

|||| eNote 28

Gauss' divergenssætning

I denne eNote vil vi bruge flowkurver for vektorfelter til at undersøge hvordan overfladen af et rumligt område deformeres ved flowet og dermed afspejler en tilsvarende ændring i rumfanget af det område, der begrænses af overfladen. Vi får derfor brug for at kende til analysen af vektorfelter fra eNote 24 samt flade- og rum-integraler fra eNote 23. Vi skal se, at divergensen af vektorfeltet er den lokale 'motor' for volumenændring. Hvis vi derfor integrerer divergensen over hele det rumlige område så får vi den totale øjeblikkelige volumen-ekspansion (med fortegn). Hvis vektorfeltet er overalt eksploderende (med positiv divergens) så vokser rumfanget af ethvert rumligt område, hvis vektorfeltet er imploderende alle steder (med negativ divergens) så aftager rumfanget af ethvert rumligt område, der flyder med flowkurverne for vektorfeltet. Alternativt kan man i stedet holde øje med om overfladen af et rumligt område er lokalt ekspanderende udad eller lokalt sammentrækkende indad i forhold til det rumlige område. Det gør vi præcis med det ortogonale fladeintegral af vektorfeltet over overfladen – et integral som også kaldes fluxen.

Dermed har vi to muligheder for at beregne ekspansion eller sammentrækning af et givet rumligt område når det flyder langs flowkurverne for vektorfeltet. Og de giver præcis det samme resultat – det er indholdet af Gauss' divergenssætning.

28.1 Det ortogonale fladeintegral, fluxen

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et glat vektorfelt i rummet, se eNote 24 og lad F_r betegne en glat parametriseret flade:

$$F_r \quad : \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad , \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d] \quad . \quad (28-1)$$

Ligesom ved konstruktionen af kurveintegralerne i eNote 25 har vi s i ethvert punkt p fladen to veldefinerede vektorer, dels vektorfeltets værdi i punktet, $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v))$, og dels normalvektoren $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$ til fladen i punktet. Det er ved hjælp af disse to vektorer vi vil konstruere fluxen af vektorfeltet igennem fladen.

Det ortogonale fladeintegral af $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs en given parametriseret flade $F_{\mathbf{r}}$ – også kaldet fluxen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ igennem $F_{\mathbf{r}}$ – er fladeintegralet af projektionen (med fortegn) af $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v))$ på fladens normal repræsenteret ved den standard enhedsvektor \mathbf{n}_F der er proportional med og i samme retning som krydsproduktet $\mathbf{N}_F(u, v) = \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$.

|||| Definition 28.1 Fluxen af et vektorfelt

Det ortogonale fladeintegral af vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs en parametriseret flade $F_{\mathbf{r}}$, dvs. fluxen af vektorfeltet igennem fladen, er defineret ved

$$\text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) = \int_{F_{\mathbf{r}}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_F d\mu \quad . \quad (28-2)$$

Integranden i det fladeintegral, der giver fluxen, er altså givet ved skalarproduktet

$$f(\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}_F(u, v) \quad , \quad (28-3)$$

hvor $\mathbf{n}_F(u, v)$ er defineret ved

$$\mathbf{n}_F(u, v) = \begin{cases} \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) / \|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)\| & \text{hvis } \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{hvis } \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (28-4)$$

Fluxen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ gennem $F_{\mathbf{r}}$ i retningen \mathbf{n}_F er derfor relativt simpel at udregne - vi behøver ikke først at finde længden af $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$ (jævnfør omformningen af det

tangentielle kurveintegral):

$$\begin{aligned}
 \text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) &= \int_{F_{\mathbf{r}}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_F d\mu \\
 &= \int_c^d \int_a^b (\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}_F(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \\
 &= \int_c^d \int_a^b (\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}_F(u, v)) \|\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)\| du dv \quad (28-5) \\
 &= \int_c^d \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)) du dv \\
 &= \int_c^d \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}_F(u, v) du dv \quad .
 \end{aligned}$$



Bemærk, at den sidste integrand i (28.1.5) er kontinuert og dermed integrabel, selv om det ikke umiddelbart fremgår af definitionen, idet vektorfeltet $\mathbf{n}_F(u, v)$ ikke nødvendigvis er kontinuert - medmindre $\mathbf{r}(u, v)$ er en regulær parameterfremstilling.

Vi har dermed et simpelt direkte udtryk for flux-beregninger:

||| Sætning 28.2 Fluxen, det ortogonale fladeintegral

Det ortogonale fladeintegral af $\mathbf{V}(x, y, z)$ over fladen $F_{\mathbf{r}}$, altså fluxen af $\mathbf{V}(x, y, z)$ igennem $F_{\mathbf{r}}$, beregnes således:

$$\begin{aligned}
 \text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) &= \int_c^d \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)) du dv \\
 &= \int_c^d \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}_F(u, v) du dv \quad .
 \end{aligned} \quad (28-6)$$



Læg mærke til, at hvis en flade $F_{\mathbf{r}}$ parametriseres med en anden parametrisering $\hat{F}_{\hat{\mathbf{r}}}$ som giver den modsat rettede standard enhedsnormalvektor $\mathbf{n}_{\hat{F}}$ i ethvert punkt på fladen: $\mathbf{n}_{\hat{F}}(\hat{u}, \hat{v}) = -\mathbf{n}_F(u, v)$, hvor $\mathbf{r}(u, v) = \hat{\mathbf{r}}(\hat{u}, \hat{v})$, så skifter fluxen fortegn:

$$\text{Flux}(\mathbf{V}, \hat{F}_{\hat{\mathbf{r}}}) = -\text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) \quad . \quad (28-7)$$



Det ortogonale kurveintegral er kort indført som et dualt begreb i forhold til det mere naturlige tangentielle kurveintegral i eNote 25. Det duale begreb i forhold til det ovenfor indførte naturlige ortogonale fladeintegral er det *tangentielle fladeintegral* af et givet vektorfelt over en given flade.

||| Definition 28.3 Det tangentielle fladeintegral

I analogi med det ortogonale fladeintegral, fluxen, definerer vi det *tangentielle fladeintegral*, som vi vil kalde $\text{Tan}(\mathbf{V}, F_r)$ af \mathbf{V} over fladen F_r , ved at projicere $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v))$ vinkelret ind på tangentplanen til F_r (udspændt af $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$ i punktet $\mathbf{r}(u, v)$) og dernæst finde fladeintegralet af længden af denne projektion (som funktion af (u, v)).

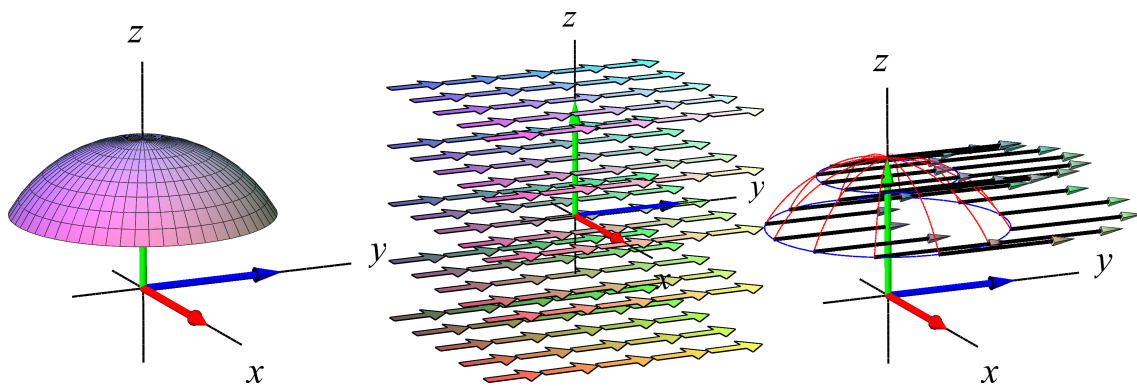


Figure 28.1: Denne kalot af en kugleflade er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u))$, $u \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $v \in [-\pi, \pi]$. Vektorfeltet er givet ved $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, 1, 0)$.

||| Opgave 28.4

Vedrørende figurerne 28.1 og 28.2:

1. Bestem det tangentielle fladeintegral for hver af vektorfelteterne $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, 1, 0)$ og $\mathbf{V}(x, y, z) = (1/\sqrt{5}, 0, -2/\sqrt{5})$ langs kuglekalotten.
2. Bestem de respektive ortogonale fladeintegraler (fluxene) for hver af vektorfelterne igennem kuglekalotten.

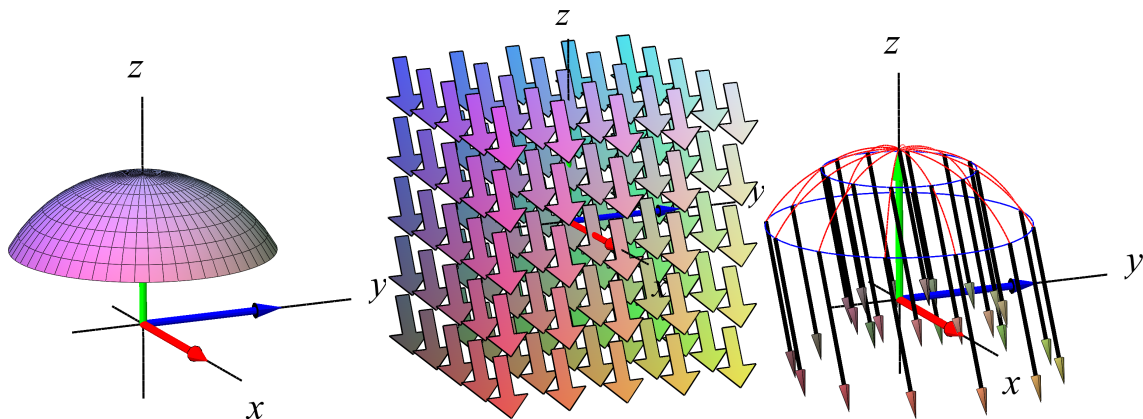


Figure 28.2: Samme kalot som i figur 28.1. Vektorfeltet er her givet ved $\mathbf{V}(x, y, z) = (1, 0, -2)/\sqrt{5}$.

||| Opgave 28.5 En solfanger-opgave

Et solfangertag har form som en del af en cylinder med ligningen $x^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = 1$, nemlig den del, som ligger over (x, y) -planen og er afgrænset af $-1 \leq y \leq 1$ (vi antager som sædvanligt, at (x, y) -planen er vandret og at 'over' betyder $z \geq 0$), se Figur 28.3.

