Workshop på InterMat projektdag fredag den 16. april 2021 på DTU:

Modellering af rotte-population vha. Leslie-matrix

Introduktion:

Forestil jer at vi befinder os i et relativt herligt område for rotter, så de kan vokse og formere sig under konstante betingelser. Der er fx ikke forskel i tilgængelig føde for enkeltindivider, og faren for at møde fjender (fx katte, rottegift eller sygdomme) er ens fra år til år. I dette område betragter vi mængde af hunrotter svarende til ca. halvdelen af den samlede rottebestand. Når vi i det følgende taler om rotter, mener vi udelukkende hunrotter. Men vi deler dem yderligere op i tre grupper:

1) De unge: Det er dem mellem 0 og 1 år. Deres *fødselsrate* er 0.28, dvs. at hver rotte i denne gruppe føder i gennesnit 0.28 rotte. Deres *overlevelsesrate* er 0.51, dvs. at kun 51% af rotterne bliver mere end ét år gamle.

2) De voksne: Det er dem mellem 1 og 2 år. Deres fødselsrate er 1.2, mens deres overlevelsesrate er 0.81.

3) De gamle: Det er dem mellem 2 og 3 år. Deres fødselsrate er 0.5, mens deres overlevelsesrate er 0.

Formålet med denne gruppeøvelse er ved hjælp af matrixregning at undersøge hvordan de tre aldersgrupper udvikler sig under de givne betingelser.

Opgave 1 Lyder de angivne rater fornuftige?

a) Hvad kan forklaringen være på at de unges overlevelsesrate er mindre end de voksnes? Hvad vil det sige at overlevelsesraten for de gamle er 0.

b) Hvorfor er både de unges og de gamles fødselsrate mindre end de voksnes?

|||| Opgave 2 At regne et år tilbage

Den 1. januar 2018 viste en optælling at der var 198 unge rotter, 51 voksne rotter og 81 gamle rotter. Vi skal finde ud af hvor mange der var i hver aldersgruppe året før, dvs. 1. januar 2017. Gå således frem:

a) Lad x_1 betegne antallet af unge pr. 1. januar 2017, og tilsvarende x_2 antallet af voksne og x_3 antallet af gamle. Opstil et ligningssystem der indeholder tre ligninger med de tre ubekendte x_1, x_2 og x_3, og som indeholder den information der er nødvendig for at finde de ubekendte.

b) Bestem ligningssystemets koefficientmatrix $\mathbf{L}$ og dets højreside (en vektor), og løs ligningssystemet ved gausselimination (vink: benyt gerne et matematik-program).

|||| Opgave 3 Fremskrivning ved hjælp af Leslie-matricen

Den koefficientmatrix $\mathbf{L}$ vi opstillede i opgave 1, kaldes **Leslie-matricen**. Den indeholder al nødvendig information om de tre aldersgruppers fødsels- og overlevelsesrater. Vi skal nu bruge matricen til at fremskrive udviklingen, idet vi udnævner 2017 til begyndelsesår.

a) Opskriv vektoren $\mathbf{b} = (x_1, x_2, x_3)$ med de ovenfor fundne værdier for 2017. Gør rede for at vi kan genfinde populationsvektoren $(198, 51, 81)$ for 2018 ved at udføre matrix-vektorproduktet $\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}$.

b) Lad nu $\mathbf{f}(n)$ betegne populationsvektoren n år efter begyndelsesåret 2017. Gør rede for at
$$\mathbf{f}(n) = \mathbf{L}^n \cdot \mathbf{b}\,.$$

c) I år 0 (dvs. 2017) har vi set at der er lige mange unge, voksne og gamle, nemlig 100 af hver. Hvem er der flest af, næstflest af og færrest af efter 1 år, efter 2 år, efter 10 år og efter 20 år?

d) Lav et plot der viser hvordan de tre aldersgrupper udvikler sig over tid, fx over de første 20 år. Beskriv jeres observationer.

|||| Opgave 4 Eksponentiel vækst og egenværdiproblemet

a) Vis i et enkeltlogarimisk plot at de tre aldersgrupper efter et stykke tid tilsyneladende udvikler sig eksponentielt med samme fremskrivningsfaktor a. Find a. (Vink: brug fx værdierne efter 15 og 20 år for den unge gruppe.)

b) Ved den *ideelle* begyndelsesvektor $\mathbf{b}_0$ forstås populationsvektoren i år 0, hvis udviklingen hele vejen igennem havde været eksponentiel. Find $\mathbf{b}_0$.

c) Leslie-matricen har en positiv reel egenværdi som kaldes den *dominerende* egenværdi. Hvad har den og dens tilhørende egenvektor at gøre med det vi har fundet i de to foregående spørgsmål?