

Komplekse Tal og Algebraens Fundamentalsætning

v./ Uwe Timm, UT@cg-gym.dk, og Steen Markvorsen, stema@dtu.dk, InterMat, August 2020

Løsning af ligninger og talmængder

Vi ønsker at løse ligningen $a \cdot x + b = 0$, hvor a, b er naturlige tal $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Kan vi finde en løsning til denne ligning, når x også skal være et naturligt tal? Vi starter med tilfældet, hvor $a \neq 0$ og $b = 0$.

Ligningen er så $a \cdot x = 0$, der har løsningen $x = 0$. Hvis $a = b = 0$ så er alle naturlige tal løsninger. Hvis $b \neq 0$, så er $b > 0$ og dermed er $a \cdot x + b > 0$ for alle $x \in \mathbb{N}$, hvorfor ligningen ikke har nogen løsning.

Vi har brug for flere tal. Hertil kan vi først bruge de hele tal $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Nu er a, b hele tal og vi antager at a ikke er 0. Så vi prøver nu om vi kan løse ligningen, når x er et helt tal. Det viser sig at vi ikke altid kan finde en løsning, idet vi kan omskrive ligningen til $a \cdot x = -b$. Hvis vi skal løse denne ligning, skal vi dele med a på begge sider af lighedstegnet. Men, så må a gå op i b . Dette er også tilfældet, hvis vi ser på ligningen $5x + 10 = 0$; der finder vi at løsningen er $x = -2$. Men ser vi på ligningen $5x + 12 = 0$, er der ingen løsning inden for de hele tal, idet 5 ikke går op i 12.

Selv om vi har flere muligheder med de hele tal, så vi har altså også brug for de rationale tal

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. I denne talmængde har ligningen $a \cdot x + b = 0$ nemlig altid en løsning $x = -\frac{b}{a}$ for alle *rationale* tal a og b , når blot igen $a \neq 0$.

Hvis vi gerne vil løse andengradsligningen $x^2 + a = 0$, hvor a er et rationalt tal, kan denne ligning ikke løses hver gang, altså for ethvert valg af a . Ser vi på ligningen $x^2 - 9 = 0$, har den to løsninger $x = -3$ og $x = 3$. Men ser vi på ligningen $x^2 - 2 = 0$ eller skrevet som $x^2 = 2$ har ligningen ingen rational løsning. De to velkendte reelle løsninger $\pm\sqrt{2}$ er ikke rationale:

Øvelse 1

- a) Forsøg at forstå beviset nedenfor for påstanden om at $\pm\sqrt{2}$ er irrationale tal. Der er tale om et modstridsbevis. Gengiv beviset for din sidekammerat.

Antag modsætningsvist, at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal. Så kan tallet skrives som en brøk mellem hele tal $\frac{p}{q}$. Vi kan antage at brøken er uforkortelig - ellers kan vi bare forkorte den i bund. Vi kan så skrive

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$. Højre siden er et lige tal. Derfor må p også være et lige tal. Vi kan derfor

skrive $p = 2r$, hvor r er et helt tal. Vi kan derfor også skrive $4r^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2r^2 = q^2$, som viser, at q også er et lige tal. Når både p og q er lige tal, kan brøken mellem dem forkortes. Det er i modstrid med hvad vi antog fra starten, nemlig at brøken er uforkortelig. Og så er påstanden bevist, altså $\sqrt{2}$ er ikke et rationalt tal. Hvorfor er $-\sqrt{2}$ så heller ikke et rationalt tal?

Vi har nu set at ligningen $x^2 - 2 = 0$ ikke har nogen løsning inden for de rationale tal. Men der findes en større talmængde, de reelle tal $\mathbb{R}$ hvori løsningerne $x = -\sqrt{2}$ og $x = \sqrt{2}$ netop optræder.

Ligningen skal ikke ændres ret meget for at vi får brug for endnu flere tal. Ser vi nemlig på ligningen $x^2 + 1 = 0$, så har denne ligning ingen løsninger inden for de reelle tal, idet ligningen jo kan skrives som

$x^2 = -1$, men $x^2 \geq 0$ for ethvert reelt tal x . Så vi har igen brug for flere tal for at kunne håndtere den slags ligninger. Vi vil derfor nu introducere det næste tal-rum i rækken

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset ?$$

De komplekse tal

Vi lader $\mathbb{C}$ betegne mængden af alle par (a, b) af reelle tal. Og vi definerer en måde, hvorpå vi kan lægge tal sammen i mængden $\mathbb{C}$ ved at indføre summen af to par

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

for alle par (a, b) og (c, d) i $\mathbb{C}$. Man genkender det som vektoraddition. Måden virker måske naturlig, men vi vil også gerne gange tal-par sammen i $\mathbb{C}$ - fordi det kan vi i de andre tal-rum og det er helt nødvendigt for at finde løsninger til ligningerne. Her indfører vi en smart måde

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

for alle par (a, b) og (c, d) i $\mathbb{C}$. Vi ser først på et eksempel.

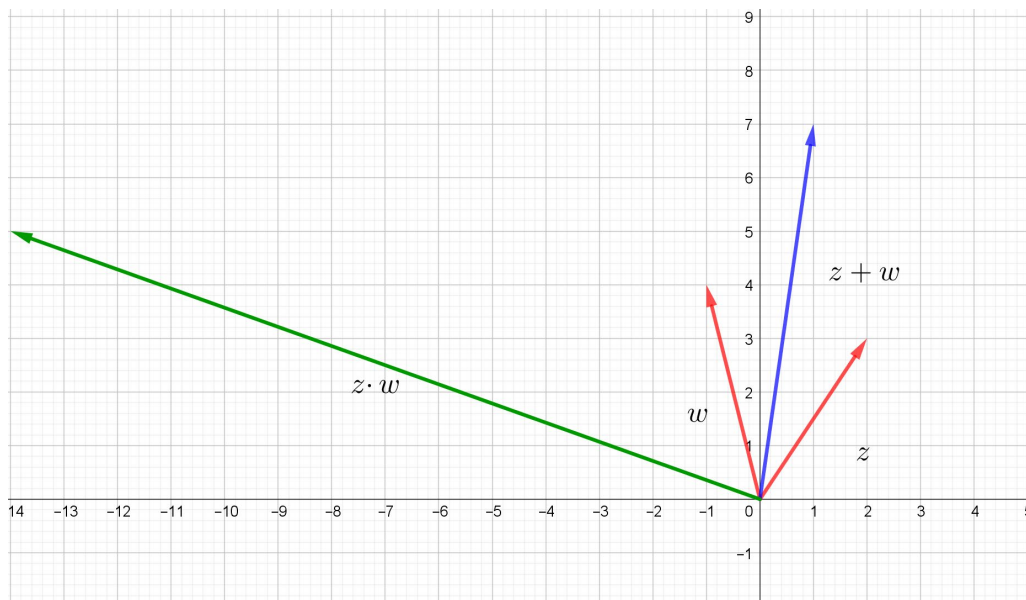
Eksempel 1

Sæt $z = (2, 3)$ og $w = (-1, 4)$. Vi finder så sum og produkt af de to par i henhold til opskrifterne ovenfor:

$$z + w = (2, 3) + (-1, 4) = (2 - 1, 3 + 4) = (1, 7)$$

$$z \cdot w = (2, 3) \cdot (-1, 4) = (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 4, 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4) = (-14, 5)$$

Mængden $\mathbb{C}$ udstyret med regneoperationerne plus og gange kaldes *de komplekse tal*.