- Lad os – lidt simplificerende – antage, at Solen stråler fra en skyfri himmel ind på solfangertaget til et givet 'tidspunkt' t langs det enhedsvektorfelt i rummet, som til tiden t er parallelt med vektoren $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t) = (0, -\cos(t), -\sin(t))$ hvor $t \in [0, \pi]$.
- Solen står altså op til tiden $t = 0$ og sender lige på det tidspunkt vandrette stråler parallelt med y -aksen i retningen $(0, -1, 0)$. Midt på dagen, til tiden $t = \frac{\pi}{2}$ er strålerne lodrette og parallelle med z -aksen i retningen $(0, 0, -1)$. Til tiden $t = \pi$ går solen ned, men lige før det sker, sender den (næsten) vandrette stråler parallelt med y -aksen i retningen $(0, 1, 0)$.
- Den energi solfangeren optager pr. arealenhed og pr. tidsenhed på et givet sted antages at være lig med skalarproduktet $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ mellem Solstråle-vektorfeltet \mathbf{V} og tagfladens *indadrettede* enhedsnormalvektor \mathbf{n} på stedet. Bemærk, at det indadrettede normalfelt \mathbf{n} ikke nødvendigvis er lig med \mathbf{n}_F , som jo afhænger af den valgte parametrisering af taget.
- Spørgsmål A:
 1. Begrund antagelsen om, at energioptaget er lig med skalarproduktet $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, og bemærk, at energioptag selvsagt kun kan finde sted hvor omtalte skalarprodukt er positiv.

2. Hvad er solfangerens energioptag pr. tidsenhed på et givet tidspunkt, t , på dagen?
 3. Hvad er solfangerens totale energioptag på 'en dag'?
- Spørgsmål B: Antag at vi drejer det cylindriske tag $\pi/2$ mod uret (eller med) omkring z -aksen.
 1. Hvad er denne drejede solfangers energioptag pr. tidsenhed på et givet tidspunkt, t , på dagen?
 2. Hvad er den drejede solfangers totale energioptag på 'en dag'?
 - Spørgsmål C: Antag at vi drejer det oprindelige cylindriske tag fra spørgsmål A vinklen θ mod uret (eller med) omkring z -aksen, hvor $\theta \in [0, \pi/2]$.
 1. Hvilke(t) af disse solfangertage giver det største totale energioptag pr. dag?

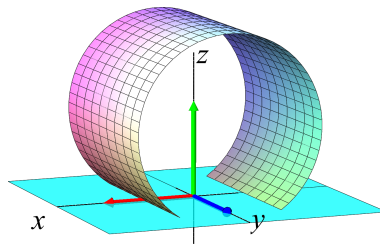


Figure 28.3: Det solfangertag der benyttes i opgave 28.5.

28.2 Motivering af fluxen via flow-ekspansion

Integralkurverne, flowkurverne, for et givet vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ kan benyttes til at 'skubbe' en given flade F_r i retning af vektorfeltet og med en lokal fart, der er givet ved længden af vektorfeltet i ethvert punkt. Med andre ord: ethvert punkt på fladen flyder en given tid langs vektorfeltets flowkurver.

Derved gennemløber fladen – fladen 'fejer' igennem – et rumligt område $\Omega_r(t)$ som til ethvert tidspunkt t (den tid vi lader fladen flyde langs vektorfeltet) har et rumfang $\text{Vol}_\pm(\Omega_r(t)) = \text{Vol}_\pm(t)$. Det rumfang er klart 0 for $t = 0$ og derefter er det lille, hvis vektorfeltet er næsten tangentielt til fladen og stort hvis vektorfeltet er vinkelret på fladen i samme retning som standard-normalvektorfeltet på fladen. Hvis vektorfeltet peger i modsat retning af standard-normalvektorfeltet vil vi regne de tilsvarende lokale bidrag

til rumfanget negativt – derfor betegnelsen $\text{Vol}_{\pm}(\Omega_{\mathbf{r}}(t))$.

Se figurerne 28.4, 28.5, og 28.7 samt eksemplerne 28.7 og 28.8 hvor det illustreres hvordan Jacobifunktionen (uden numerisk tegn) kan benyttes til beregning af de lokale bidrag til rumfanget (med fortegn).

Der gælder følgende fundamentale sammenhæng mellem fluxen og den afledede af volumen-funktionen til tiden $t = 0$:

|||| Sætning 28.6 Fluxen som volumen-differentialkvotient ved flade-flow

Lad $\Omega_{\mathbf{r}}(t)$ betegne det rumlige område, der fejes igennem når fladestykket $F_{\mathbf{r}}$ flyder tiden t med flowkurverne gennem fladens punkter. Så gælder følgende sammenhæng, hvor $\text{Vol}_{\pm}(\Omega_{\mathbf{r}}(t))$ betegner det med fortegn beregnede volumen af området, dvs. i forhold til den valgte standard normalvektor $\mathbf{n}_F(u, v)$ for $F_{\mathbf{r}}$.

$$\text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) = \left. \frac{d}{dt} \text{Vol}_{\pm}(\Omega_{\mathbf{r}}(t)) \right|_{t=0} = \text{Vol}'_{\pm}(0) \quad . \quad (28-8)$$



Det er den egenskab (i sætning 28.6), der motiverer *betegnelsen* flux: Lokalt er fluxen et ml for den (med fortegn regnede) volumen-vækst-rate, der øjeblikkeligt genereres ved flowet af fladen langs vektorfeltets integralkurver igennem fladens punkter. Fortegnet er positivt hvor vektorfeltet danner en spids vinkel med standard normalvektorfeltet $\mathbf{n}_F(u, v)$, og negativt hvor vinklen er stump. Se figurerne 28.7 og 28.4.

|||| Bevis

Vi antager som vanligt, at fladen $F_{\mathbf{r}}$ er givet ved en glat parameterfremstilling:

$$F_{\mathbf{r}} \quad : \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad , \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d] \quad . \quad (28-9)$$

Flowkurven for $\mathbf{V}(x, y, z)$ igennem flade-punktet $\mathbf{r}(u, v)$ vil vi kalde $\tilde{\mathbf{r}}(u, v, t)$. Det område $\Omega_{F_{\mathbf{r}}}(t)$ i rummet, som fejes ud af fladen ved at den flyder med flowkurverne indtil tiden t er derfor givet ved parameterfremstillingen:

$$\Omega_{F_{\mathbf{r}}}(t) \quad : \quad \tilde{\mathbf{r}}(u, v, w) \quad , \quad w \in [0, t] \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad . \quad (28-10)$$

Til bestemmelse af rumfanget (med fortegn) af dette område benytter vi Taylor's grænseformel til første orden med udviklingspunkt $w = 0$ for hver af de glatte vektorfunktioner $\tilde{\mathbf{r}}'_u(u, v, w)$, $\tilde{\mathbf{r}}'_v(u, v, w)$, og $\tilde{\mathbf{r}}'_w(u, v, w)$ betragtet som funktioner af w for ethvert fastholdt (u, v) :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}'_u(u, v, w) &= \tilde{\mathbf{r}}'_u(u, v, 0) + \varepsilon_{(u,v)}(w) = \mathbf{r}'_u(u, v) + \varepsilon_{(u,v)}(w) \\ \tilde{\mathbf{r}}'_v(u, v, w) &= \tilde{\mathbf{r}}'_v(u, v, 0) + \varepsilon_{(u,v)}(w) = \mathbf{r}'_v(u, v) + \varepsilon_{(u,v)}(w) \\ \tilde{\mathbf{r}}'_w(u, v, w) &= \tilde{\mathbf{r}}'_w(u, v, 0) + \varepsilon_{(u,v)}(w) = \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) + \varepsilon_{(u,v)}(w) \quad ,\end{aligned}\tag{28-11}$$

sådan at Jacobifunktionen for volumen-beregningen – med fortegn – ser således ud:

$$\begin{aligned}\text{Jacobi}_{\tilde{\mathbf{r}}}(u, v, w) &= (\tilde{\mathbf{r}}'_u(u, v, w) \times \tilde{\mathbf{r}}'_v(u, v, w)) \cdot \tilde{\mathbf{r}}'_w(u, v, w) \\ &= (\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) + \varepsilon_{(u,v)}(w) \\ &= \mathbf{N}_F(u, v) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) + \varepsilon_{(u,v)}(w) \quad .\end{aligned}\tag{28-12}$$

Vi ser her, at når w går imod 0 opnår vi præcis det ønskede fortegn på Jacobifunktionen, som jo er det lokale bidrag (integranden) til rumfangsberegningen : Jacobifunktionen er positiv tæt ved fladen når vektorfeltet $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v))$ på fladen peger i samme retning som standard normalvektoren $\mathbf{N}_F(u, v)$, og Jacobifunktionen er negativ tæt ved fladen når vektorfeltet $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v))$ på fladen peger i modsatte retning som standard normalvektoren $\mathbf{N}_F(u, v)$.

Det med fortegn regnede rumfang $\text{Vol}_{\pm}(\Omega_{\mathbf{r}}(t))$ er nu for tilstrækkeligt små flow-tider t givet ved:

$$\begin{aligned}\text{Vol}_{\pm}(\Omega_{\mathbf{r}}(t)) &= \int_0^t \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\tilde{\mathbf{r}}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw \\ &= \int_0^t \int_c^d \int_a^b \left(\mathbf{N}_F(u, v) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) + \varepsilon_{(u,v)}(w) \right) \, du \, dv \, dw \\ &= \int_0^t \left(\left(\int_c^d \int_a^b \mathbf{N}_F(u, v) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \, du \, dv \right) + \left(\int_c^d \int_a^b \varepsilon_{(u,v)}(w) \, du \, dv \right) \right) \, dw \\ &= \int_0^t \text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) \, dw + \int_0^t \varepsilon_{(u,v)}(w) \, dw \quad ,\end{aligned}\tag{28-13}$$

hvoraf vi aflæser:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}_{\pm}(\Omega_{\mathbf{r}}(t)) = \text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) + \varepsilon(t)\tag{28-14}$$

og dermed

$$\text{Vol}'_{\pm}(0) = \text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) \quad .\tag{28-15}$$

■

||| Eksempel 28.7 Flow af cirkelskive ved parallelforskydning

Vi ser på en cirkelskive F_r i (x, y) -planen. Skiven har radius 1 og centrum i $(0, 0, 0)$:

$$F_r : \mathbf{r}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 0) \quad , \quad (u, v) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi] \quad . \quad (28-16)$$

Standard normalvektoren til cirkelskiven er givet ved parametriseringen:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_F(u, v) &= \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \\ &= (\cos(v), \sin(v), 0) \times (-u \cdot \sin(v), u \cdot \cos(v), 0) \\ &= (0, 0, u) \quad . \end{aligned} \quad (28-17)$$

Cirkelskivens enhedsnormalvektorfelt med denne parametrisering er den konstante vektor:

$$\mathbf{n}_F = (0, 0, 1) \quad . \quad (28-18)$$

Lad nu $\mathbf{V}(x, y, z)$ betegne vektorfeltet:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma) \quad , \quad (28-19)$$

hvor α , β , og γ er konstanter. Så er i dette tilfælde:

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\mathbf{V}, F_r) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}_F(u, v) \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (0, 0, u) \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 u \cdot \gamma \, du \, dv \\ &= \gamma \cdot \pi \quad , \end{aligned} \quad (28-20)$$

Bemærk, at fluxen er negativ for $\gamma < 0$ og positiv for $\gamma > 0$, altså i afhængighed af, om vektorfeltet peger i cirkelskivens standard normalvektor-retning eller i den modsatte retning.

