fontana at genopdage Del Ferros formel 8 dage før opgaverne skulle stilles. På dagen for konkurrencen – den 12. februar – løste Fontana til tilskuernes overraskelse alle Fiors problemer på to timer, hvorimod Fior ikke løste nogen af Fontanas – Fontana havde ikke bluffet!
Også Fontana beholdt hemmeligheden for sig selv, men Girolamo Cardano (1501-76) fik lokket den ud af ham imod at sværge tavshed, indtil Fontana selv havde udgivet sin formel. Cardano var hverken god til at holde på hemmeligheder eller sine løfter. Han fandt senere Del Ferros optegnelser og publicerede, med kredit til både Del Ferro og Fontana, formlen i værket Ars Magna (1545)[1]. Det er en underdrivelse at påstå, at Fontana følte sig bedraget. De to skændedes offentligt om sagen i flere år.

Girolamo Cardano



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa vocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Ars Magna

Cardano beviste i Ars Magna formlen for alle 3. gradsligninger, og formlen bærer derfor (lidt uretfærdigt) hans navn. Vi skal se hvordan Cardano løste problemet.

2.2 Cardanos formel

Fontanas trick var at omskrive ved hjælp af substitutionen: $x = y - \frac{1}{3} \cdot a_2$

som ved indsættelse giver: $y^3 + \left(a_1 - \frac{1}{3} \cdot {a_2}^2\right) \cdot y = -\frac{2}{27} \cdot {a_2}^3 + \frac{1}{3} \cdot a_1 \cdot a_2 - a_0$ (6)

1 Ars Magna, dvs. den store kunst, dvs. algebraen, i modsætning til den lille kunst - aritmetikken.

Øvelse 7

Vis dette.

Ved nærmere undersøgelse viser det sig at være en reduceret 3. gradsligning:

$$y^3 + p \cdot y = q,$$

Hvor $p = a_1 - \frac{1}{3} \cdot a_2^{\,2}$ og $q = -\frac{2}{27} \cdot a_2^{\,3} + \frac{1}{3} \cdot a_1 \cdot a_2 - a_0$. Hermed er problemet reduceret til et allerede løst problem, idet vi kan bruge Del Ferros formel.

Vi har altså den generelle formel for en løsning til en vilkårlig 3. gradsligning med reelle koefficienter:

Cardanos formel

$$y^3 + p \cdot y = q$$

$$p = a_1 - \frac{1}{3} \cdot a_2^{\,2}, \quad q = -\frac{2}{27} \cdot a_2^{\,3} + \frac{1}{3} \cdot a_1 \cdot a_2 - a_0$$

Øvelse 8

Hvorfor kan vi være sikre på, at der overhovedet er en løsning?

Eksempel 2

Lad os anvende Cardanos substitution på ligningen,

$$x^3 - 15 \cdot x^2 + 81 \cdot x - 175 = 0. \qquad (7)$$

Her skal vi altså substituere: $x = y - \frac{1}{3} \cdot a_2 = y + 5$.

Vi har også $p = 81 - \frac{1}{3} \cdot 15^2 = 6$ og
$q = -\frac{2}{27} \cdot (-15)^3 + \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot (-15) - (-175) = 20$

og får derfor:

$$y^3 + 6 \cdot y = 20, \qquad (8)$$

der som lovet er af den reducerede type. Løsningen fandt vi i Eksempel 1:

$$y = 2 \Leftrightarrow x = 7.$$

Hvilket let checkes ved indsættelse.

Øvelse 9

Overvej hvor mange reelle løsninger, der kan være til en vilkårlig 3. gradsligning med reelle koefficienter. Hvordan finder man mon de øvrige løsninger?

Indtil videre går alt jo let og elegant. Vi har fundet en formel, der giver os en løsning, ikke bare til de reducerede 3. gradsligninger, men til alle 3. gradsligninger. Under overfladen lurer uventede problemer. Lad os hoppe tilbage til ligning (2). Flytter man om på ligningen så den står således:

$$x^3 - p \cdot x = q$$

og indsætter i Del Ferros formel, dvs. vi skriver $-p$ i stedet for p i formlen (hvilket Del Ferro som nævnt ikke selv gjorde), fås løsningen:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Her kommer vi snart i vanskeligheder. I tilfælde, hvor

$$\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27},$$

ender vi jo med kvadratroden af et negativt tal.

Cardano har jo nok undret sig lidt over betydningen af et tal som $\sqrt{-15}$.
Han betragtede f.eks. problemet:

Del 10 i to stykker hvis produkt er 40.
Altså: Løs ligningen, $x \cdot (10 - x) = 40$.

Løsningerne er ifølge formlen for rødderne i en andengradsligning $5 + \sqrt{-15}$ og $5 - \sqrt{-15}$. Det er (måske!?) klart, at ligningen ikke har nogen reel løsning, idet problemet er umuligt.

Øvelse 10

Kan du se hvorfor problemet ingen løsning har? Vink: Tænk geometrisk!

Cardano regnede alligevel som følger: sum $= 5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 10$ og produkt $= (5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15}) = 25 - (\sqrt{-15})^2 = 40$, hvormed han har eftervist løsningen. Det virker jo som ren magi, men Cardano havde altså tilsyneladende ingen problemer med at behandle kvadratrødder af negative tal som om de var almindelige tal. Cardano benævnte den slags løsninger for Sophistiske. Hvad der virkelig foruroligede ham var fremkomsten af imaginære tal i løsningsformlen til en ligning, der tydeligvis kun havde reelle rødder.
Et udtryk som $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ kunne han heller ikke gøre noget ved, for hvordan tager man kubikroden af et komplekst tal? Cardano kaldte dette tilfælde for *casus irreducibilis*.

