eNote 27

Vektorfelter langs kurver

I eNote 24 dyrkes de indledende overvejelser om vektorfelter. I denne eNote vil vi se på vektorfelternes værdier langs kurver og benytte metoder fra eNote 22 om kurveintegration til at opstille de såkaldte tangentielle kurveintegraler og bruge dem til at undersøge om et givet vektorfelt er et gradientvektorfelt eller ej. Hvis et vektorfelt er et gradientvektorfelt for en funktion $f(x,y,z)$ s kan vi konstruere alle sådanne stamfunktioner ved hjælp af tangentiel kurveintegration af vektorfeltet. Og som vi skal se, gælder det også omvendt, at hvis det tangentielle kurveintegral af et givet vektorfeltet over enhver lukket kurve er 0*, så er vektorfeltet et gradientvektorfelt. Det tangentielle kurveintegral af et vektorfelt over en lukket kurve kaldes cirkulationen af vektorfeltet over kurven. Alene ud fra navnet er det ikke overraskende, at en sådan generel cirkulation* 0 *er ækvivalent med, at vektorfeltet selv har rotationsvektorfeltet* $\mathbf{0}$*.*

Version 20.10.16. *Karsten Schmidt.*

27.1 Det tangentielle kurveintegral

Lad $\mathbf{V}(x,y,z)$ være et glat vektorfelt i rummet, se eNote 24 og lad $K_\mathbf{r}$ betegne en glat parametriseret kurve:

$$K_\mathbf{r} \quad : \quad \mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) \quad , \quad u \in [a,b] \quad . \tag{27-1}$$

Langs med kurven $K_\mathbf{r}$ har vi så – i ethvert punkt $\mathbf{r}(u)$ på kurven – *to* vektorer, dels vektorfeltets værdi i punktet, $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u))$, og dels tangentvektoren $\mathbf{r}'(u)$ til kurven i punktet. Ved hjælp af disse to vektorer kan vi konstruere en glat funktion på kurven, som derefter kan integreres over kurven:

Det *tangentielle kurveintegral* af $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs en given parametriseret kurve $K_{\mathbf{r}}$ er kurveintegralet af længden af *projektionen* (med fortegn) af $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u))$ på kurvens tangent der er repræsenteret ved $\mathbf{r}'(u)$.

Det ønskede integral er altså defineret således:

|||| Definition 27.1

Det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs $K_{\mathbf{r}}$ er defineret ved:

$$\mathrm{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) = \int_{K_{\mathbf{r}}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e} \, d\mu \quad . \tag{27-2}$$

Integranden er altså i dette tilfælde givet ved skalarproduktet:

$$f(\mathbf{r}(u)) = \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{e}(u) \quad , \tag{27-3}$$

hvor $\mathbf{e}(u)$ er defineret ved

$$\mathbf{e}(u) = \begin{cases} \mathbf{r}'(u) / \|\mathbf{r}'(u)\| & \text{hvis} \quad \mathbf{r}'(u) \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \quad \text{hvis} \quad \mathbf{r}'(u) = \mathbf{0} & . \end{cases} \tag{27-4}$$

Bemærk, at så har vi for alle u:

$$\mathbf{e}(u) \, \|\mathbf{r}'(u)\| = \mathbf{r}'(u) \quad . \tag{27-5}$$

Det tangentielle kurveintegral $\mathrm{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}})$ af $\mathbf{V}$ langs $K_{\mathbf{r}}$ er derfor relativt simpelt at *udregne* - vi behøver faktisk ikke først at finde Jacobi-funktionen $\mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u)$, altså *længden* af $\mathbf{r}'(u)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) &= \int_{K_{\mathbf{r}}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e} \, d\mu \\ &= \int_a^b (\mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{e}(u)) \, \mathrm{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) \, du \\ &= \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot (\mathbf{e}(u) \, \|\mathbf{r}'(u)\|) \, du \\ &= \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) \, du \quad . \end{aligned} \tag{27-6}$$