Vi vil nu tilsvarende bestemme rumfanget af det rumlige område, som flowet af cirkelskiven 'fejer igennem' ved at følge integralkurverne, og dermed illustrere indholdet i – og bevise for – sætning 28.6:

Flowkurven $\bar{\mathbf{r}}(u, v, t)$ for $\mathbf{V}(x, y, z)$ igennem punktet $\mathbf{r}(u, v)$ er en ret linje igennem punktet, nemlig den der har den konstante tangentvektor (α, β, γ) :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}(u, v, t) &= \mathbf{r}(u, v) + t \cdot (\alpha, \beta, \gamma) \\ &= (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 0) + t \cdot (\alpha, \beta, \gamma) \quad , \quad t \in [0, \infty[\quad . \end{aligned} \quad (28-21)$$

Det ses, at

$$\bar{\mathbf{r}}'_t(u, v, t) = (\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{V}(\bar{\mathbf{r}}(u, v, t)) \quad , \quad (28-22)$$

sådan at integralkurve-betingelsen netop er opfyldt.

Det rumlige område $\Omega_{F_t}(t)$, som cirkelskiven danner ved at flyde med flowkurverne for $\mathbf{V}(x, y, z)$ indtil tiden t , er dermed givet ved en parameterfremstilling, som direkte aflæses af flow-kurve parameterfremstillingen igennem punkterne på fladen:

$$\Omega_{F_t}(t) \quad : \quad \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(u, v, w) \quad , \quad w \in [0, t] \quad , \quad (u, v) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi] \quad . \quad (28-23)$$

Rumfanget af dette område kan findes ved hjælp af standardmetoden via Jacobifunktionen, som vi her benytter *med fortegn* for at bestemme rumfanget *med fortegn* i forhold til normalvektoren:

$$\begin{aligned} \text{Jacobi}_{\bar{\mathbf{r}}}(u, v, w) &= (\bar{\mathbf{r}}_u(u, v, w) \times \bar{\mathbf{r}}_v(u, v, w)) \cdot \bar{\mathbf{r}}_w(u, v, w) \\ &= \mathbf{N}_F(u, v) \cdot \bar{\mathbf{r}}_w(u, v, w) \\ &= (\cos(v), \sin(v), 0) \times (-u \cdot \sin(v), u \cdot \cos(v), 0) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) \\ &= (0, 0, u) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) \\ &= u \cdot \gamma \quad , \end{aligned} \quad (28-24)$$

hvor vi har benyttet, at der i dette simple konkrete tilfælde, hvor vektorfeltet paralleltransporterer cirkelskiven i vektorfeltets retning gælder: $(\bar{\mathbf{r}}_u(u, v, w) \times \bar{\mathbf{r}}_v(u, v, w)) = \mathbf{N}_F(u, v)$ som er uafhængig af w . Rumfanget *med fortegn* af $\Omega_{F_t}(t)$ i forhold til cirkelskivens normalvektorfelt $(0, 0, 1)$ er derfor

$$\text{Vol}_{\pm}(t) = \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 u \cdot \gamma \, du \, dv \, dw = t \cdot \gamma \cdot \pi \quad . \quad (28-25)$$

Heraf får vi

$$\text{Vol}'_{\pm}(0) = \gamma \cdot \pi \quad , \quad (28-26)$$

altså den samme værdi som den ovenfor fundne $\text{Flux}(\mathbf{V}, F_t)$. Vi har dermed verificeret sætningen 28.6.

Hvis vektorfeltet (α, β, γ) er i samme retning som standard normalen til fladen (dvs. hvis $\gamma > 0$), så er både fluxen, rumfanget $\text{Vol}_{\pm}(t)$, og volumen-differentialkvotienten $\text{Vol}'_{\pm}(0)$ positiv; hvis vektorfeltet (α, β, γ) er i modsatte retning i forhold til standard normalen (dvs. hvis $\gamma < 0$), så er både fluxen, rumfanget (med fortegn) $\text{Vol}_{\pm}(t)$, og volumen-differentialkvotienten $\text{Vol}'_{\pm}(0)$ negativ.

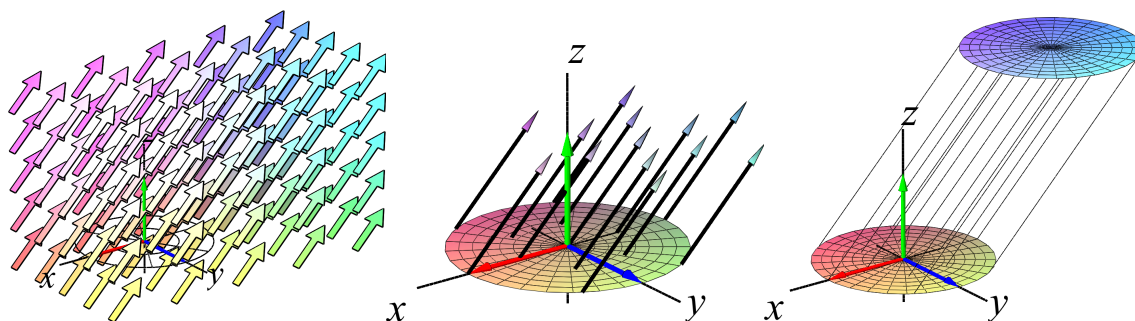


Figure 28.4: Et simpelt, konstant vektorfelt, og tilsvarende kort-tids flow af en cirkelskive. I forhold til cirkelskivenormalen $(0, 0, 1)$ er fluxen og volumen-tilvæksten positiv.

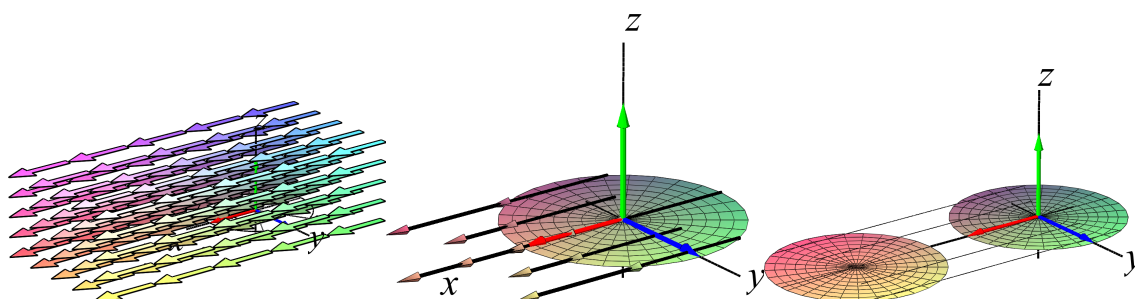


Figure 28.5: Et simpelt, konstant vektorfelt, og tilsvarende kort-tids flow af en cirkelskive. Fluxen og volumen-tilvæksten er 0.

||| Eksempel 28.8 Flow af cirkelskive ved rotation

Vi ser som i eksempel 28.7 p cirkelskiven F_r i (x, y) -planen. Skiven har radius 1 og centrum i $(0, 0, 0)$:

$$F_r : \mathbf{r}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 0) \quad , \quad (u, v) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi] \quad . \quad (28-27)$$

Vi vil her lade cirkelskiven flyde med flowkurverne for følgende roterende vektorfelt:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (-z, 0, x) \quad . \quad (28-28)$$

Flowkurven $\tilde{\mathbf{r}}(u, v, t) = (x(t), y(t), z(t))$ for dette vektorfelt igennem et cirkelskive-punkt $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u, v)$ er givet som løsning til første-ordens differentia ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = (\mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)))^\top = \begin{bmatrix} -z(t) \\ 0 \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (28-29)$$

med begyndelsesbetingelsen $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u, v)$. Det koblede differentialsystem har de generelle løsninger, se løsningsmetoderne i eNote 12:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cdot \cos(t) - c_3 \cdot \sin(t) \\ c_2 \\ c_1 \cdot \sin(t) + c_3 \cdot \cos(t) \end{bmatrix} \quad (28-30)$$

hvor c_1 , c_2 , og c_3 er arbitrære konstanter. De specielle løsninger, flowkurverne $\tilde{\mathbf{r}}(u, v, t)$ igennem cirkelskivepunkterne $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 0)$ er så givet ved følgende parametriserede cirkler i rummet:

$$(\tilde{\mathbf{r}}(u, v, t))^T = \begin{bmatrix} x_0 \cdot \cos(t) - z_0 \cdot \sin(t) \\ y_0 \\ x_0 \cdot \sin(t) + y_0 \cdot \cos(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cdot \cos(v) \cdot \cos(t) \\ u \cdot \sin(v) \\ u \cdot \cos(v) \cdot \sin(t) \end{bmatrix} . \quad (28-31)$$

Det udfejdede rumlige område $\Omega_{F_r}(t)$ er dermed allerede parametriseret:

$$\Omega_{F_r}(t) \quad : \quad \tilde{\mathbf{r}}(u, v, w) = (u \cdot \cos(v) \cdot \cos(w), u \cdot \sin(v), u \cdot \cos(v) \cdot \sin(w)) \quad , \quad (28-32)$$

hvor $w \in [0, t]$, $u \in [0, 1]$, og $v \in [-\pi, \pi]$. Se figur 28.6.

