Miniprojekt til InterMat E2021

Beskrivelse af raket-eksplosion

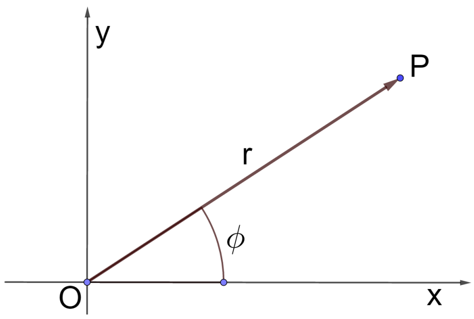
ved Karsten Schmidt (ksch@dtu.dk)

Antares CRS-3 kort efter opsendelsen 28/10 2014

I denne temaøvelse vil vi give en geometrisk beskrivelse af en raket-eksplosion. Hvorhen bevæger rakettens dele sig under simple modelbetingelser? Vi skal både se på enkeltdeles bevægelse og give et samlet billede af hvor raketdelene befinder sig. Der er også en drone i nærheden, som skal filme opsendelsen, vi må se hvor galt det går med den. Vi får brug for elementær differentialregning, for sfæriske koordinater og for parameterfremstillinger af kurver og andre *geometriske objekter. De første tre øvelser introducerer disse emner, så vi i de afsluttende øvelse 4og 5 er klar til at angribe problemet. Vi starter forsigtigt med polære koordinater i xy-planen.*

|||| Opgave 1 Polære koordinater i (x, y)-planen

Vi betragter et vilkårligt punkt P i (x, y)-planen som ikke er origo.



I polære koordinater defineres førstekoordinaten r som længden af stedvektor $\overrightarrow{OP}$, mens andenkoordinaten ϕ er vinklen fra førsteaksens positive del til stedvektoren. Vinklen regnes med fortegn i overensstemmelse med sædvanlig orientering af koordinatsystemet og vælges i intervallet $]-\pi, \pi]$.

a) Indtegn punkterne $\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ og $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ i (x, y)-planen.

b) Skitsér de to kurver $(5, \phi)$, $\phi \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ og $\left(r, -\frac{\pi}{3}\right)$, $r \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

c) Bestem arealet af området (r, ϕ) , $r \in [2, 7]$, $\phi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

d) Et punkt har det polære koordinatsæt (r, ϕ) . Gør rede for at punktets (x, y)-koordinater er givet ved formlen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} . \tag{1}$$

e) En kurve K er givet ved parameterfremstillingen

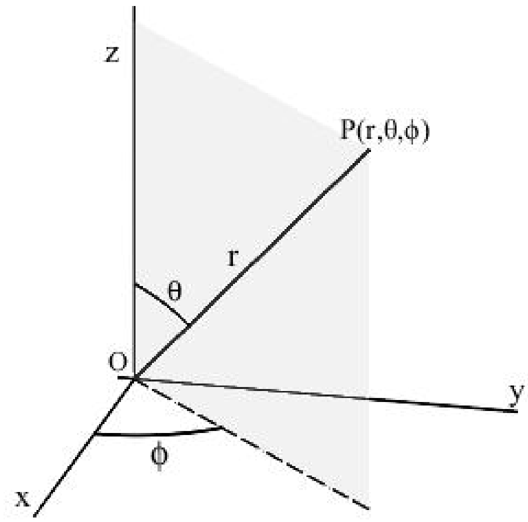
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} , \ \phi \in]-\pi, \pi] . \tag{2}$$

Gør rede for at K er en cirkel og beskriv den ved hjælp af den sædvanlige cirkelligning

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 .$$

|||| Opgave 2 Sfæriske koordinater i (x,y,z)-rummet

Vi betragter nu et vilkårligt punkt P i (x,y,z)-rummet (ikke origo).