Vi har altså følgende simple udtryk for tangentielle kurveintegraler:

|||| Sætning 27.2

Det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}(x, y, z)$ langs $K_{\mathbf{r}}$ kan *beregnes* således:

$$\operatorname{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) = \int_{K_{\mathbf{r}}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e} \, d\mu = \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u) \, du \quad . \tag{27-7}$$

Læg mærke til, at den sidste integrand i (27.1.6) er kontinuert når $\mathbf{V}(x, y, z)$ og $\mathbf{r}'(u)$ er kontinuerte selv om det ikke umiddelbart fremgår af definitionen (vektorfeltet $\mathbf{e}(u)$ er jo ikke nødvendigvis kontinuert - medmindre $\mathbf{r}(u)$ er en regulær parameterfremstilling).

Hvis kurven gennemløbes baglæns, så skifter $\operatorname{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}})$ fortegn.

Lad nemlig

$$\overline{K}_{\bar{\mathbf{r}}} \quad : \quad \bar{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{r}(b + a - u) \quad , \quad u \in [a, b] \quad . \tag{27-8}$$

Så er $\bar{\mathbf{r}}'(u) = -\mathbf{r}'(u)$ og $\bar{\mathbf{e}}(u) = -\mathbf{e}(u)$ sådan at

$$\operatorname{Tan}(\mathbf{V}, \overline{K}_{\bar{\mathbf{r}}}) = -\operatorname{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) \quad . \tag{27-9}$$

|||| Definition 27.3

I analogi med det tangentielle kurveintegral definerer vi det *ortogonale* kurveintegral $\operatorname{Ort}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}})$ af $\mathbf{V}$ langs $K_{\mathbf{r}}$ ved at projicere $\mathbf{V}(\mathbf{r}(u))$ vinkelret ind på den plan i rummet, som selv står vinkelret på $\mathbf{r}'(u)$ og dernæst finde kurveintegralet af længden af den projektion (som funktion af u).

|||| Eksempel 27.4

Lad $\mathbf{V}(x,y,z) = (0,z,y)$. Vi ønsker at bestemme det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs følgende parametriserede stykke af en skruelinje

$$K_{\mathbf{r}}: \ \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), u), \ \ u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad . \tag{27-10}$$

Ved at indsætte i (27.1.6) fås

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u)\, du \\
&= \int_0^{\pi/2} (0, u, \sin(u)) \cdot (-\sin(u), \cos(u), 1)\, du \\
&= \int_0^{\pi/2} (u\cos(u) + \sin(u))\, du \\
&= [u\sin(u)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \quad .
\end{aligned} \tag{27-11}$$

|||| Opgave 27.5

Lad $\mathbf{V}(x,y,z) = (0,x,z)$. Bestem både det tangentielle og det ortogonale kurveintegral af $\mathbf{V}$ langs følgende parametriserede stykke af en cirkel

$$K_{\mathbf{r}}: \ \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), 0), \ \ u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad . \tag{27-12}$$