Figur 1. På figuren ses to komplekse tal z og w samt deres sum og produkt.

Læg mærke til at det i Figur 1 ser ud som om at længden af stedvektoren til punktet (det komplekse tal) $z \cdot w$ er produktet af de to længder af henholdsvis stedvektoren til z og stedvektoren til w . Og at vinklen fra x -aksen til $z \cdot w$ er summen af de to vinkler fra x -aksen til henholdsvis z og w . Det er ikke tilfældigt – det gælder helt generelt for produktet af to komplekse tal – se sætning 1 og beviset i øvelse 8 nedenfor.

Der gælder en række regneregler for de komplekse tal. De følger direkte af regnereglerne for de reelle tal.

For eksempel kan vi naturligt betegne det komplekse tal $(0,0)$ med 0 , og heraf får vi at

$z + 0 = (a,b) + (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b) = z$. Desuden kan vi lige så naturligt betegne det komplekse tal $(1,0)$ med 1 og tilsvarende betegne det komplekse tal $(a,0)$ med a for ethvert reelt tal a . På den måde optræder de reelle tal som en delmængde af de komplekse tal.

Som det modsatte tal til (a,b) kan vi derfor bruge $(-a,-b)$ og endelig kan vi dividere således, når blot $z = (a,b) \neq (0,0)$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(a,b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

Øvelse 2

- a) Vis, at division af 1 med z nødvendigvis må have dette udtryk, sådan at $z \cdot \left(\frac{1}{z}\right) = 1$ for alle $z \neq 0$.

Bemærk, at man ved simple udregninger ser, at

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0) \text{ og } (a,0) \cdot (b,0) = (a \cdot b,0)$$

I overensstemmelse med, at de reelle tal er en delmængde af de komplekse tal, hvis vi som nævnt identificerer a som et reelt tal med $(a,0)$ som et komplekst tal.

Bemærk. En udregning viser, at $(0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0)$.

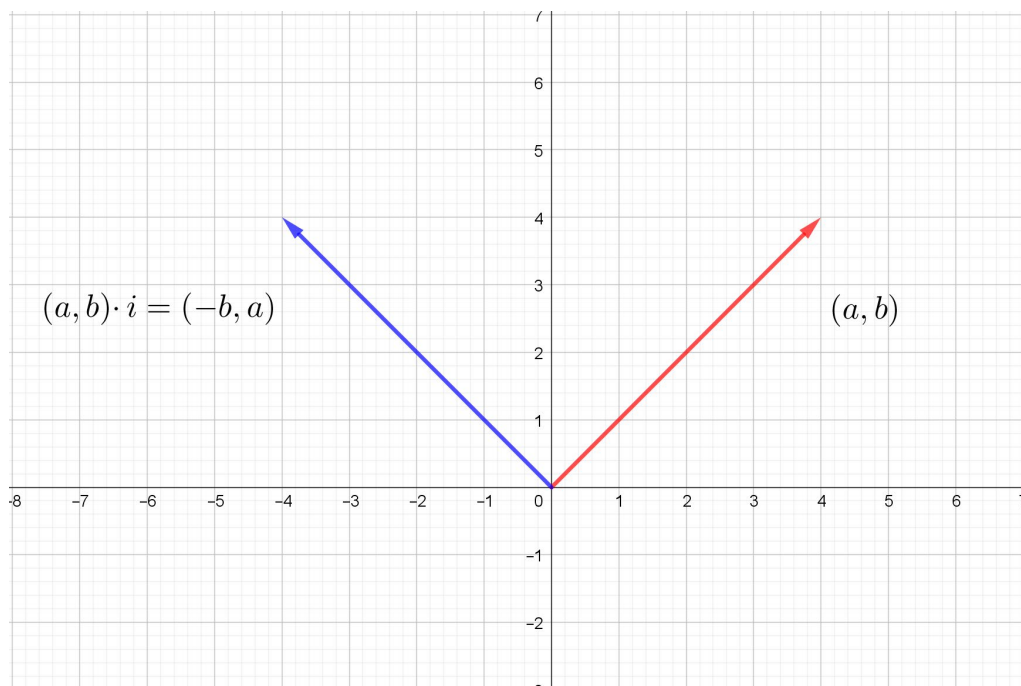
Hvis vi sætter $i = (0,1)$, kan vi bruge ovenstående til at udregne $i^2 = (-1,0) = -1$. Hvis vi anvender, at de reelle tal er en delmængde af de komplekse tal, kan vi for alle reelle a, b skrive

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + bi$$

og heraf følger

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Sammenlign med definitionen på produkt af par ovenfor inden for de komplekse tal. Bemærk specielt, at når man ganger med i , så drejer det komplekse tal 90 grader mod uret.



Figur 2. Vi ser hvordan et komplekst tal drejes 90 grader mod uret, når man ganger det med i .

Øvelse 3

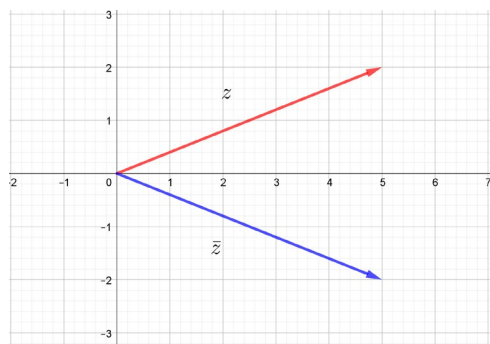
Lad $z = 5 + 2i$ og $w = 3 - 4i$ være komplekse tal.

a) Beregn $z + w$ og $z \cdot w$.

b) Find $\frac{1}{w}$ og beregn $\frac{z}{w}$.

Et par definitioner og notationer: Lad $z = (a, b) = a + b \cdot i$ være et vilkårligt komplekst tal. Da defineres det *komplekst konjugerede* tal til z ved $\bar{z} = a - bi$. Og *modulus* eller *længden* af det komplekse tal $z = (a, b)$ defineres ved længden af stedvektoren til punktet $z = (a, b)$ og betegnes $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Det reelle tal a i det komplekse tal $z = a + b \cdot i$ kaldes *realdelen* af z og betegnes med $Re(z) = Re(a + i \cdot b) = a$. Det reelle tal b i det komplekse tal $z = a + b \cdot i$ kaldes *imaginærdelen* af z og betegnes med $Im(z) = Im(a + i \cdot b) = b$.