Fluxen af vektorfeltet igennem cirkelskiven forventes at være 0 fordi det område, som cirkelskiven fejer igennem ved rotationen har rumfang 0 når rumfanget regnes med fortegn: Den ene halvdel af området ses jo at ligge *over cirkelskiven* (i retning af $(0, 0, 1)$) og den anden halvdel ligger *under cirkelskiven* (i retning af $(0, 0, -1)$); de to halvdele af det udfejdede område har rumfang med modsatte fortegn og de ophæver derfor hinanden. Vi beregner fluxen af vektorfeltet igennem cirkelskiven:

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\mathbf{V}, F_r) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}_F(u, v) \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (0, 0, u \cdot \cos(v)) \cdot (0, 0, u) \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 u^2 \cdot \cos(v) \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3} \cdot \cos(v) \, dv \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(v) \, dv \\ &= \frac{1}{3} \cdot [\sin(v)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (28-33)$$

Med henblik på igen at illustrere den generelle rumfangsberegning (med fortegn) og igen verificere sætning 28.6 med konkrete udregninger, vil vi vise, at det med fortegn beregnede

rumfang af området $\Omega_{F_r}(t)$ som fejles ud af cirkelskiven ved flowet virkelig er 0. Den med fortegn beregnede Jacobifunktion er bestemt ved:

$$\text{Jacobi}_{F_r}(u, v, w) = u^2 \cdot \cos(v) \quad . \quad (28-34)$$

sådan at det fortegnsvægtede volumen af $\Omega_{F_r}(t)$ er:

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{\pm}(\Omega_{F_r}(t)) &= \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 u^2 \cdot \cos(v) \, du \, dv \, dw \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \cos(v) \, dv \, dw \\ &= \frac{1}{3} \cdot t \cdot [\sin(v)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (28-35)$$

Bemærk, at det ordinære rumfang $\text{Vol}(\Omega_{F_r}(t))$ af $\Omega_{F_r}(t)$ selvfølgelig ikke er 0, men derimod:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega_{F_r}(t)) &= \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 u^2 \cdot |\cos(v)| \, du \, dv \, dw \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(v)| \, dv \, dw \\ &= \frac{1}{3} \cdot t \cdot 4 \cdot [\sin(v)]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4}{3} \cdot t \quad . \end{aligned} \quad (28-36)$$

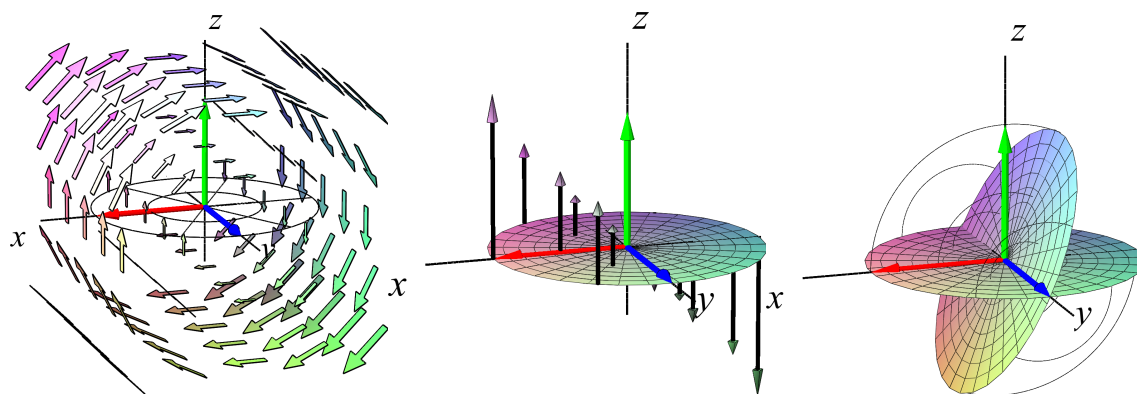


Figure 28.6: Et roterende vektorfelt og tilsvarende kort-tids flow af en cirkelskive. Fluxen og volumen-tilvæksten er 0.

||| Eksempel 28.9 Flux gennem en elliptisk paraboloid

Et vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ og en elliptisk paraboloid F_r er givet ved henholdsvis

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(2 \cdot u \cdot \cos(v), 2 \cdot u \cdot \sin(v), 2 \cdot u^2 \cdot (\cos^2(v) + \frac{1}{9} \cdot \sin^2(v)) \right), \quad (28-37)$$

hvor $(u, v) \in [0, 1/2] \times [-\pi, \pi]$, og $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 1)$.

Til bestemmelse af fluxen $\text{Flux}(\mathbf{V}, F_r)$ af $\mathbf{V}(x, y, z)$ gennem F_r har vi

$$\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = \left(-8 \cdot u^2 \cdot \cos(v), -\frac{8}{9} \cdot u^2 \cdot \sin(v), 4 \cdot u \right) \quad (28-38)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) = (-2 \cdot u \cdot \sin(v), 2 \cdot u \cdot \cos(v), 1) \quad (28-39)$$

sådan at:

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\mathbf{V}, F_r) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1/2} \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)) \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1/2} \frac{4}{9} \cdot u \cdot (32 \cdot u^2 \cdot \cos(v) \cdot \sin(v) + 9) \, du \, dv \\ &= \dots \\ &= \pi \end{aligned} \quad (28-40)$$

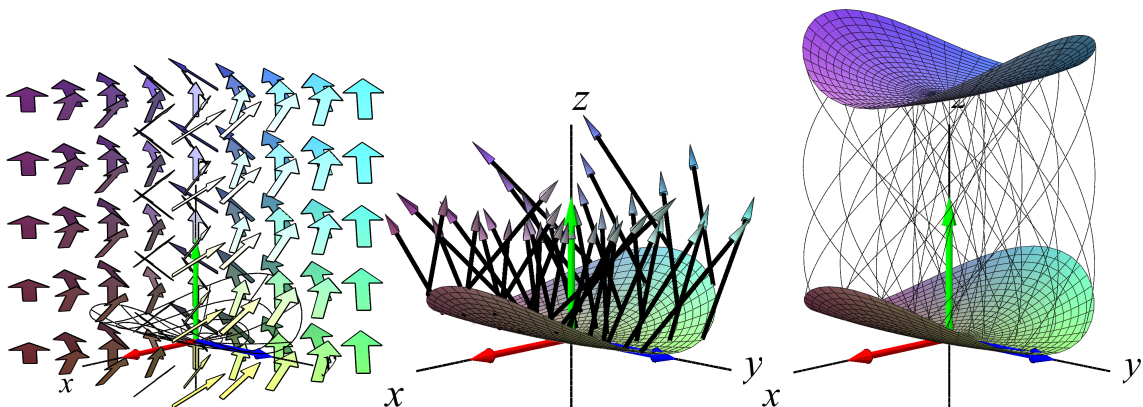


Figure 28.7: Et roterende vektorfelt, og tilsvarende kort-tids flow af en elliptisk paraboloid. I forhold til cirkelskivenormalen er fluxen og volumen-tilvæksten positiv. Se eksempel 28.9.

Som vi skal se i næste afsnit er den totale flux af et givet vektorfelt gennem *overfladen* af et givet rumligt område Ω_r særlig interessant. Overfladen kan gerne være sammensat af endeligt mange glatte fladestykker, som f.eks. overfladen af et polyeder. Den eneste konvention vi skal holde os for øje er, at det altid er den *udadrettede normal* (i forhold til det rumlige område) vi skal benytte overalt på overfladen, når vi beregner fluxen.

||| Eksempel 28.10 Flux gennem overfladen af en massiv cylinder

Vi vil illustrere fluxberegningen gennem en total-overflade af et rumligt område ved at beregne fluxen af det simple vektorfelt

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (f(x), 0, 0) \quad , \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad (28-41)$$

hvor $f(x)$ er en glat funktion af x . Vi vælger også et meget simpelt område Ω i rummet, nemlig den massive cylinder med radius $1/2$ og x -aksen som symmetriakse samt tilhørende x -interval $x \in [0, 1]$. Se figur 28.8.

Overfladen, randen, af cylinderen, som vi vil betegne med $F = \partial\Omega$, består af 3 dele: Dels den cylindriske krumme overflade og dels de to ende-cirkelskiver. Da vektorfeltet er parallelt med den cylindriske krumme del af overfladen vil der ikke være noget fluxbidrag derfra (!). Det vil sige, de eneste bidrag til fluxen gennem total-overfladen af den massive cylinder stammer fra de to endecirkelskiver.

Da vektorfeltet er vinkelret på begge disse skiver er fluxen gennem cirkel-endeskenen ved $x = 0$ givet ved: $-f(0) \cdot \frac{\pi}{4}$, idet den udadrettede enhedsnormal for den cirkelskive er $(-1, 0, 0)$ og fluxen gennem cirkel-endeskenen ved $x = 1$ er tilsvarende givet ved: $f(1) \cdot \frac{\pi}{4}$, idet enhedsnormalen der er $(1, 0, 0)$.

Den totale flux af $\mathbf{V}(x, y, z)$ ud gennem overfladen $\partial\Omega$ af den massive cylinder er derfor:

$$\text{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega) = (f(1) - f(0)) \cdot \frac{\pi}{4} \quad . \quad (28-42)$$

Det vil sige: Hvis $f(x)$ (og dermed vektorfeltet) er større ved $x = 0$ end ved $x = 1$, så er den totale flux *ud* gennem cylinderoverfladen negativ.

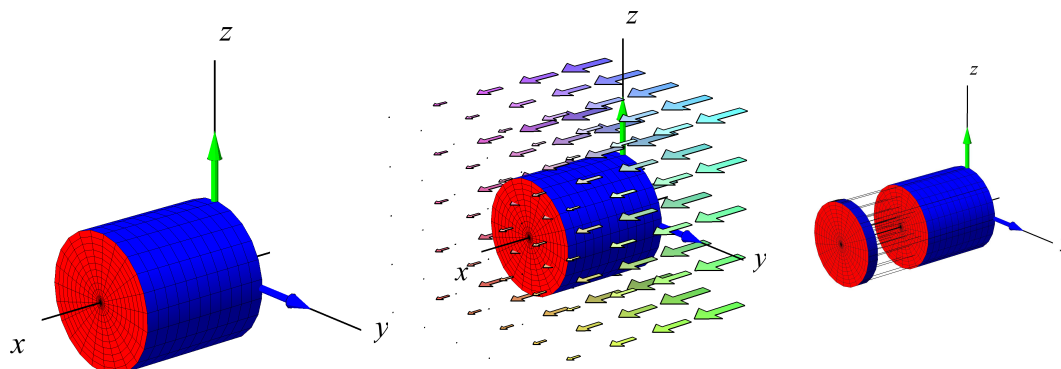


Figure 28.8: Et vektorfelt som er parallelt med x -aksen og et billede efter lidt længere tids flow. Efter meget lang tid bliver hele cylinderen mast sammen til en cirkelskive ved $x = 2$. Se eksempel 28.10.

