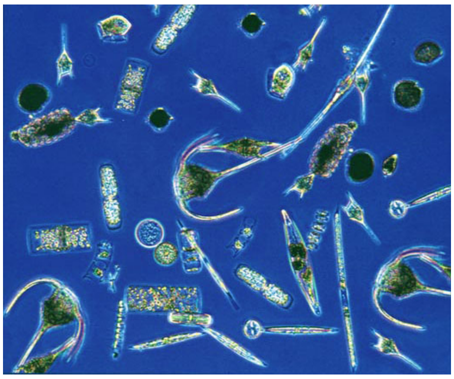
Optimal Fytoplankton

v./ Ken Haste Andersen, kha@aqua.dtu.dk, og Steen Markvorsen, stema@dtu.dk,
InterMat, August, 2020



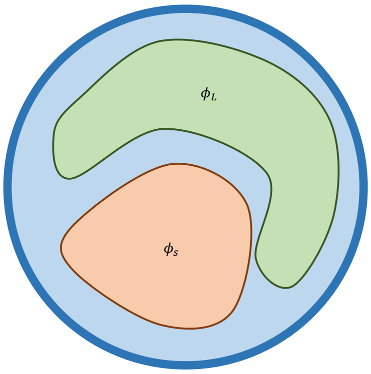
1.1 Biologi

Start med at se denne intro: youtube.com/watch?v=ULsxOkEweuI

Fytoplankton er bitte små éncellede organismer, der lever i de øvre lag af verdens søer og oceaner. De er ansvarlige for omkring halvdelen af fotosyntesen på jorden. Således er de nøgleorganismer i oceanerenes primære produktion, som til sidst ender op i de fisk vi spiser. Fytoplankton indgår også i den globale kulstofcirkulation, der regulerer jordens klima. I denne workshop analyserer vi en simpel model af en generisk fytoplankton celle. Modeller som denne – med nogle få flere detaljer – danner basis for moderne simulationsmodeller af livet i det globale ocean.

Vi tænker for det meste på mikroskopisk liv som simpelt 'småt materiale', men mikrobiologisk liv er lige så forskelligt som det makroskopiske liv, vi oplever med vore sanser. For at beskrive nogle aspekter af denne diversitet, beskriver vi først generisk fytoplankton ved deres investeringer i to processer: udnyttelse af lys ϕ_L (kloroplast) og syntese af ny struktur (ribosomer osv.) ϕ_S. Disse to investeringer beskriver hver for sig de (dimensionsløse) brøkdele af totalinvesteringen, som cellen bruger på de to processer, således at:

$$\phi_L + \phi_S = 1 \quad . \tag{1}$$



Optagelsen af kulstof gennem lysforbrug beskrives ved følgende funktion J_L af de to variable, ϕ_L og F, hvor F betegner lysintensiteten. Bemærk, at investeringen ϕ_S indsættes i funktionen som $(1-\phi_L)$, således at funktionen J_L virkelig bliver en funktion af de to nævnte variable:

$$
\begin{aligned}
J_L(F,\phi_L) &= c_S \cdot \phi_S \cdot \left(\frac{c_L \cdot \phi_L \cdot F}{c_L \cdot \phi_L \cdot F + c_S \cdot \phi_S} \right) \\
&= c_S \cdot (1-\phi_L) \cdot \left(\frac{c_L \cdot \phi_L \cdot F}{c_L \cdot \phi_L \cdot F + c_S \cdot (1-\phi_L)} \right)
\end{aligned} \tag{2}
$$

Konkrete værdier for c_S og c_L for én type af fytoplankton er givet i tabel 1.

Betegnelser	Værdier
ϕ_S	$\phi_S \in [0,1]$
ϕ_L	$\phi_L \in [0,1]$
c_L	0.005 $m^2W^{-1}dag^{-1}$
c_S	1 dag^{-1}
F	$F \in [0,300]$ W m^{-2}
M	0.1 dag^{-1}
c_H	1000 W m^{-2}

Tabel 1: Model-parametre og -værdier

1.2 Matematisering I

Vi 'oversætter' først den 'biologiske' ligning (2) til ren matematisk notation således:

$$
f(x,y) = a \cdot (1-y) \cdot \left(\frac{b \cdot y \cdot x}{b \cdot y \cdot x + a \cdot (1-y)} \right) \quad , \tag{3}
$$

hvor f er et nyt (matematik-)navn for J_L og hvor a og b er positive konstanter (nye matematik-navne for henholdsvis c_S og c_L), og hvor x og y (nye matematik-navne for henholdsvis F og ϕ_L) begge er positive variable i intervallerne $x \in [0,\infty]$ og $y \in [0,1]$.

|||| Opgave 1

Plot grafen for funktionen $f(x,y)$, med forskellige værdier for a og b, f.eks. $a = 1$, $b = 1/200$, og $x \in [0,300]$, $y \in [0,1]$, som er de værdier, der svarer til de tilsvarende biologiske værdier i tabel 1.