Bemærk, at z og $\bar{z}$ altid har samme realdel, $Re(z) = Re(\bar{z})$, og at z og $\bar{z}$ altid har modsatte imaginærdele, $Im(z) = -Im(\bar{z})$.



Figur 3. Det komplekse tal z og dets konjugerede tal $\bar{z}$.

Øvelse 4

- a) Vis, at $z \cdot \bar{z} = z^2$.
- b) Vis, at man heraf kan man slutte, at der for $z \neq 0$ gælder, at $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$.
- c) Kontroller, at udtrykket man i b) finder for $\frac{1}{z}$ stemmer overens med det ovenfor angivne udtryk.

Øvelse 5

- a) Sæt $z = 1 + i$ og beregn z^{12} .

Geometri og komplekse tal

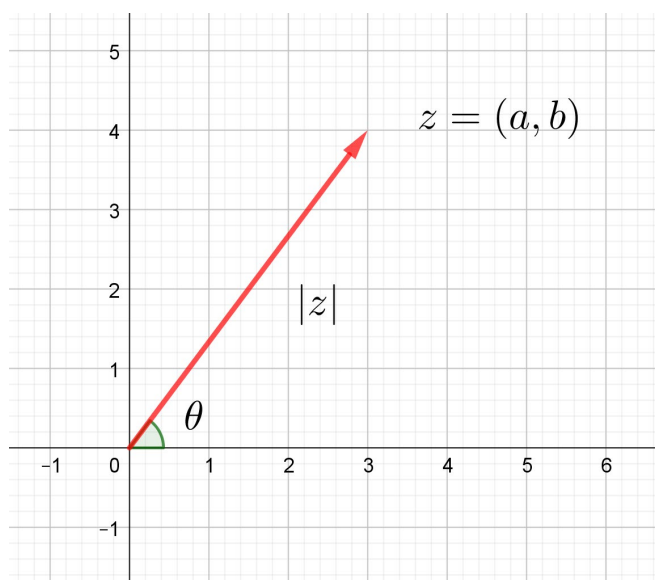
Vi kan skrive et komplekst tal på en anden måde end blot som et punkt $z = (a, b)$ i det sædvanlige koordinatsystem. Vi kan bruge polære koordinater til at beskrive punktet og dermed det komplekse tal: Hvis $z \neq (0, 0)$, så danner stedvektoren til punktet (a, b) en vinkel θ med førsteaksen, og vi kan skrive

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)), \text{ hvor } r = |z| > 0.$$

Vi siger at z er skrevet på *polær* form.

Vi kan altid repræsentere z som ovenfor med en vinkel θ_0 som ligger i intervallet $] -\pi, \pi]$. Alle andre vinkler som giver præcis det samme komplekse tal i den polære form for z er så $\theta = \theta_0 + 2p \cdot \pi$ hvor p er et vilkårligt helt tal.

Notation: Den særlige vinkel θ_0 i intervallet $] -\pi, \pi]$ som kan bruges i den polære form for z kaldes *hovedargumentet*, eller blot *argumentet*, for det komplekse tal z og skrives $\arg(z) = \theta_0$.



Figur 4. Det komplekse tal på polær form.

Ved at bruge de såkaldte additionsformler for sinus og cosinus kan vi nu bevise følgende sætning:

Sætning 1

Lad $z = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$ og $w = s \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ være komplekse tal. Da gælder

$$z \cdot w = r \cdot s \cdot (\cos(\theta + \varphi) + i \cdot \sin(\theta + \varphi)).$$

Altså, hvis man ganger to komplekse tal med hinanden, skal man gange længderne sammen og addere vinklerne, præcis som vi inspicerede allerede i Figur 1. Sætningen bevises i øvelse 8 nedenfor.

Ekspontialfunktionen

Ekspontialfunktionen kan udvides til de komplekse tal ved at definere for alle $z = (a, b)$

$$\exp(z) = \exp(a + i \cdot b) = e^{a+i \cdot b} = e^a \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b)).$$

Hvor e^a betegner den sædvanlige eksponentialfunktion taget på det reelle tal $a \in \mathbb{R}$. Der gælder specielt derfor denne formel

$$e^{i \cdot \pi} = e^0 \cdot (\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)) = -1.$$

I ligningen indgår der fire vigtige tal, nemlig 1, e , π og i .

Ved at benytte sætning 1 ovenfor kan man vise, at $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ for alle komplekse tal z og w .

Vi ser, at definitionen af den komplekse eksponentialfunktion giver, at

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$

for alle vinkler θ . Dermed kan ethvert komplekst tal nu også skrives på formen

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) = r \cdot e^{i \cdot \theta}.$$

Vi lader $z = r \cdot e^{i \cdot \theta}$ være et komplekst tal forskellig fra 0, og n et vilkårligt naturligt tal. Ved at sætte $q = \sqrt[n]{r} \cdot e^{(i \cdot \theta/n)}$ finder vi

$$q^n = (\sqrt[n]{r})^n \cdot \left(e^{\frac{i \cdot \theta}{n}}\right)^n = r \cdot e^{i \cdot \theta} = z.$$

Vi ser heraf, at q er en n -te rod af z i den forstand at $z = q^n$.

Men læg nu mærke til, at der er flere θ -værdier som giver samme værdi for $z = r \cdot e^{i \cdot \theta}$, nemlig $\theta = \theta_0 + 2 \cdot \pi \cdot p$ hvor p er et vilkårligt helt tal og hvor θ_0 er hovedargumentet for z . Heraf får vi nu *samtlig* n -te rødder af det komplekse tal z til at være

$$q_p = \sqrt[n]{r} \cdot e^{(i \cdot (\theta_0 + 2 \cdot \pi \cdot p)/n)}$$

hvor p gennemløber de n værdier $p = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Øvelse 6

- a) Hvorfor giver disse p -værdier netop n forskellige n -te rødder af z ? Og hvorfor kan der ikke tilføjes flere hel-tallige p -værdier til listen med henblik på at opnå flere n -te rødder?

Vi ser derfor, at alle egentlige komplekse tal har n -te rødder og deres antal er n for ethvert naturligt tal n . Som eksempel kan vi se på tilfældet $n = 2$ og det komplekse tal $z = (-4,0) = -4$, der derfor har to rødder. De bestemmes rimelig simpelt til at være $\pm 2i$. Vi kan derfor se, at ligningen $z^2 + 4 = 0$, der tidligere var problematisk, nu godt kan løses.

Øvelse 7

Givet to komplekse tal $z = 4 + 3 \cdot i$ og $w = 2 \cdot i$.

- Indtegn de to tal i et koordinatsystem.
- Skriv de to tal på polær form.
- Beregn produktet $z \cdot w$ og skriv resultatet på polær form.
- Undersøg at resultatet stemmer overens med sætning 1.