Fluxen gennem de to endeskiver på cylinderen i figur 28.8 afhænger af vektorfeltets værdi i disse endepunkter – se eksempel 28.10. Da rumfanget af cylinderen antydes at blive mindre ved flowet giver den inspektion en formodning om, at den totale flux *ud* gennem de to endeskiver er negativ. Det er i fuld overensstemmelse med, at vektorfeltet i det viste tilfælde er $\mathbf{V}(x, y, z) = (f(x), 0, 0) = (2 - x, 0, 0)$, som i henhold til beregningen i eksempel 28.10 giver den totale flux:



$$\text{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega) = (1 - 2) \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \quad . \quad (28-43)$$

Det vil sige at der er større rumfang-deformation *ind* i cylinderen ved $x = 0$ end der er rumfang-deformation *ud* af cylinderen ved $x = 1$. Den tidsafledede af rumfanget ved flowet er negativ, således at cylinderen netop bliver mindre når alle punkter følger med deres respektive flowkurver. Det gælder faktisk i dette tilfælde ikke bare for små t -værdier men for alle $t > 0$, således at cylinderen bliver helt kollapsed og trykket totalt sammen til en flad cirkelskive ved $x = 2$ til tiden $t = \infty$.

28.3 Motivering af divergensen via flow-ekspansion

Lad os betragte en massiv kugle K_ρ i rummet med radius ρ og centrum i $(0, 0, 0)$ og lad os udvide denne kugle ved at lade alle punkterne i den flyde med flowkurverne for eksplosionsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$.

Den massive kugle har parameterfremstillingen:

$$K_\rho \quad : \quad \mathbf{r}(u, v, w) = (u \cdot \sin(v) \cdot \cos(w), u \cdot \sin(v) \cdot \sin(w), u \cdot \cos(v)) \quad , \quad (28-44)$$

hvor $(u, v, w) \in [0, \rho] \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Ifølge flow-løsningerne til dette eksplosionsvektorfelt vokser radius af kuglen med faktoren e^T , hvor T er flow-tiden. Det ser vi på følgende måde:

De generelle flow-kurver for vektorfeltet findes jo ved at løse differentialligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = (\mathbf{V}(x(t), y(t), z(t)))^\top = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad . \quad (28-45)$$

Den generelle løsning er her:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cdot e^t \\ c_2 \cdot e^t \\ c_3 \cdot e^t \end{bmatrix} \quad (28-46)$$

hvor c_1, c_2 , og c_3 er arbitrære konstanter.

De specielle løsninger, flowkurverne $\tilde{\mathbf{r}}(u, v, w, t)$ igennem kuglepunkterne $(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u, v, w) = (u \cdot \sin(v) \cdot \cos(w), u \cdot \sin(v) \cdot \sin(w), u \cdot \cos(v))$ er så givet ved følgende parametriserede linjer i rummet:

$$(\tilde{\mathbf{r}}(u, v, w, t))^\top = \begin{bmatrix} x_0 \cdot e^t \\ y_0 \cdot e^t \\ z_0 \cdot e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \cdot (u \cdot \sin(v) \cdot \cos(w)) \\ e^t \cdot (u \cdot \sin(v) \cdot \sin(w)) \\ e^t \cdot (u \cdot \cos(v)) \end{bmatrix} \quad . \quad (28-47)$$

Disse linjer og deres parametriseringer giver flow-kurven igennem *ethvert* punkt i den massive kugle.

Det rumlige område $\Omega_{F_r}(t)$ som efter tiden t er *tilføjet* den massive kugle, er dermed allerede parametriseret: Vi skal blot sætte $u = \rho$ i ovenstående flowlinje-parametriseringer. Det vil sige, vi finder igen ud af, hvordan flowet af kuglens overflade bidrager til volumenforøgelsen (regnet med fortegn):

$$\Omega_{F_r}(T) \quad : \quad \tilde{\mathbf{r}}(\rho, v, w, t) = e^t \cdot \rho \cdot (\cos(v) \cdot \cos(w), \sin(v), \cos(v) \cdot \sin(w)) \quad , \quad (28-48)$$

hvor $t \in [0, T]$, $v \in [0, \pi]$, og $w \in [-\pi, \pi]$. Det ses, at $\tilde{\mathbf{r}}(\rho, v, w, T)$ er en parameterfremstilling for den eksploderende kugles overflade efter tiden T , og at det er en kugleflade

med radius $e^T \cdot \rho$. Ved at flyde med flowkurverne for eksplosionsvektorfeltet udvider den oprindelige kugle (med radius ρ til tiden $t = 0$) sig til en kugle, der har radius $e^T \cdot \rho$ som påstået.



Rumfanget af den eksploderende kugle til tiden T er *summen* af de to rumfang $\text{Vol}_{\pm}(\Omega_{F_r}(T))$ og $\text{Vol}(K_{\rho})$. Det førstnævnte rumfang er det med fortegn regnede volumen af det område, som kuglens *overflade* fejer igennem i løbet af tiden T .

Volumenet af kuglen som funktion af flow-tiden t er dermed givet ved: $\text{Vol}(\Omega_{F_r}(t)) + \text{Vol}(K_{\rho}) = \text{Vol}(t) = (4\pi/3)\rho^3 e^{3t}$. Volumenet af kuglen vokser derfor (til tiden $t = 0$) med differentialkvotienten

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(t)|_{t=0} = 4\pi\rho^3 \quad . \quad (28-49)$$

Denne vækst i volumen har vi essentielt fundet ved at holde øje med udvidelsen af den massive kugles *overflade* ∂K_{ρ} når alle kuglens punkter flyder langs med vektorfeltets flowkurver – præcis som vi har dyrket i første halvdel af denne eNote.

Intuitivt har vi derfra, at hvis skalarproduktet imellem vektorfeltet \mathbf{V} og den *udadrettede* enhedsnormalvektor \mathbf{n} et sted på overfladen er stor, så vil det lokale bidrag til volumenforøgelse derfra tilsvarende være stor, fordi overfladen på det sted skubbes hurtigt udad når den flyder med flowkurverne for vektorfeltet.

Dette kan selvfølgelig modsvares af at skalarproduktet andre steder på overfladen er negativt, således at fladen skubbes indad på de steder.

Kort sagt ser vi igen, at den totale udadrettede flux af vektorfeltet igennem overfladen af det rumlige område giver (den med fortegn regnede) volumenforøgelse.

Den tilsvarende udvidelse af sætning 28.6 er derfor:

||| Sætning 28.11 Total flux ud gennem overflade af rumligt område

Lad Ω_r betegne et vilkårligt parametriseret område i rummet med *udadrettet* enhedsnormalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ langs overfladen $\partial\Omega_r$.

Overfladen kan gerne være sammensat af glatte parametriserede fladestykker som f.eks. overfladen på et polyeder.

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ betegne et vilkårligt glat vektorfelt i rummet.

Vi lader alle punkterne i Ω_r flyde tiden t langs flowkurverne for vektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z)$.

Det med fortegn (i forhold til $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$) regnede volumen $\text{Vol}_{\pm}(t)$ af området efter denne deformation har da følgende differentialkvotient til tiden $t = 0$:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}_{\pm}(t)|_{t=0} = \int_{\partial\Omega_r} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} d\mu = \text{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega_r) \quad . \quad (28-50)$$

||| Eksempel 28.12 Eksplosion af massiv kugle

Vi checker sætningen i det konkrete tilfælde med den eksploderende kugle: Fluxen af eksplosionsvektorfeltet ud igennem kuglens overflade er simpelthen overfladens areal $4\pi\rho^2$ gange skalarproduktet $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, fordi dette skalarprodukt i dette specielle tilfælde er konstant: $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$. Derfor er den totale flux $4\pi\rho^3$, altså præcis differentialkvotienten (til tiden $t = 0$) af volumenet som funktion af flowtiden t . Vi har således verificeret sætningen i dette specielle eksempel.



De parametriserede rumlige områder, vi betragter, har jo sædvanligvis en rand, der består af 6 sideflader. Det betyder, at beregningen af volumenvæksten af området ved deformationen langs flowkurverne kræver beregning af 6 udadrettede flux-bidrag – eet bidrag for hver sideflade.

Hvis to af de 6 sideflader ved en standardparametrisering af et rumligt område er sammenfaldende eller delvis sammenfaldende, så vil standard enhedsnormalerne for den ene sideflade være præcis modsatrettet standard enhedsnormalerne for den anden sideflade der hvor sidefladerne er sammenfaldende, således at de tilsvarende fluxbidrag der vil *ophæve hinanden!*

For et vilkårligt glat vektorfelt i rummet kan vi undersøge volumenforøgelsen (ved flow langs vektorfeltets flowkurver) for en lille massiv kugle K_ρ , der har centrum i et givet punkt, f.eks. $p = (x_0, y_0, z_0)$ og radius ρ . Vi Taylor-udvikler vektorfeltets koordinatfunktioner V_1 , V_2 og V_3 , til 1. orden med udviklingspunkt (x_0, y_0, z_0) og finder den udadrettede flux af vektorfeltet igennem den lille kugles overflade ∂K_ρ . Denne flux divideret med volumenet $(4\pi/3)\rho^3$ af den massive kugle K_ρ har en grænseværdi når radius ρ går imod 0. Se skitsen til den beregning nedenfor.