2.3 Bombelli løser problemet

Det var den italienske ingeniør og arkitekt Rafael Bombelli (1526-72), der løste problemet. I hans bog *Algebra* (1572) findes ligningen

$$x^3 = 15 \cdot x + 4 \tag{9}$$

der ved indsættelse i Cardanos formel giver

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}, \tag{10}$$

hvilket er Cardanos irreducible tilfælde. Imidlertid kan man hurtigt gætte, at $x = 4$ er en løsning, og ved polynomiets division får vi så:

$$0 = x^3 - 15 \cdot x - 4 = (x-4) \cdot \left(x^2 + 4 \cdot x + 1\right)$$

ligningen har altså tre *reelle* rødder: $x = 4$, og $x = -2 \pm \sqrt{3}$.
Det er ikke så mærkeligt, at Cardano undrede sig.

Rafael Bombelli

Algebra

Udtrykket i (10) angiver trods tilstedeværelsen af kvadratrødder af negative tal altså et reelt tal! Bombellis løsning på paradokset var at indse, at formlen kan skrives som de komplekse tal $a + b \cdot \sqrt{-1}$ og $a - b \cdot \sqrt{-1}$ som ved addition bliver et reelt tal $2 \cdot a$.

Eksempel 3

Bombelli behandlede f.eks. følgende ligning

$$x^3 - 51 \cdot x = 104 \tag{11}$$

her er $q = 104$ og $p = -51$, som ved indsættelse i Cardanos formel giver:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{52 + \sqrt{-2209}} - \sqrt[3]{-52 + \sqrt{-2209}} \\ &= 4 + \sqrt{-1} + 4 - \sqrt{-1} = 8. \end{aligned} \tag{12}$$

Det næstsidste lighedstegn er ikke så nemt at gennemskue og kræver en forklaring. Man kan checke rigtigheden ved at udregne $\left(4+\sqrt{-1}\right)^3 = 52+47\cdot\sqrt{-1}$, men det gør det jo ikke mindre mystisk. Hvordan kunne Bombelli vide det?
Bombelli løste problemet med *casus irreducibilis* ved at omskrive Cardanos to kubikrødder af komplekse tal til to komplekse tal, der ved addition ophæver hinandens imaginære del. Vi er naturligvis interesseret i en generel metode til at omskrive sådanne kubikrødder. Vi skal senere se, hvordan kubikroden af et komplekst tal kan udregnes uhyre nemt, men Bombelli argumenterede således:

Bombellis metode

De to kubikrødder må være identiske bortset fra et fortegnsskift på imaginærdelen:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+b\cdot\sqrt{-1} \qquad (13)$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-b\cdot\sqrt{-1}$$

Med moderne ord er de to tal hinandens kompleks konjugerede.
Ved hjælp af binomialidentiteten $(n+m)^3 = n^3+3\cdot n\cdot m\cdot(n+m)+m^3$ er det nu let at se, at

$$a\cdot\left(a^2-3\cdot b^2\right)=2 \qquad (14)$$
$$b\cdot\left(3\cdot a^2-b^2\right)=11$$

som har heltalsløsningen $a=2, b=1$, dvs. $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+1\cdot\sqrt{-1}$.
Udtrykket i (10) er altså bare en anden måde at skrive 4 på.

Yderligere læsning

Nahin, Paul J. *An Imaginary Tale – The Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton UP 1998. En god, velskrevet og underholdende fortælling om de komplekse tals historie. Anden del af bogen handler om kompleks funktionsteori og er meget matematisk.
Livio, Mario. *The Equation That Couln't Be Solved.* Simon & Schuster 2005. Handler mest om symmetri og gruppeteori, der fulgte efter forsøget på at løse 5. gradsligningen, men der er også et godt afsnit om 3. gradsligningen.

Opgaver

Opgave 1 Vis, at $\sqrt[3]{52+\sqrt{-2209}} = 4+\sqrt{-1}$ ved Bombellis metode.

Opgave 2 Leibniz læste Bombellis bog og fandt omkring 1673 den underlige formel:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}.$$

Vis denne.

Opgave 3 Find ved hjælp af polynomiets division alle rødder i $\mathbb{C}$ for følgende polynomier:

a) $f(x)=x^3+2\cdot x^2+x+2$
b) $g(x)=2\cdot x^3+2\cdot x^2-x-3$

Opgave 4 Leibniz løste også de reducerede 3. gradsligninger

a) $x^3-13\cdot x-12=0$
b) $x^3-48\cdot x=72$
Opstil løsningen vha. Cardanos formel og derefter med et CAS program.

Opgave 5 Løs, inden for $\mathbb{C}$, de reducerede 3. gradsligninger:

a) $x^3+4\cdot x+7=0$

b) $4\cdot x^3=15\cdot x+2$

Opgave 6 Find løsningsformler for de tre andre tilfælde af den reducerede 3. gradsligning (2).

Opgave 7 Vi skal prøve at udlede en formel for Fontanas ligning $x^3+p\cdot x^2=q$.

a) Benyt Fontanas substitution $x=y-\frac{1}{3}\cdot a_2$ til at finde en formel for p og q.

Vis at $p=-\frac{1}{3}\cdot a_2^2, q=-a_0-\frac{2}{27}\cdot a_2^3$.

b) Løs ligningen $x^3+3x^2=4$.