Øvelse 8

Der gælder følgende additionsformler for cosinus og sinus:

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \varphi) &= \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) &= \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi)\end{aligned}$$

- Brug disse formler til at bevise sætning 1.

Øvelse 9

Lad $w = 1 - i$ og skriv tallet på polær form.

- Find alle 6 sjette-rødder af w ved at bruge formelen ovenfor.
- Indtegn rødderne i et koordinatsystem og se om der er et mønster ved deres placering.

Øvelse 10

I nedenstående opgave skal du bruge et koordinatsystem til at tegne løsningerne til en ligning.

- Beregn alle tredje-rødder af 1. Hvilket er det samme som at løse ligningen $z^3 - 1 = 0$. Indtegn løsningerne i dit koordinatsystem.
- Vis, at $(z - 1) \cdot (z^2 + z + 1) = 0$ for alle løsninger z til ligningen $z^3 - 1 = 0$.
- Vis, heraf at for enhver løsning forskellig fra 1 i spørgsmål a) gælder, at $z^2 + z + 1 = 0$. Hvad betyder det geometrisk?
- Prøv at generalisere det ovenstående til n -te rødder af 1, hvor n er vilkårligt.

Algebraens Fundamentalsætning

Start med at se videoen: <https://www.youtube.com/watch?v=shEk8sz1oOw>

Senere: http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm

Specielt kapitlerne 5 og 6: http://www.dimensions-math.org/Dim_CH5.htm

Som vi har set ovenfor, har vi hele tiden haft brug af udvide talmængderne for at kunne løse ligninger af første grad, og ved at løse andengradsligningen, har vi brug for de komplekse tal. For komplekse første- og andengradsligninger kan vi bruge de velkendte formel-udtryk for løsningerne. Hvad sker der, hvis vi går et skridt højere til tredjegrads-ligningen. Kan man altid løse følgende komplekse ligning med eksplícitte formeludtryk?

$$a \cdot z^3 + b \cdot z^2 + c \cdot z + d = 0, \text{ hvor } a, b, c, d \text{ er komplekse tal?}$$

Det kan vi faktisk godt (se tillægget om 3. grads polynomier). Hvad hvis går op til fjerdegradsligninger, kan vi så løse dem med eksplicitte formler? Igen er svaret, at det kan vi godt, men så *generelt* heller ikke højere grad end fire. Det bliver derfor interessant at finde ud af, dels *hvor mange rødder* der generelt findes for et komplekst n -te grads polynomium og at finde ud af, *hvordan vi kan finde disse rødder* numerisk, via en algoritme som vi kan bruge til at approksimere rødderne.

Algebraens Fundamentalsætning (AFS) fortæller, at ethvert komplekst polynomium af grad $n > 0$ har præcis n komplekse rødder (når dobbelt-rødder tælles med to gange etc.). Se den præcise formulering nedenfor i sætning 2 og 3. Vi har allerede bemærket, at sætningen er korrekt for $n = 1, 2, 3, 4$ med eksplicitte udtryk for de n rødder i de tilfælde. Vi har faktisk også ovenfor indset, at den noget specielle ligning $z^n - w = 0$ har præcis n rødder. (Hvor er det ovenfor at vi har indset det?). Så der er allerede 'noget om snakken'.

Sætning 2

[Algebraens fundamentalsætning]. Lad

$$p(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0$$

være et n -te grads polynomium med $n > 0$, hvor $a_0, a_1, \dots, a_n$ er komplekse tal, $a_n \neq 0$. Så har $p(z)$ præcis n rødder (regnet med multiplicitet).

Bemærk. Vi taler om at en rod har en *multiplicitet*, som betyder, at roden forekommer flere gange. Dette kender vi fx fra andengradspolynomiet $p(z) = z^2 - 4z + 4$, der har dobbeltroden $z = 2$ der altså forekommer to gange og dermed har multiplicitet 2. For et n -te gradspolynomium, kan det ske for flere af rødderne, så antallet af forskellige rødder kan være mindre end n , men hvis vi regner med multiplicitet, vil ifølge AFS det totale antal rødder altid give graden af polynomiet.

Der findes mange – og meget forskellige – beviser for AFS. Her vil vi 'nøjes' med et intuitivt argument, som blandt andet bygger lidt på nogle overvejelser om *funktioner af to variable*. I det følgende vil vi derfor også benytte den mere direkte reference til (x, y) -koordinatsystemet og skrive de komplekse tal på formen $z = x + i \cdot y$, sådan at et komplekst polynomium $p(z)$ også kan opfattes som en *kompleks funktion af de to reelle variable* x og y .

For ethvert $z = (x, y)$ har det komplekse tal $p(z) = p(x + i \cdot y)$ en reel realdel og en reel imaginærdel, som vi kan kalde henholdsvis $g(x, y)$ og $h(x, y)$, dvs. sådan at:

$$p(x + i \cdot y) = \operatorname{Re}(p(x + i \cdot y)) + i \cdot \operatorname{Im}(p(x + i \cdot y)) = g(x, y) + i \cdot h(x, y).$$

Et komplekst polynomium $p(z)$ af grad n giver altså på den måde direkte anledning til de *to reelle polynomier af to reelle variable*, $g(x, y)$ og $h(x, y)$, som begge er polynomier af højst n -te grad.

Et eksempel på et komplekst polynomium er $p(z) = z^3 + z + 1 + 2i$. Efter en udregning får vi:

$$p(x + i \cdot y) = (x^3 - 3x \cdot y^2 + x + 1) + i \cdot (3x^2 \cdot y - y^3 + y + 1)$$

sådan at vi i dette tilfælde har $g(x, y) = x^3 - 3x \cdot y^2 + x + 1$ og $h(x, y) = 3x^2 \cdot y - y^3 + y + 1$.

Øvelse 11

- a) Vis med et eksempel, at det omvendte, ikke er tilfældet, altså: Hvis der er givet to reelle polynomier $g(x, y)$ og $h(x, y)$ så findes der ikke nødvendigvis et komplekst polynomium $p(x + i \cdot y)$ sådan at $g(x, y)$ og $h(x, y)$ er henholdsvis realdel og imaginærdel af $p(x + i \cdot y)$.

Intuitivt bevis for AFS. Lad p være et komplekst polynomium af grad $n > 0$. Vi skriver polynomiet på standard form som

$$p(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0.$$

Vi antager at $a_0 \neq 0$ og at $a_n \neq 0$. Hvis $a_0 = 0$, ville $z = 0$ være en rod i polynomiet. Hvis $a_n = 0$, ville graden af polynomiet ikke være n .