Det viser sig (se nedenfor) at denne grænseværdi netop er *divergensen af vektorfeltet* i det betragtede punkt! I lyset af sætning 28.11 og ligning (28.3.50) har vi derfor motivereret følgende tolkning af divergensen:

||| Sætning 28.13

Divergensen af et vektorfelt udtrykker *den volumen-relative lokale flux ud gennem overfladen* for vektorfeltet og dermed også *den relative lokale volumen-vækst* ved deformation langs flowkurverne for vektorfeltet:

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}(\mathbf{V})(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{Vol}(K_\rho)} \operatorname{Flux}(\mathbf{V}, \partial K_\rho) \right) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{Vol}(K_\rho)} \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}_\pm(t) \Big|_{t=0} \right) . \end{aligned} \quad (28-51)$$

||| **Bevis**

Vi vil kun skitsere, hvordan divergensen fremkommer ved den antydede fremgangsmåde. Vi simplificerer fremstillingen på to måder: Dels vil vi vælge et koordinatsystem så $p = (0,0,0)$, og dels vil vi kun medtage lineariseringen af $\mathbf{V}(x,y,z)$ omkring $(0,0,0)$ (ε -leddene fra Taylors grænseformler for de 3 koordinatfunktioner tages altså ikke med). (Til gengæld er beregningerne helt eksakte for vektorfelter af højst første grad.)

Opgaven er altså at genfinde $\text{Div}(\mathbf{V})$ i punktet $(0,0,0)$ ved hjælp af en fluxberegning. Vi begynder med at bruge Taylors grænseformel på $\mathbf{V}(x,y,z)$. Det underforstås, at V_i og de partielle afledede af V_i evalueres i udviklingspunktet $(0,0,0)$ medmindre andet antydes.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x,y,z) = & (V_1 + x \frac{\partial V_1}{\partial x} + y \frac{\partial V_1}{\partial y} + z \frac{\partial V_1}{\partial z} , \\ & V_2 + x \frac{\partial V_2}{\partial x} + y \frac{\partial V_2}{\partial y} + z \frac{\partial V_2}{\partial z} , \\ & V_3 + x \frac{\partial V_3}{\partial x} + y \frac{\partial V_3}{\partial y} + z \frac{\partial V_3}{\partial z}) . \end{aligned} \quad (28-52)$$

Idet enhedsnormalvektorfeltet på overfladen af den lille massive ρ -kugle K_ρ med centrum $(0,0,0)$ er givet ved $\mathbf{n} = (x/\rho, y/\rho, z/\rho)$ følger det, at integranden i fluxberegningen er følgende:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x,y,z) \cdot \mathbf{n} = & \left(\frac{1}{\rho} \right) (x V_1 + x^2 \frac{\partial V_1}{\partial x} + xy \frac{\partial V_1}{\partial y} + xz \frac{\partial V_1}{\partial z} + \\ & y V_2 + yx \frac{\partial V_2}{\partial x} + y^2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + yz \frac{\partial V_2}{\partial z} + \\ & z V_3 + zx \frac{\partial V_3}{\partial x} + zy \frac{\partial V_3}{\partial y} + z^2 \frac{\partial V_3}{\partial z}) . \end{aligned} \quad (28-53)$$

Tilbage er nu kun at integrere dette udtryk over kuglens overflade ∂K_ρ og dernæst dividere med kuglens volumen $\text{Vol}(K_\rho)$. Selv om det nok kan se kompliceret ud, så er det faktisk rimelig simpelt i betragtning af følgende identiteter:

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_\rho} x \, d\mu &= \int_{\partial K_\rho} y \, d\mu = \int_{\partial K_\rho} z \, d\mu = 0 \quad , \\ \int_{\partial K_\rho} x^2 \, d\mu &= \int_{\partial K_\rho} y^2 \, d\mu = \int_{\partial K_\rho} z^2 \, d\mu = (4\pi/3) \rho^4 = \rho \, \text{Vol}(K_\rho) \quad , \\ \int_{\partial K_\rho} xy \, d\mu &= \int_{\partial K_\rho} xz \, d\mu = \int_{\partial K_\rho} zy \, d\mu = 0 \quad . \end{aligned} \quad (28-54)$$

Fra ligning (28.3.54) følger nu f.eks. følgende bidrag til integralet over kuglefladen ∂K_ρ af højresiden i ligning (28.3.53). (Bemærk, at $\frac{\partial V_1}{\partial x}(0,0,0)$ er en konstant, der kan sættes udenfor integraltegnet.):

$$\int_{\partial K_\rho} \left(\frac{1}{\rho}\right) x^2 \frac{\partial V_1}{\partial x}(0,0,0) d\mu = \text{Vol}(K_\rho) \frac{\partial V_1}{\partial x}(0,0,0) \quad . \quad (28-55)$$

Ialt fås naturligvis 3 sådanne bidrag til integralet over kuglefladen ∂K_ρ af højresiden i ligning (28.3.53), og da integralet over ∂K_ρ af venstresiden i ligning (28.3.53) netop er fluxen $\text{Flux}(\mathbf{V}, \partial K_\rho)$ har vi derfor følgende identitet i dette simplificerede tilfælde:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Vol}(K_\rho)} \text{Flux}(\mathbf{V}, \partial K_\rho) &= \frac{1}{\text{Vol}(K_\rho)} \int_{\partial K_\rho} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\mu \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x}(0,0,0) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(0,0,0) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(0,0,0) \\ &= \text{Div}(\mathbf{V})(0,0,0) \quad . \end{aligned} \quad (28-56)$$

For generelle vektorfelter gælder den tilsvarende identitet kun i den grænse, hvor ρ er meget lille (altså for $\rho \rightarrow 0$), således at ovenstående brug af Taylor's grænseformel for $\mathbf{V}(x, y, z)$ til første orden netop bliver den dominerende repræsentant for vektorfeltet indenfor kuglen K_ρ . For vektorfelter af højst første grad gælder identiteten (28.3.56) dog som nævnt for alle værdier af ρ . Det skyldes naturligvis, at uanset radius ρ er vektorfeltet jo i det specielle tilfælde eksakt repræsenteret i hele K_ρ ved sin Taylors grænseformel til første orden med udviklingspunkt i centrum.

Hermed har vi afsluttet skitseringen af beviset for den lokale bestemmelse af divergensen af et vektorfelt og vist den geometriske tolkning i sætning 28.13. ■

||| Opgave 28.14

Vis de ovenstående identiteter i ligning (28.3.54). I de tilfælde hvor integralet er 0 kan dette vises ved en fortegns- og symmetribetragtning.

Denne fremstilling af divergensen åbner nu op for en naturlig ide, som går i den modsatte retning:

Da den lokale punktvis volumen-vækst ved deformation af et rumligt område langs

flowkurverne for et givet vektorfelt er bestemt af divergensen af vektorfeltet, så er følgende en rimelig formodning: Hvis vi integrerer divergensen over et område i rummet, så skulle resultatet gerne være sammenlignelig med den totale volumenvækst af hele området. Altså groft sagt skulle summen af de lokale volumentilvækster gerne være den totale volumentilvækst.

Dette er præcis indholdet af Gauss' sætning, som vi nu formulerer i kombination med Sætning 28.11:

28.4 Gauss' divergens-sætning



Figure 28.9: Carl Friedrich Gauss. Se [Biografi](#).

||| Sætning 28.15 Gauss' divergens-sætning

Lad Ω_r betegne et rumligt område med randoverflade $\partial\Omega_r$ og *udadrettet* enhedsnormalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ på randoverfladen. For ethvert glat vektorfelt \mathbf{V} i rummet gælder så følgende:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}_{\pm}(t)|_{t=0} = \int_{\Omega_r} \text{Div}(\mathbf{V}) \, d\mu = \int_{\partial\Omega_r} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \, d\mu = \text{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega_r) \quad , \quad (28-57)$$

hvor fluxen altså skal beregnes med hensyn til det *udadrettede* enhedsnormalvektorfelt på randoverfladen af det givne rumlige område.

Begge sider af følgende ligning, der er essensen af Gauss' sætning, kan jo beregnes i konkrete tilfælde og dermed verificere Gauss' sætning:

$$\int_{\Omega_r} \text{Div}(\mathbf{V}) \, d\mu = \text{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega_r) \quad . \quad (28-58)$$

Vi vil her gennemgå nogle eksempler på sådanne dobbelt-beregninger.



I visse tilfælde er det meget simplere at udregne divergens-integralet over et givet rumligt område end at udregne fluxen af vektorfeltet gennem områdets totale overflade. Hvis man skal udregne sidstnævnte vil man selvfølgelig i stedet bare udregne førstnævnte integral og henvise til Gauss' divergenssætning. Omvendt er der tilfælde hvor fluxintegralet er simplest at beregne – så benyttes selvfølgelig tilsvarende duale strategi.

||| Eksempel 28.16

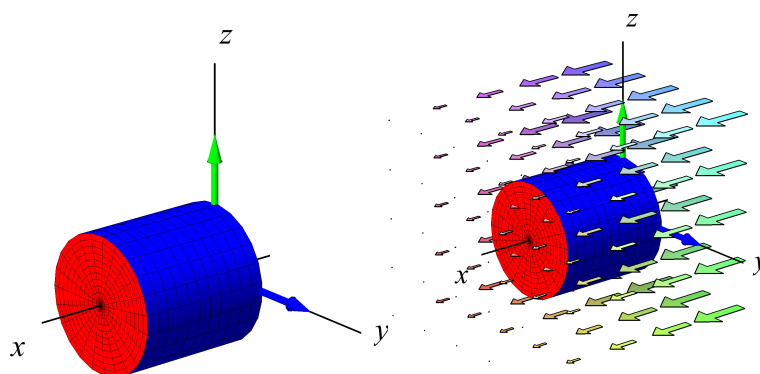
Hvis vektorfeltet \mathbf{V} har divergensen 0 i alle punkter i rummet, så vil ethvert rumligt område, der flyder med vektorfeltet, bevare sit volumen. Formen kan naturligvis ændres meget som tiden går, men volumenet er konstant. Desuden er fluxen *ud* igennem overfladen af ethvert *fastholdt* rumligt område tilsvarende 0.

||| Eksempel 28.17

For eksplosionsvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$, der har den konstante divergens $\text{Div}(\mathbf{V}) = 3$, gælder altså følgende for et vilkårligt rumligt område: $3 \text{Vol}(\Omega) = \text{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega)$.

||| Opgave 28.18

Vis (ved direkte udregninger) påstanden om $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z)$ i ovenstående eksempel 28.17 for det rumlige område, der består af den massive cylinder i figur 28.8.