Sfæriske koordinater defineres således: Førstekoordinaten r er længden af stedvektor $\overrightarrow{OP}$. Andenkoordinaten θ er vinklen mellem z-aksen og stedvektoren, og den vælges i intervallet $[0,\pi]$. Endelig er tredjekoordinaten ϕ vinklen mellem (x,z)-planen og den plan som indeholder både z-aksen og $\overrightarrow{OP}$. ϕ regnes med fortegn i overensstemmelse med sædvanlig orientering af (x,y)-planen, og den vælges i intervallet $]-\pi,\pi]$.

a) Bestem (x,y,z)-koordinaterne for de to punkter som har de sfæriske koordinater

$$\left(5,\pi,\frac{\pi}{2}\right) \text{ og } \left(2,\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}\right) .$$

b) Gør rede for at det følgende udtryk i sfæriske koordinater

$$(5,\theta,\phi)\ ,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \phi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

beskriver en del af en kugleflade, og angiv arealet af dette kuglefladestykke.

c) Et massivt område i (x,y,z)-rummet er beskrevet ved sfæriske koordinater således:

$$(r,\theta,\phi)\ ,\ r\in[3,5]\ ,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \phi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] .$$

Bestem voluminet af det massive område.

d) Et punkt har det sfæriske koordinatsæt (r, θ, ϕ). Gør rede for at punktets (x, y, z)-koordinater er givet ved formlen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

e) En kugleflade F i (x, y, z)-rummet er givet ved ligningen

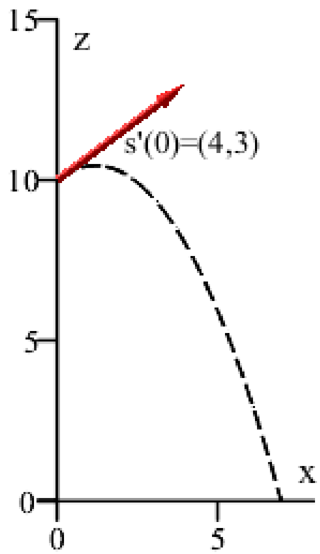
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 4\,.$$

Giv en parameterfremstilling for F der bygger på formlen i forrige spørgsmål, se også formellinje (2). Husk at angive intervallerne for de to parametre, θ og ϕ.

f) Plot kuglefladestykket i opgave 2, spørgsmål b) og kuglefladen i spørgsmål e) ved hjælp af deres parameterfremstillinger.

|||| Opgave 3 Parameterfremstillinger for det skrå kast

I det følgende betragtes et projektil som i punktet $(0, 10)$ i (x, z)-planen skydes ud med begyndelseshastigheden 4 i x-aksens retning og 3 i z-aksens retning, se figuren.



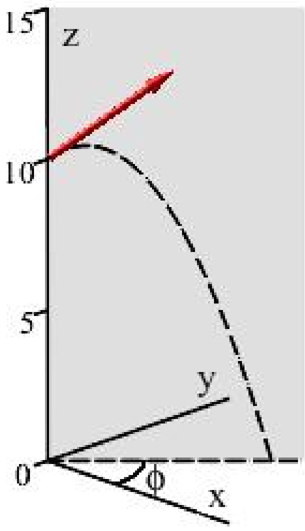
Vi ønsker at finde en parameterfremstilling for projektilets banekurve. Vi forestiller os en simpel model hvor projektilet har massen 1 og kun er påvirket af tyngdeaccelerationen hvis størrelse kaldes g.

Dermed har vi at hvis $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{s}(t)\,,\ t > 0$ er en parameterfremstilling for projektilets banekurve, så er $\mathbf{s}''(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$.

a) Sæt $g = 10$ og bestem en parameterfremstilling først for $\mathbf{s}'(t)$ og dernæst for $\mathbf{s}(t)$. Plot banekurven.

b) Bestem det punkt hvori projektilet opnår sin maksimale højde, og det punkt hvori projektilet rammer jordoverfladen (x-aksen).