I (x, y) -planen lader vi nu C_ρ betegne den cirkel, der har centrum i $(0, 0)$ og radius ρ . Da p afbilder ethvert punkt $z = (x, y)$ i planen på et punkt $p(z)$ i (x, y) -planen, så vil p tilsvarende afbilde cirklen C_ρ på en lukket kurve $S_\rho = p(C_\rho)$ i (x, y) -planen. Vi påstår nu, at for små værdier af radius ρ er kurven S_ρ en lille lukket kurve tæt på a_0 , som *ikke går rundt om punktet* $(0, 0)$ og videre, at for meget store værdier af radius ρ er kurven S_ρ tilnærmelsesvist en cirkel som faktisk *nu går rundt om punktet* $(0, 0)$ – faktisk flere gange, nemlig n gange. Det betyder intuitivt klart, at kurven S_ρ for mindst én værdi af radius ρ (faktisk n værdier) imellem meget små radius-værdier og meget store radius-værdier må ramme igennem punktet $(0, 0)$. Lad os sige, at det er tilfældet for $\rho = \rho_0$. Men det betyder så, at der på cirklen C_{ρ_0} må findes et punkt z_1 som ved p afbildes i $(0, 0) = 0$. Altså at $p(z_1) = 0$, så z_1 er én af de søgte n rødder for $p(z)$.

Der er nu to spørgsmål tilbage. For det første: Hvorfor er S_ρ tæt på a_0 når ρ er lille og tilnærmelsesvist cirkulær rundt om $(0, 0)$ når ρ er stor? Og for det andet: Hvordan viser vi, at der udover z_1 er $n - 1$ andre rødder (regnet med multiplicitet) for $p(z)$?

Vi tager det første spørgsmål først og ser på tilstrækkeligt små værdier af ρ . Alle punkter på cirklen C_ρ kan som nu bekendt skrives på følgende form, hvor θ gennemløber intervallet $]-\pi, \pi]$:

$$z = \rho \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \rho \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) = \rho \cdot e^{i\theta}$$

Vi får derfor ved simpel indsættelse i polynomsudtrykket for $p(z)$

$$p(z) = (a_n \cdot \rho^n \cdot e^{ni\theta} + a_{n-1} \cdot \rho^{n-1} \cdot e^{(n-1)i\theta} + \dots + a_1 \cdot \rho \cdot e^{i\theta}) + a_0 = \rho \cdot (*) + a_0$$

hvor modulus, altså længden, af $\rho \cdot (*)$ kan gøres vilkårligt lille for alle værdier af θ på én gang ved blot at vælge ρ tilstrækkeligt lille. Men så er $|p(z) - a_0|$ tilsvarende vilkårligt lille for alle z på cirklen C_ρ og den lukkede kurve S_ρ er derfor så tæt på det komplekse tal a_0 at den umuligt kan nå rundt om $(0, 0)$.

Lad nu $\rho > 0$ være et stort tal. Så kan billedet S_ρ af cirklen C_ρ med centrum i $(0, 0)$ og radius ρ nu udtrykkes ved følgende, hvor vi stadig benytter $z = \rho \cdot e^{i\theta}$:

$$p(z) = a_n \cdot \rho^n \cdot e^{ni\theta} + a_{n-1} \cdot \rho^{n-1} \cdot e^{(n-1)i\theta} + \dots + a_1 \cdot \rho \cdot e^{i\theta} + a_0$$

Sæt nu ρ^n udenfor en parentes sådan at

$$p(z) = \rho^n \cdot (a_n \cdot e^{ni\theta} + a_{n-1} \cdot \rho^{-1} \cdot e^{(n-1)i\theta} + \dots + a_1 \cdot \rho^{-n+1} \cdot e^{i\theta} + a_0 \cdot \rho^{-n})$$

Det dominerende led inde i parentesen er klart det første led, fordi alle de andre divideres med en potens af det meget store tal ρ . De komplekse tal $p(z)$, dvs. den lukkede billedkurve S_ρ er derfor tilnærmelsesvist givet ved fremstillingen

$$p(z) = \rho^n \cdot (a_n \cdot e^{ni\theta}) = \rho^n \cdot |a_n| \cdot (\cos(n \cdot \theta + \alpha) + i \cdot \sin(n \cdot \theta + \alpha))$$

(hvor vi har brugt modulus $|a_n|$ og argument α for det komplekse tal a_n) og det udtryk fremstiller en cirkel som faktisk køres igennem i alt n gange når θ gennemløber intervallet $]-\pi, \pi]$ og den omkredser klart punktet $0 = (0, 0)$ som påstået, når blot $a_n \neq 0$ som antaget.

Vi har nu argumenteret for, at $p(z)$ må have mindst én rod, men også allerede antydnet, at der må være præcis n rødder fordi kurven S_ρ ovenfor ender med at gå n gange rundt om 0 sådan at den intuitivt nødvendigvis må gå n gange igennem 0 når ρ vokser fra at være tilstrækkeligt lille til at være tilstrækkeligt stor. Men vi kan også ræsonnere således: Da vi i hvert fald har fundet én rod z_1 for $p(z)$ kan vi dividere $p(z)$ med $z - z_1$. Divisionen giver ikke nogen rest præcis fordi z_1 er rod i $p(z)$. Men det betyder, at $p(z) = (z - z_1) \cdot q(z)$ hvor $q(z)$ nu er et komplekst polynomium af grad $n - 1$ og som derfor, hvis $n - 1 > 0$, selv har mindst én kompleks rod z_2 , således at $p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot w(z)$, hvor $w(z)$ har grad $n - 2$ og derfor en rod z_3 hvis $n - 2 > 0$, etc. Ved udtømming af graden n for $p(z)$ fås på den måde til sidst:

$$p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

Dvs. $p(z)$ har præcis n rødder (med multiplicitet, idet nogle af rødderne kan optræde flere gange i ovenstående faktorisering) som påstået.

Bemærk. Som allerede antydnet er ovennævnte *ikke et fuldgældigt bevis* for AFS. Selvom det er intuitivt klart, at de betragtede kurver S_ρ må gå igennem 0 når ρ vokser fra lille til stor (måske er det endda intuitivt klart, at S_ρ må gå igennem 0 præcis n gange), så har vi ikke *bevist* det! Alle kendte beviser for AFS indeholder et såkaldt topologisk argument, og det er sådan et vi har brug for til at plumbere beviset og til at indse, at intuitionen holder. Problemet er sammenlignelig med Jordan's kurve-sætning, der på samme måde er intuitivt mere eller mindre oplagt, men som alligevel ikke er helt så ligetil at bevise, se https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_curve_theorem

Bemærk. Algebraens fundamentalsætning siger kun noget om *eksistensen* af rødderne. Den siger ikke noget om hvordan man finder dem. For eksempel har vi i kontrast hertil en formel for løsning af andengradsligningen $a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$, nemlig den velkendte løsningsformel til bestemmelse af de to *komplekse rødder*:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

I dette udtryk kan diskriminanten $D = b^2 - 4ac$ jo nu gerne være negativ (typisk jo et komplekst tal), men har, som vi har set tidligere, altid to komplekse kvadratrødder – i formlen er de nu udtrykt på sædvanlig måde som $\pm \sqrt{b^2 - 4ac}$.