Figure 28.10: Et vektorfelt som er parallelt med x -aksen og cylinderen fra eksempel 28.10.

|||| Eksempel 28.19 Divergensen og fluxen i cylinder-eksemplet

Vi vil illustrere Gauss' sætning for vektorfeltet

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (f(x), 0, 0) \quad , \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad (28-59)$$

hvor $f(x)$ er en glat funktion af x , idet vi vil beregne integralet af divergensen af vektorfeltet over den massive cylinder med radius $1/2$, x -aksen som symmetriakse, og x -interval $x \in [0, 1]$, som vi studerede i eksempel 28.10. I det eksempel fandt vi den totale flux af vektorfeltet ud gennem cylinderens overflade:

$$\text{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega) = (f(1) - f(0)) \cdot \frac{\pi}{4} \quad . \quad (28-60)$$

Den totale divergens af vektorfeltet i den massive cylinder er lige så let at beregne: Den lokale divergens af $\mathbf{V}(x, y, z) = (f(x), 0, 0)$ er i et vilkårligt punkt (x, y, z) :

$$\text{Div}(\mathbf{V})(x, y, z) = f'(x) \quad . \quad (28-61)$$

Den massive cylinder har en parameterfremstilling:

$$\Omega_{\mathbf{r}} \quad : \quad \mathbf{r}(u, v, w) = (w, u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v)) \quad , \quad (28-62)$$

hvor $(u, v, w) \in [0, 1/2] \times [-\pi, \pi] \times [0, 1]$. Jacobifunktionen for parametriseringen er så

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) = u \quad , \quad (28-63)$$

således at den totale divergens af vektorfeltet er

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} \text{Div}(\mathbf{V}) \, d\mu &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1/2} f'(w) \cdot u \, du \, dv \, dw \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{8} \cdot f'(w) \, dv \, dw \\ &= \frac{1}{8} \cdot \int_0^1 2 \cdot \pi \cdot f'(w) \, dw \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^1 f'(w) \, dw \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot [f(w)]_{w=0}^{w=1} \\ &= (f(1) - f(0)) \cdot \frac{\pi}{4} \quad , \end{aligned} \quad (28-64)$$

altså præcis samme resultat som ved flux-beregningen.

||| Eksempel 28.20 Vektorfelt igennem en kantet torus

Vi betragter en delmængde af en massive kugle med radius $1/2$, se figur 28.11. En parameterfremstilling for det massive område er givet ved:

$$\Omega_r : \mathbf{r}(u, v, w) = (u \cdot \sin(v) \cdot \cos(w), u \cdot \sin(v) \cdot \sin(w), u \cdot \cos(v)) \quad , \quad (28-65)$$

hvor parametrene gennemløber følgende restringerede intervaller:

$$u \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \quad , \quad v \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \quad , \quad w \in [-\pi, \pi] \quad . \quad (28-66)$$

Et vektorfelt i rummet er givet således:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (-z, y, x \cdot z) \quad . \quad (28-67)$$

Opgaven er at bestemme den totale flux af vektorfeltet ud igennem overfladen af Ω_r . Det kan godt være kompliceret – overfladen har 4 fladestykker, der alle bidrager til flux-beregningen. I stedet vil vi udregne integralet af divergensen af vektorfeltet over det rumlige område og til sidst henvise til Gauss' divergenssætning.

Jacobifunktionen for den angivne parametrisering af det massive kugleområde er:

$$\text{Jacobi}_r(u, v, w) = u^2 \cdot \sin(v) \quad , \quad (28-68)$$

og divergensen af vektorfeltet er

$$\text{Div}(\mathbf{V})(x, y, z) = 1 + x \quad , \quad \text{sådan at} \quad (28-69)$$

$$\text{Div}(\mathbf{V})(\mathbf{r}(u, v, w)) = 1 + u \cdot \sin(v) \cdot \cos(w) \quad .$$

Divergensintegralet over Ω_r er derfor:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} \text{Div}(\mathbf{V}) \, d\mu &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \int_{1/2}^1 (1 + u \cdot \sin(v) \cdot \cos(w)) \cdot u^2 \cdot \sin(v) \, du \, dv \, dw \\ &= \dots \\ &= \frac{7\pi}{12} \quad , \end{aligned} \quad (28-70)$$

som derfor – i henhold til Gauss' sætning – også er den søgte totale flux ud igennem overfladen:

$$\text{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega_r) = \frac{7\pi}{12} \quad . \quad (28-71)$$

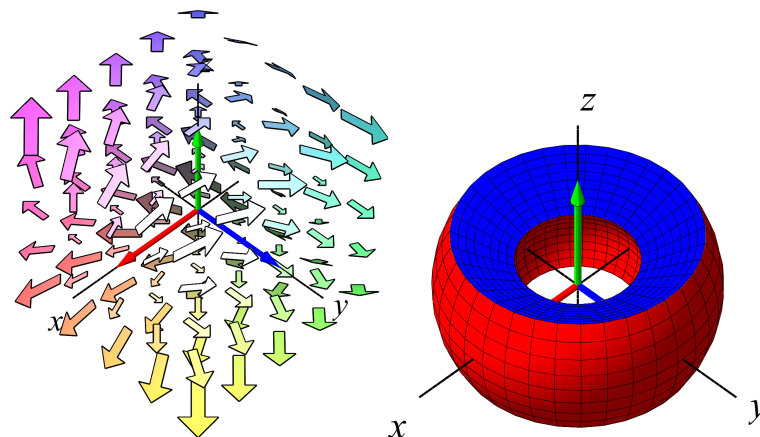


Figure 28.11: Et vektorfelt omkring og igennem en kantet torus.

28.5 En konsekvens for rotationsfelter

Vi nævner her en observation, som følger direkte af Gauss' divergenssætning i kombination med følgende lokale information om rotationsvektorfelder:

||| Sætning 28.21 Divergensen af et rotationsvektorfelt er 0

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ betegne et glat vektorfelt, som selv er rotationen af et vektorfelt $\mathbf{W}(x, y, z)$ i rummet. Så er

$$\text{Div}(\mathbf{V})(x, y, z) = 0 \quad . \quad (28-72)$$

Rotationsvektorfelder er altså divergensfrie:

$$\text{Div}(\mathbf{Rot}(\mathbf{W}))(x, y, z) = 0 \quad . \quad (28-73)$$

||| Bevis

Vi ved pr. antagelse at

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \left(\frac{\partial W_3}{\partial y} - \frac{\partial W_2}{\partial z}, \frac{\partial W_1}{\partial z} - \frac{\partial W_3}{\partial x}, \frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} \right) \quad , \quad (28-74)$$

sådan at

$$\operatorname{Div}(\mathbf{V})(x, y, z) = \left(\frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 W_2}{\partial z \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 W_1}{\partial y \partial z} \right) = 0, \quad (28-75)$$

hvor vi har benyttet, at differentiationsordenen kan ombyttes, e.g.:

$$\frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 W_3}{\partial x \partial y} . \quad (28-76)$$

■

Hvis vi bruger sætning 28.21 i kombination med Gauss' sætning får vi

|||| Følgesætning 28.22 Totale flux af et rotationsvektorfelt er 0

Lad $\mathbf{W}(x, y, z)$ betegne et glat vektorfelt i rummet og lad Ω være et område i rummet med stykkevis glat overflade $\partial\Omega$ med udadrettet enhedsnormalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$.

Så er den *totale flux* af $\mathbf{Rot}(\mathbf{W})(x, y, z)$ ud gennem overfladen $\partial\Omega$ af Ω lig med 0:

$$\operatorname{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{W}), \partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{Rot}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} d\mu = 0 . \quad (28-77)$$

Hvis det rumlige område flyder med flowkurverne for $\mathbf{Rot}(\mathbf{W}(x, y, z))$ så er rumfanget konstant under hele flowdeformationen:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol}_{\pm}(t) = 0 \quad \text{for alle } t . \quad (28-78)$$

|||| Eksempel 28.23 Et rotationsvektorfelt igennem en kugle

Vi lader $\mathbf{W}(x, y, z) = (z^2 \cdot x, x^2 \cdot y, y^2 \cdot z)$.

Så er

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{W})(x, y, z) = (2 \cdot y \cdot z, 2 \cdot z \cdot x, 2 \cdot x \cdot y) , \quad (28-79)$$

samt tydeligvis

$$\operatorname{Div}(\mathbf{Rot}(\mathbf{W}))(x, y, z) = 0 . \quad (28-80)$$

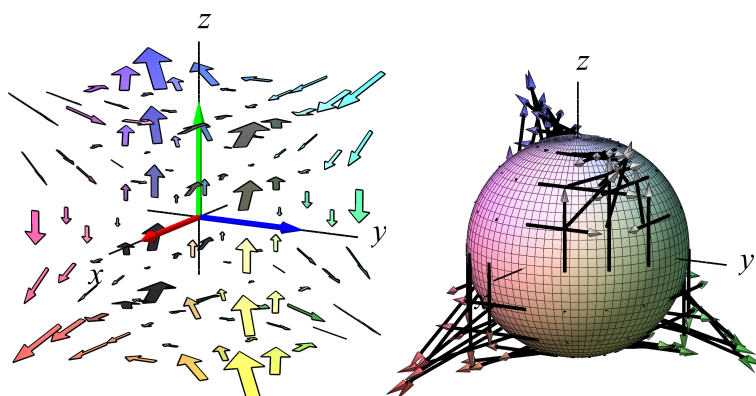


Figure 28.12: Et rotationsvektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{Rot}(\mathbf{W})(x, y, z)$ omkring og igennem en kugle. Den totale flux ud igennem kuglefladen er 0, men den lokale flux ud igennem passende valgte fladestykker af kuglefladen er tydeligvis ikke 0.