|||| Opgave 2

Vis, at uanset hvilke positive værdier der vælges for a og b, så har funktionen $f(x,y)$ kun ét stationært punkt. Hvilket punkt er der tale om?

|||| Opgave 3

Bestem det approximerende polynomium af første grad for $f(x,y)$ med udviklingspunkt $(0,y_0)$ for ethvert $y_0 \in [0,1]$.

|||| Opgave 4

Bestem det approximerende polynomium af anden grad for $f(x,y)$ med udviklingspunkt $(0,0)$.

|||| Opgave 5

Vis, at for fastholdt $y = y_0$ fås, at $f(x,y_0) \to a \cdot (1 - y_0)$ for $x \to \infty$.

|||| Opgave 6

Vis, at for fastholdt $x = x_0$ fås, at $h(y) = f(x_0,y)$ har netop ét maksimum som antages for en bestemt værdi af $y = y_m = y_m(x_0)$. Plot grafen for funktionen $h(y)$ for $x_0 = 100$ og $a = 1$, $b = 1/200$. Bestem for enhver værdi af a og b maksimumsværdien y_m som en funktion $y_m(x_0)$ af x_0.

1.3 Tilbagelevering til biologien I

|||| Opgave 1

Argumentér for, at du ovenfor nu har vist, at for små lysniveauer er optagelsen af kulstof i fytoplankton proportional med lysintensiteten og med investeringen i lysoptaget.

|||| Opgave 2

Argumentér for, at du også har vist, at for stor lysintensitet er optagelsen af kulstof i fytoplankton begrænset af syntesekapaciteten $c_S \cdot (1 - \phi_L) = c_S \cdot \phi_S$.

|||| Opgave 3

Den dominerende fytoplanktontype er den der har den højeste vækstrate. Vækstraten $g(F, \phi_L)$ er simpelthen givet som optagelsen af kulstof, altså J_L, minus tabene der opstår på grund af nedsynkning eller fordi fytoplanktoncellerne simpelhen bliver spist af zooplankton. Dvs.

$$g(F, \phi_L) = J_L(F, \phi_L) - M \quad , \tag{4}$$

hvor M betegner en konstant, det faste tab pr. dag – se tabel 1. Find den investering ϕ_L^*, der maksimerer vækstraten ved at løse:

$$\frac{\partial g}{\partial \phi_L} = 0 \quad . \tag{5}$$

Vink: Den opgave er også allerede løst i én af matematik-opgaverne ovenfor.

1.4 Mere biologi

Antag nu, at også fytoplankton-cellerne kan blive 'solskoldede' under kraftige vedvarende lysintensiteter, således at kulstofoptagelsen faktisk ikke kan forblive på et højt niveau som ovenfor når F bliver meget stor. Dette fænomen modellerer vi ved at tilføje en exponentielt aftagende faktor på J_L således:

$$\widehat{J_L} = J_L \cdot e^{-(F/c_H)^2} \quad , \tag{6}$$

hvor c_H er en konstant 'solskoldnings-faktor' for fytoplanktoncellernes kulstofoptag og vækstrate.

1.5 Matematisering II

|||| Opgave 1

Skriv $\widehat{J_L}$ som en funktion $\widehat{f}(x, y)$ af de to variable x og y som allerede indført ovenfor. Brug evt. c som betegnelse for den ekstra konstant c_H.

|||| Opgave 2

Vis, at $\widehat{f}(x, y)$ ligesom $f(x, y)$ har et stationært punkt i $(0, 0)$, men at der nu findes et globalt maksimumspunkt i et andet stationært punkt for $\widehat{f}(x, y)$. Bestem dette andet stationære punkt og den maksimumsværdi, som $\widehat{f}(x, y)$ antager der. Benyt konkrete værdier for a, b og c svarende til de biologiske værdier, der er givet i tabel 1.

Opgave 3

Bestem Hesse-matricen for $\widehat{f}(x, y)$ i maksimumspunktet. Benyt evt. igen konkrete værdier for a, b og c.

Opgave 4

Bestem det approximerende polynomium af anden grad for $\widehat{f}(x, y)$ i maksimumspunktet.

1.6 Tilbagelevering til biologien II

Opgave 1

Argumentér for, at du nu blandt andet har vist, at med introduktionen af den hæmmende solskoldningsfaktor på kultofoptaget, så findes der et globalt optimum for vækstraten af fytoplankton cellerne udtrykt ved investeringen i lysudnyttelsen ϕ_L og lysintensiteten F.

Opgave 2

Bestem de konkrete optimale værdier for ϕ_L og F således at vækstraten $\widehat{g} = \widehat{J}_L - M$ bliver størst muligt for den type fytoplankton, der kan beskrives med parametrene i tabel 1.

SLUT