Eksempel med illustration af det intuitive argument for AFS

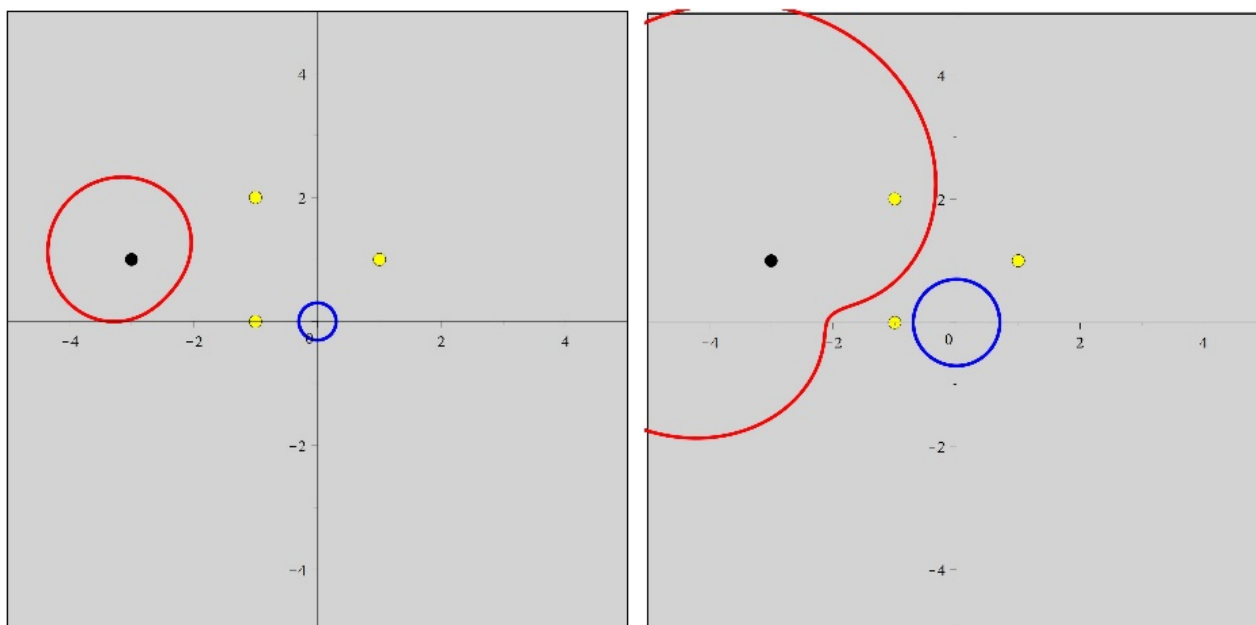
Følgende er eksporteret fra Maple filen AFS.mw, som er vedlagt projektet. Alle figurerne refererer til det intuitive bevis for AFS som er gennemgået ovenfor.

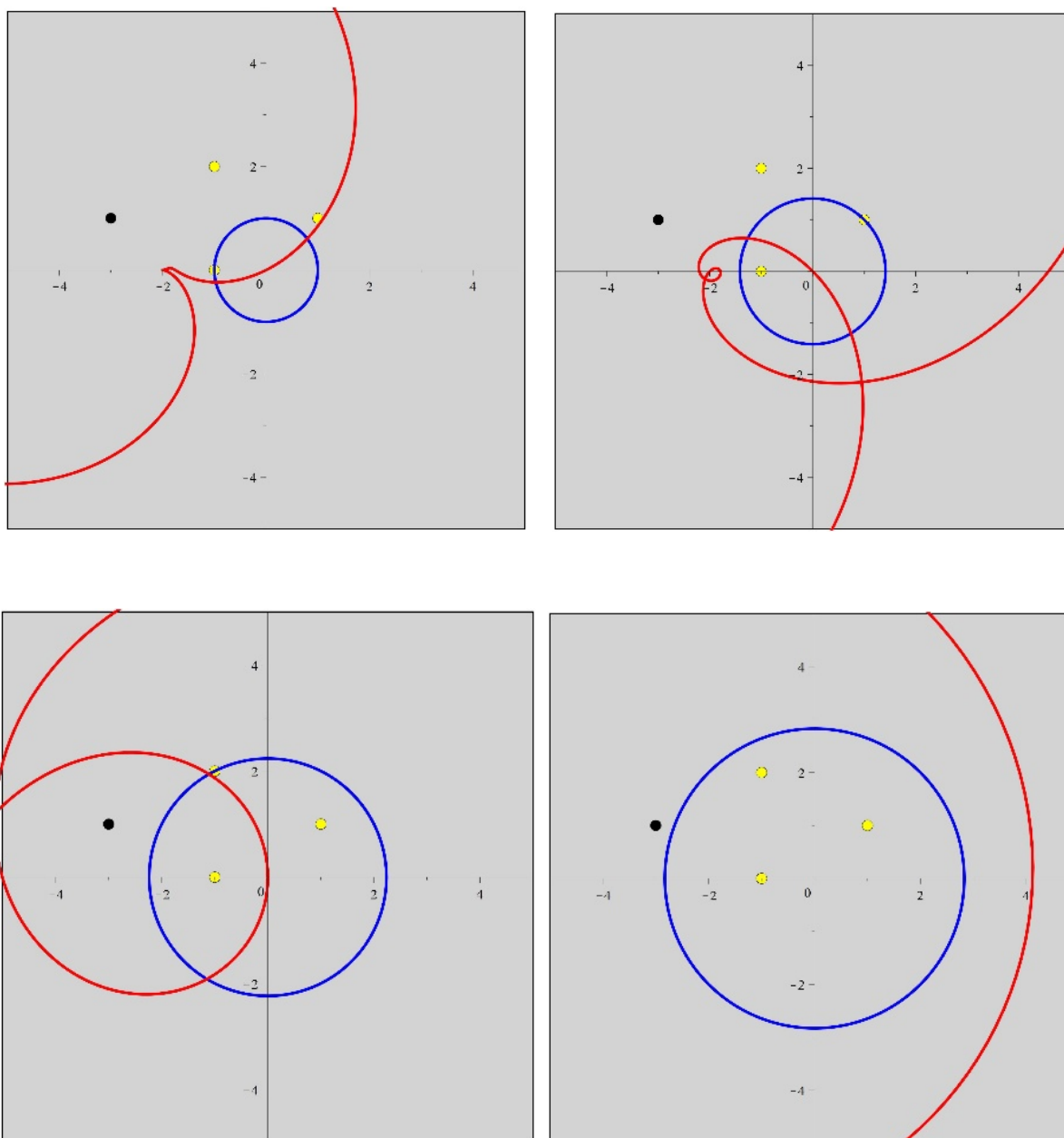
Vi lader $p(z)$ betegne et komplekst polynomium med tre *givne* rødder:

$$p(z) = (z - 1 - i) \cdot (z + 1) \cdot (z + 1 - 2 \cdot i)$$

Vi præsenterer rødder på forhånd for at illustrere hvordan de rammes af S_ρ når C_ρ vokser.