Lad nu F_r betegne kuglefladen med radius 1 placeret med centrum i $(0, 0, 0)$:

$$F_r : \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (\sin(u) \cdot \cos(v), \sin(u) \cdot \sin(v), \cos(u)) \quad , \quad (28-81)$$

hvor $u \in [0, \pi]$ og $v \in [-\pi, \pi]$. Som bekendt er Jacobifunktionen for denne parametrisering af kuglefladen givet ved:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = \sin(u) \quad , \quad (28-82)$$

og enhedsnormalvektoren til kuglefladen er i dette specielle tilfælde:

$$\mathbf{n}_F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad , \quad (28-83)$$

sådan at

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}(\mathbf{W})(x, y, z) \cdot \mathbf{n}_F(u, v) &= 2 \cdot (y \cdot z, y \cdot z, y \cdot z) \cdot (x, y, z) \\ &= 6 \cdot x(u, v) \cdot y(u, v) \cdot z(u, v) \\ &= 6 \cdot \sin^2(u) \cdot \cos(v) \cdot \sin(v) \cdot \cos(u) \quad . \end{aligned} \quad (28-84)$$

Det totale flux-integral af $\mathbf{Rot}(\mathbf{W})(x, y, z)$ ud igennem kuglefladen er derfor:

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{W}), F_r) &= \int_{F_r} \mathbf{Rot}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}_F d\mu \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} (6 \cdot \sin^2(u) \cdot \cos(v) \cdot \sin(v) \cdot \cos(u)) \cdot \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} (6 \cdot \sin^2(u) \cdot \cos(v) \cdot \sin(v) \cdot \cos(u)) \cdot \sin(u) du dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} 6 \cdot \sin^3(u) \cdot \cos(v) \cdot \sin(v) \cdot \cos(u) du dv \end{aligned} \quad (28-85)$$

og da en stamfunktion til $\sin^3(u) \cdot \cos(u)$ er $\frac{1}{4} \cdot \sin^4(u)$ som er 0 både for $u = 0$ og for $u = \pi$, så er

$$\text{Flux}(\mathbf{Rot}(\mathbf{W}), F_r) = 0 \quad (28-86)$$

i overensstemmelse med følgesætning 28.22.



Læg mærke til, at hvis integrationsintervallerne for u og v i ligning (28.5.85) i eksempel 28.23 havde været mindre, dvs. hvis vi havde betragtet fluxen af rotationsvektorfeltet ud igennem *en del af* kugleoverfladen, så ville resultatet ikke nødvendigvis blive 0, hvilket også fremgår tydeligt af figur 28.12.

Fluxen af $\mathbf{Rot}(\mathbf{W}(x, y, z))$ igennem et fladestykke kan alternativt beregnes som cirkulationen af $\mathbf{W}(x, y, z)$ langs med fladestykkets rand – det er indholdet af Stokes' sætning, som er emnet for eNote 27.

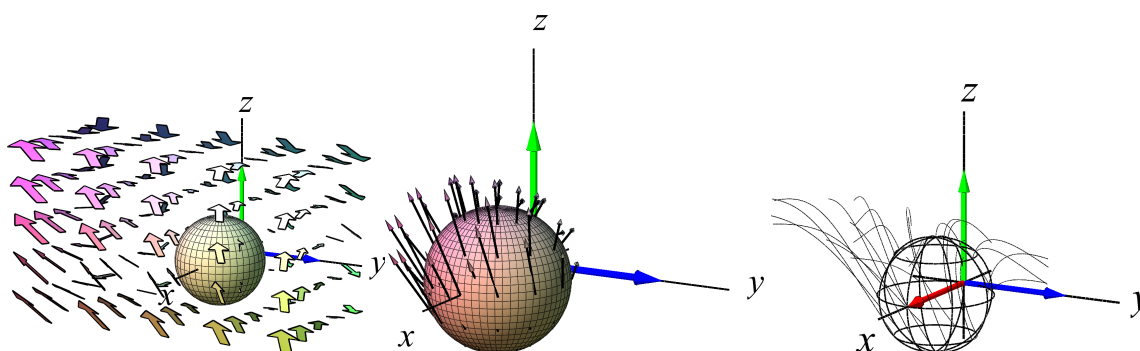


Figure 28.13: Et divergensfrit vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (-z, (y-x)/2, x - (z/2))$ omkring og igennem en kugle.

||| Eksempel 28.24 Divergensfrit førstegrads-vektorfelt

Første-grads vektorfeltet

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (-z, (y-x)/2, x - (z/2)) \quad (28-87)$$

har divergensen $\text{Div}(\mathbf{V})(x, y, z) = 0$. Den totale flux af vektorfeltet ud igennem overfladen af ethvert rumligt område er derfor 0 og rumfanget af det rumlige område er bevaret ved flow med vektorfeltets flowkurver.

For første-gradsvektorfelder gælder, at enhver massiv kugle deformeres igennem massive ellipsoider ved at flyde med vektorfeltet, se figur 28.13, figur 28.14 og opgave 28.25.

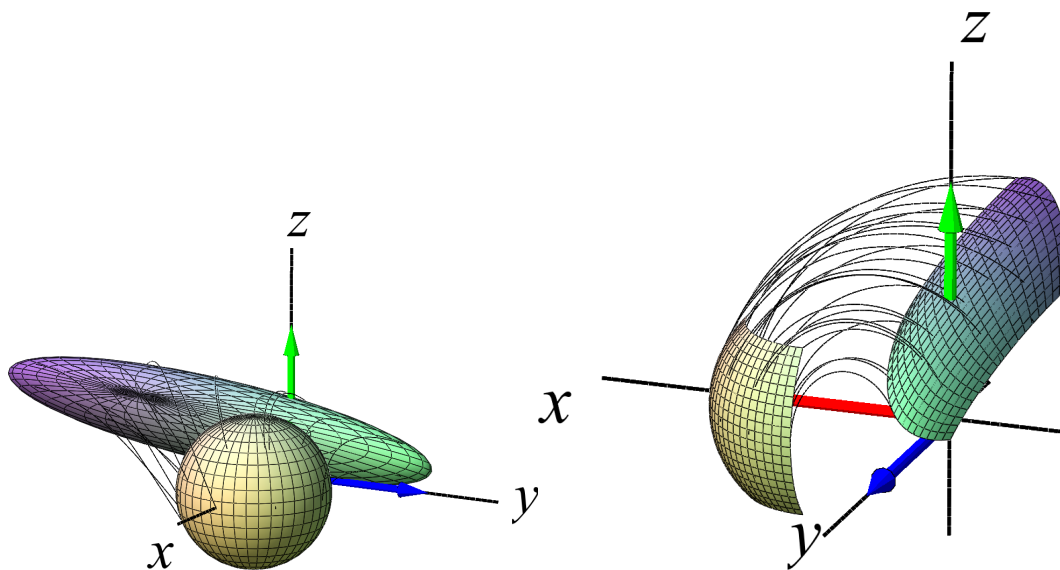


Figure 28.14: Det divergensfrie vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z) = (-z, (y - x)/2, x - (z/2))$ deformerer en massiv kugle til en massiv ellipsoide ved at alle kuglens punkter flyder med flowkurverne for vektorfeltet. Rumfanget er bevaret. Til højre er vist, hvordan et udsnit af kugleoverfladen flyder og danner en del af ellipsoide-overfladen.

|||| Opgave 28.25 (Advanced)

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ betegne et vilkårligt førstegrads-vektorfelt (se eNote 24) og lad F_0 betegne en vilkårlig niveauflade for et givet andengradspolynomium $f_0(x, y, z)$ i x , y , og z (se eNote 20). Vi lader s F_0 flyde tiden t med flowkurverne for $\mathbf{V}(x, y, z)$ og fr derved en flade F_t . Vis, at F_t ogs er en niveauflade for et andengradspolynomium $f_t(x, y, z)$ i x , y , og z . Vink: Se eNote 12.

28.6 Opsummering

Vi har indført det fundamentale begreb *flux af et vektorfelt igennem en flade* og relateret fluxen dels til den lokale volumen-ekspansions-rate ved selve fladen når denne flyder med flowkurverne for vektorfeltet, og dels til divergensen af vektorfeltet inde i et rumligt område der er afgrænset af en given overflade.

- For en glat parametriseret flade $F_{\mathbf{r}}$ og et glat vektorfelt $\mathbf{V}(x, y, z)$ er fluxen af vektorfeltet igennem fladen:

$$\begin{aligned} \text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) &= \int_c^d \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)) \, du \, dv \\ &= \int_c^d \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}_F(u, v) \, du \, dv \quad . \end{aligned} \quad (28-88)$$

- Ved at lade fladen flyde en tid t med flowkurverne for $\mathbf{V}(x, y, z)$ fejer fladen igennem et tids-afhængigt rumligt område $\Omega_{\mathbf{r}}(t)$, som lokalt enten ligger i retning af fladens standardnormal eller i modsatte retning. Det med fortegn vægtede rumfang beregnes ved hjælp af Jacobifunktionen for parameterfremstillingen – *uden numerisk tegn*. Dette rumfang kalder vi $\text{Vol}_{\pm}(t)$. Så er fluxen relateret til dette volumen på følgende måde:

$$\text{Flux}(\mathbf{V}, F_{\mathbf{r}}) = \left. \frac{d}{dt} \text{Vol}_{\pm}(\Omega_{\mathbf{r}}(t)) \right|_{t=0} = \text{Vol}'_{\pm}(0) \quad . \quad (28-89)$$

- Divergensen af vektorfeltet er også et mål for lokal volumen-ekspansion (hvor $\text{Div}(\mathbf{V})(x, y, z) > 0$) henholdsvis volumen-kontraktion (hvor $\text{Div}(\mathbf{V})(x, y, z) < 0$) ved flow langs flowkurverne for vektorfeltet. Integralet af divergensen over et rumligt område $\Omega_{\mathbf{r}}$ er derfor et mål for hele områdets totale volumen-ekspansion (eller kontraktion) og giver derfor ligeledes værdien $\text{Vol}'_{\pm}(0)$, hvor $\text{Vol}_{\pm}(t)$ her beregnes for *hele* overfladens volumen-bidrag (med fortegn) ved flow langs flowkurverne i forhold til den *udadrettede* normalvektor $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ på overfladen.

Det er indholdet af Gauss' divergenssætning:

$$\left. \frac{d}{dt} \text{Vol}_{\pm}(t) \right|_{t=0} = \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} \text{Div}(\mathbf{V}) \, d\mu = \int_{\partial\Omega_{\mathbf{r}}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \, d\mu = \text{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega_{\mathbf{r}}) \quad . \quad (28-90)$$

- En konsekvens af Gauss' divergenssætning er følgende: Hvis et vilkårligt rumligt område flyder langs flowkurverne for et divergensfrit vektorfelt, så er områdets rumfang konstant i tid – selv om formen af området i tiden selvfølgelig kan

ændre sig meget. Ethvert rotationsvektorfelt $\mathbf{Rot}(\mathbf{W})(x, y, z)$ er divergensfrit. Et rumligt område, der 'roterer' i den meget generelle forstand, at det flyder langs flowkurverne for $\mathbf{Rot}(\mathbf{W})(x, y, z)$ bevarer derfor sit rumfang.