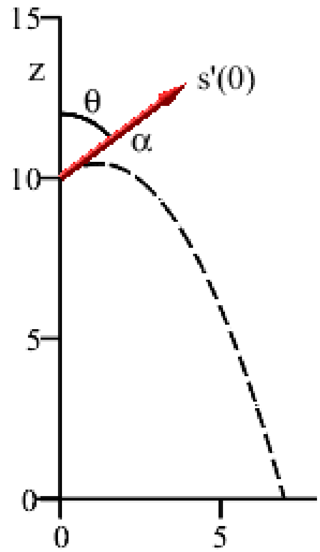
Vi drejer nu den plan som projektilets banekurve ligger i, med en vilkårlig vinkel ϕ omkring z-aksen. ϕ regnes med fortegn i forhold til sædvanlig orientering af (x, y)-planen. Alt andet er som før.



c) Bestem det punkt hvori projektilet nu opnår sin maksimale højde, og det punkt hvori projektilet rammer jordoverfladen (dvs. (x, y)-planen).

d) Bestem en parameterfremstilling $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{s}(t)\,,\ t > 0$ for projektilets banekurve.

Indtil nu har vi arbejdet under den forudsætning at banekurvens begyndelseshastighedsvektor har længden 4 i vandret retning og 3 i lodret retning. Mere generelt lader vi nu banekurvens begyndelseshastighedsvektor $\mathbf{s}'(0)$ være givet ved at $|\mathbf{s}'(0)| = \alpha > 0$, og at vinklen fra z-aksen til $\mathbf{s}'(0)$ er en vilkårlig vinkel $\theta \in [0, \pi]$, se figuren (hvor banekurvens plan forsat er drejet med vinklen ϕ i forhold til (x, z)-planen).



e) Hvordan ser parameterfremstillingen for projektilets banekurve nu ud?

|||| Opgave 4 Eksploderende raket

Nu er vi rede til at løse det stillede problem. En raket eksploderer i (x, y, z)-rummet til tiden $t = 0$. For nemheds skyld forestiller vi os raketten som et punkt der befinder sig i punktet $(0, 0, h)$. På grund af tekniske problemer har den tabt hastighed i lodret retning og står stille i eksplosionsøjeblikket. Nu rives den i stykker som sendes i alle retninger med samme fart som vi benævner α. Alle stykker har massen 1 og tyngdeaccelerationen betegnes g.

a) Gør rede for at alle raketdelene til ethvert tidspunkt fra eksplosionen og indtil de begynder at ramme jordoverfladen, befinder sig på en fælles kugleflade. Bestem kuglefladens (tidsafhængige) radius og centrum.

b) Besvar igen spørgsmål a), men hvor der nu også tages højde for rakettens lodrette hastighed β i eksplosionsøjeblikket.

c) Antag at $\alpha = 5$, $\beta = 10$, $g = 10$ og $h = 100$. Nedfaldsområdet i (x, y)-planen er en cirkelskive, bestem cirklens radius.

Opgave 5 Mindsteafstanden til en forbipasserende drone

Vi sætter igen $\alpha = 5$, $\beta = 10$, $g = 10$ og $h = 100$. To droner, som vi beskriver som punkter, skal observere opsendelse af raketten. Dronens bevægelse langs en ret linje er givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{d}_1(t) = (-10 + 5t, 10, 100) \text{ og } \mathbf{d}_2(t) = (-10 + 8t, 10, 70), \ t \geq 0,$$

hvor t er fælles tidsparameter for dronen og den eksploderede raket som i opgave 4.

a) Beskriv med ord hvordan de to droner bevæger sig.

b) Undersøg om dronerne bliver ramt af raketstykkerne. Hvis det er tilfældet, så angiv tid og sted for kollisionen. Hvis det ikke er tilfældet, så bestem det tidspunkt hvor afstanden fra dronen til kuglefladen er mindst og angiv denne afstand. Bestem endvidere dronens position ved dette tidspunkt samt det punkt på kuglefladen hvor den er tættest på dronen (angiv svar med to decimaler).

c) Lav en animation af eksplosionen og de to droner.

Temaøvelsesopgaven er slut