Polynomiet har altså de tre rødder $z_1 = 1 + i = (1, 1)$, $z_2 = -1 = (-1, 0)$ og $z_3 = -1 + 2 \cdot i = (-1, 2)$. De er markeret med gult i figurerne nedenfor. De voksende cirkler C_ρ med voksende radius ρ og centrum i $0 = (0, 0)$ er markeret med blå. De tilhørende lukkede kurver S_ρ er markeret med rødt. Det komplekse tal a_0 er markeret med sort i figurerne.





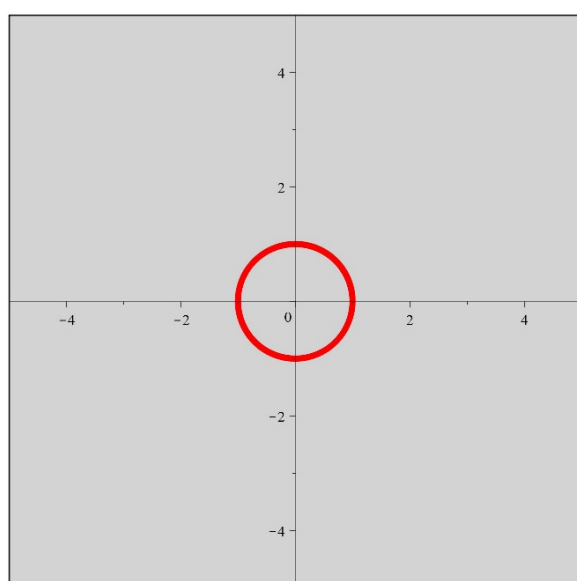
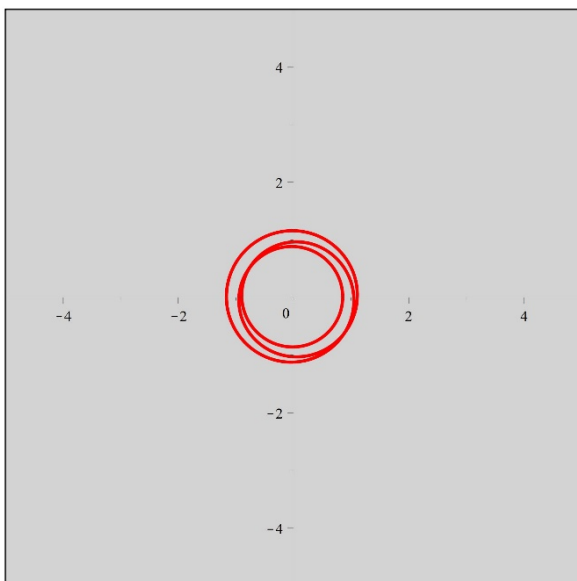
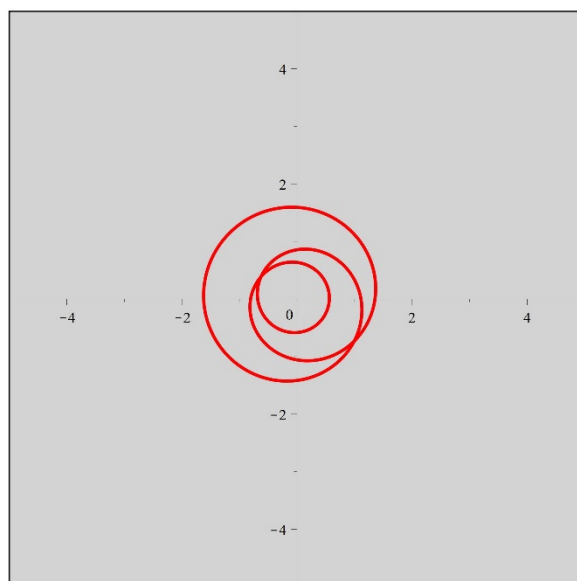
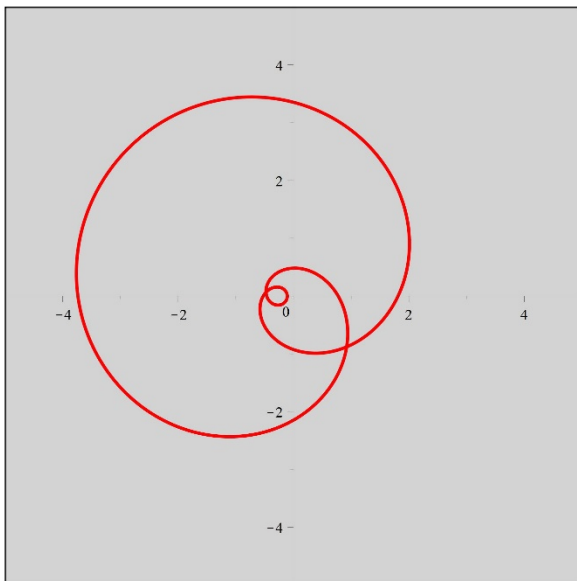
Det ses, at med voksende blå cirkler fås røde billedkurver, der rammer $0 = (0,0)$ netop når den blå cirkel rammer en rod for $p(z)$.

Vi kan tilsvarende illustrere hvordan den røde kurve til sidst, altså for store værdier af ρ , omkredser 0 – i dette tilfælde præcis tre gange. Det gør vi ved at plote parentesen fra udtrykket for $p(z)$ (med de aktuelle værdier for koefficienterne a_j):

$$p(z) = \rho^n \cdot (a_n \cdot e^{ni\theta} + a_{n-1} \cdot \rho^{-1} \cdot e^{(n-1)i\theta} + \dots + a_1 \cdot \rho^{-n+1} \cdot e^{i\theta} + a_0 \cdot \rho^{-n})$$

hvor θ gennemløber intervallet $]-\pi, \pi]$. Dvs. figurerne fremkommer ved at plote de lukkede zoom-out kurver for større og større værdier af ρ :

$$w(z) = a_n \cdot e^{ni\theta} + a_{n-1} \cdot \rho^{-1} \cdot e^{(n-1)i\theta} + \dots + a_1 \cdot \rho^{-n+1} \cdot e^{i\theta} + a_0 \cdot \rho^{-n}$$