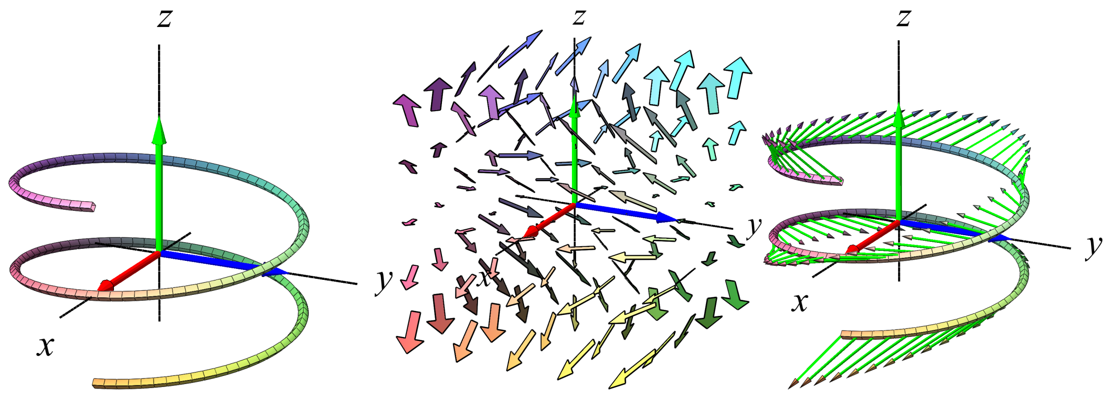

Figure 27.1: Skruelinjen $\mathbf{r}(u) = \left(\cos(u), \sin(u), \frac{1}{10}u\right)$, $u \in [-2\pi, 2\pi]$, og vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z) = (x, -(x+y), 2z)$ er her antydet – dels i rummet og dels langs skruelinjen.

|||| Metode 27.6 Tangentielle linjeintegraler til variabel punkt

Lad $\mathbf{V}(x,y,z)$ være et givet vektorfelt i rummet. Vi vil nu konstruere en funktion $F^*(x,y,z)$ i rummet som i punktet (x_0, y_0, z_0) er defineret til at være kurveintegralet af $\mathbf{V}(x,y,z)$ langs det rette linjestykke fra $(0,0,0)$ til punktet (x_0, y_0, z_0), dvs. F^* defineres således:

$$F^*(x_0, y_0, z_0) = \mathrm{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) \quad , \tag{27-13}$$

hvor kurven er givet ved den simplest mulige kurve fra $(0,0,0)$ til (x_0, y_0, z_0):

$$K_{\mathbf{r}}: \ \mathbf{r}(u) = (u \cdot x_0, u \cdot y_0, u \cdot z_0) = u \cdot (x_0, y_0, z_0), \ \ u \in [0,1] \quad . \tag{27-14}$$

Så har vi dermed følgende funktionsværdier for (stjerne-)funktionen hørende til $\mathbf{V}(x,y,z)$:

$$\begin{aligned} F^*(x_0, y_0, z_0) &= \mathrm{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) \\ &= \int_0^1 \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \bullet \mathbf{r}'(u)\, du \\ &= (x_0, y_0, z_0) \bullet \int_0^1 \mathbf{V}(u \cdot x_0, u \cdot y_0, u \cdot z_0)\, du \quad . \end{aligned} \tag{27-15}$$

Det sidste integral i (27.1.15) skal forstås som et integral af hver af de tre koordinatfunktioner af $\mathbf{V}(u \cdot x_0, u \cdot y_0, u \cdot z_0)$. Integralet giver dermed en vektor med tre komposanter sdan at skalarproduktet med stedvektoren (x_0, y_0, z_0) derefter giver en talværdi, som alts er værdien af $*$-funktionen $F^*(x,y,z)$ i (x_0, y_0, z_0).

|||| Eksempel 27.7 Konstruktion af tangentiel linjeintegral til variable punkt

Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ betegne følgende vektorfelt i rummet:

$$\mathbf{V}(x, y, z) = (x, 2y, 3z) \quad . \tag{27-16}$$

Så er den tilhørende $*$-funktion:

$$\begin{aligned} F^*(x_0, y_0, z_0) &= (x_0, y_0, z_0) \bullet \int_0^1 \mathbf{V}(u \cdot x_0, u \cdot y_0, u \cdot z_0)\, du \\ &= (x_0, y_0, z_0) \bullet \int_0^1 (u \cdot x_0, 2u \cdot y_0, 3u \cdot z_0)\, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x_0, y_0, z_0) \bullet (x_0, 2 \cdot y_0, 3 \cdot z_0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x_0^2 + 2 \cdot y_0^2 + 3 \cdot z_0^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot x_0^2 + y_0^2 + \frac{3}{2} \cdot z_0^2 \quad . \end{aligned} \tag{27-17}$$