Numerisk approksimation af rødderne

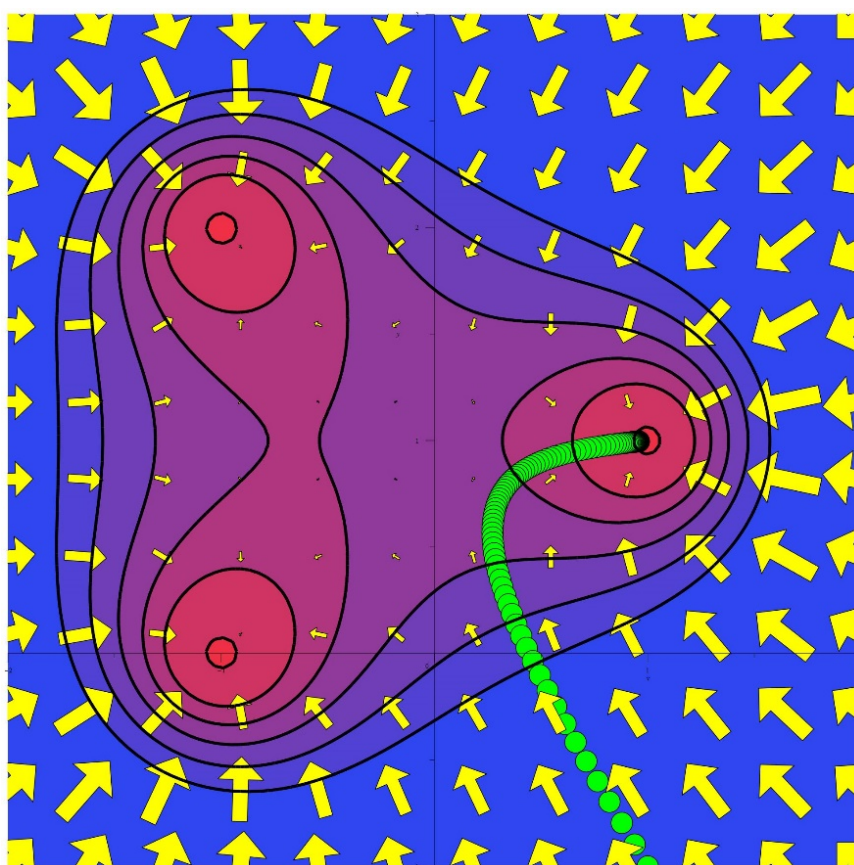
Se videre eksperimenter med gradientmetoden i Maple filen AFS.mw.

Et polynomium $p(z)$ har en kompleks rod $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + i \cdot y_0$ hvis og kun hvis modulus $|p(z_0)| = 0$, altså hvis og kun hvis $|p(z_0)|^2 = 0$. Men $|p(z)|^2$ er en reel funktion af de to reelle variable x og y i $z = x + i \cdot y$. Specifikt, hvis vi bruger notationen $g(x, y)$ og $h(x, y)$ for henholdsvis realdel og imaginærdel af $p(x + i \cdot y)$ får vi:

$$|p(z)|^2 = F(x, y) = g^2(x, y) + h^2(x, y)$$

For at finde rødder i $p(z)$ skal vi altså 'bare' finde alle minimumspunkterne for den reelle funktion $F(x, y)$. Som bekendt findes disse minimumspunkter blandt de stationære punkter for $F(x, y)$ og de stationære punkter findes ved at løse ligningen $\text{grad}(F(x, y)) = (0, 0)$. Det kan dog generelt være en noget vanskelig opgave, dels fordi $F(x, y)$ jo selv er et (ganske vist reelt) polynomium af grad $2n$ og dels fordi der typisk er andre stationære punkter, saddepunkter, end de ønskede minimumspunkter.

En smart metode til at finde vej hen imod et minimumspunkt er at benytte den egenskab ved gradienten, at den modsatte vektor til gradienten, altså $V = -\text{grad}(F(x, y))$ typisk peger i retning af mindre $F(x, y)$ -værdier. Se [Grøn et al., Hvad er Matematik? Bind 3, side 262]. Dvs. ved at 'følge', altså hele tiden gå i retning af, $V = -\text{grad}(F(x, y))$ fra et vilkårligt startpunkt findes typisk et minimumspunkt som illustreret i figuren nedenfor.



Figuren viser niveaukurverne for den funktion $F(x, y)$ som er kvadratet på modulus af det komplekse polynomium, som vi så på ovenfor:

$$p(z) = (z - 1 - i) \cdot (z + 1) \cdot (z + 1 - 2 \cdot i)$$

Funktionen er skrevet eksplicit ud som et 6. gradspolynomium af x og y i den vedlagte Maple fil AFS.mw og gradientfeltet er også beregnet der. Det gule vektorfelt som er vist i figuren er en passende skaleret version af $-\text{grad}(F(x, y))$. Skaleringen sørger for, at man ikke går for hurtigt (og dermed måske forbi nulpunktet) i retning af vektorfeltet. De grønne fodspor i figuren stammer fra en løsningsrute langs vektorfeltet hen imod nulpunktet $(1, 1) = 1 + i$ for $p(z)$ med startpunkt i $(1, -1) = 1 - i$. Se hvordan sporene er konstrueret numerisk i AFS.mw. Med andre valg af startpunkter kan tilsvarende 'ramme' de to andre nulpunkter. Alternativt kan man jo også gentage hele konstruktionen for det reducerede polynomium der fremkommer

ved at dividere $p(z)$ med $z - 1 - i$. Læg mærke til hvordan den grønne løsningskurve er ortogonal på niveaukurverne for $F(x, y)$ langs hele ruten – jf. [B. Grøn et al., Matematik 3, Sætning 7 side 262].

Øvelse 12

- Find de to rødder i $p(z) = z^2 - 2z + 4$.
- Bestem dernæst den reelle funktion af to variable $F(x, y) = |p(z)|^2$.
- Bestem gradienten af $F(x, y)$. Find de stationære punkter for $F(x, y)$ og diskutér hvad de(t) har med rødderne for $p(z)$ at gøre.

Øvelse 13

- Find rødderne i $p(z) = z^2 + z + 1$.
- Bestem den reelle funktion af to reelle variable $F(x, y) = |p(x + i \cdot y)|^2$.
- Find de tre(!) stationære punkter for $F(x, y)$ og diskutér hvad de har med rødderne for $p(z)$ at gøre.

Øvelse 14

Lad $p(z)$ betegne det komplekse polynomium, som vi brugte til illustrationerne ovenfor:

$$p(z) = (z - 1 - i) \cdot (z + 1) \cdot (z - 1 + 2 \cdot i)$$

Find de fem(!) stationære punkter for $F(x, y)$.

Tillæg til teksten

- Tredjegradslikningen i historisk lys. Kapitel 2 fra bogen: Spor - Matematiske eksperimenter. Komplekse tal. Michael Agermose Jensen og Uwe Timm, Forlag Malling Beck (2007).
- Maple fil hørende til ovenstående kapitel om tredjegradslikningen (filnavn: Tredje_grads_ligningen.mw).
- Maple filen AFS.mw