Bemærk, at (stjerne-)funktionen

$$F^*(x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + y^2 + \frac{3}{2} \cdot x^2$$

som er konstrueret i eksempel 27.7 har følgende gradient, som netop er det vektorfelt vi begyndte med:

$$\boldsymbol{\nabla} F^*(x, y, z) = (x, 2y, 3z) = \mathbf{V}(x, y, z) \quad . \tag{27-18}$$

Det er ikke nogen tilfældighed! Vektorfeltet har rotationsvektorfelt $\mathbf{Rot} = \mathbf{0}$, og er derfor et gradientvektorfelt, som vi skal se i sætning 27.14 nedenfor.

27.2 Stamfunktion til et gradientvektorfelt

|||| Definition 27.8 Stamfunktion for et gradientvektorfelt

Lad $\mathbf{V}(x,y,z)$ være et glat vektorfelt i rummet. Hvis der findes en glat funktion $f(x,y,z)$ således at

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \mathbf{V}(x,y,z) \quad , \tag{27-19}$$

så siges $f(x,y,z)$ at være en *stamfunktion* til vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z)$.

Hvis vi kender én stamfunktion, så kender vi enhver af dem – pånær en arbitrær konstant! Som vi skal se giver metode 27.6 en konstruktion af alle stamfunktioner til et givet vektorfelt. Hvis der *ikke* findes nogen stamfunktion til vektorfeltet, s fr vi ikke desto mindre alligevel med den metode konstrueret en $*$-funktion i rummet – den funktion er imidlertid i s fald ikke nogen stamfunktion. Det kan og bør selvfølgelig afgøres ved at *gøre prøve*, altså ved direkte at beregne gradienten af $*$-funktionen og sammenligne med det givne vektorfelt.

|||| Opgave 27.9

Lad $\mathbf{V}(x,y,z)$ betegne vektorfeltet:

$$\mathbf{V}(x,y,z) = (x, 2y, 3z) \quad . \tag{27-20}$$

bestem funktionsværdierne for (stjerne-)funktionen $F_p^*(x,y,z)$ ud fra det generelle punkt $p = (a,b,c)$ hørende til $\mathbf{V}(x,y,z)$.

Vink: Det rette linjestykke fra punktet (a,b,c) til (x_0, y_0, z_0) kan parametriseres således:

$$K_{\mathbf{r}}: \ \mathbf{r}(u) \ = \ (a + u\cdot(x_0 - a), b + u\cdot(y_0 - b), c + u\cdot(z_0 - c))\,, \quad u \in [0,1] \quad . \tag{27-21}$$

således at

$$\mathbf{r}'(u) \ = \ (x_0 - a), y_0 - b, z_0 - c) \quad . \tag{27-22}$$

Gælder det stadig, at

$$\boldsymbol{\nabla} F_p^*(x,y,z) = \mathbf{V}(x,y,z) \quad ? \tag{27-23}$$

|||| Sætning 27.10 Tangentielt kurveintegral af et gradientvektorfelt

Lad $f(x,y,z)$ betegne en glat funktion af de tre variable i rummet, og lad $\mathbf{V}(x,y,z) = \boldsymbol{\nabla} f(x,y,z)$ betegne gradientvektorfeltet for $f(x,y,z)$. Lad $K_\mathbf{r}$ være en glat parametriseret kurve fra et punkt p til et punkt q i rummet. Kurven behøver ikke nødvendigvis at være retlinjet.
Så gælder følgende: Det tangentielle kurveintegral af $\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z)$ langs $K_\mathbf{r}$ afhænger kun af p og q og er uafhængig af kurven:

$$\operatorname{Tan}(\mathbf{V}, K_\mathbf{r}) = f(q) - f(p) \quad . \tag{27-24}$$

|||| Bevis

Vi bruger kædereglen fra eNote 16 p den sammensatte funktion $h(u) = f(\mathbf{r}(u))$ hvor $\mathbf{r}(u)$, $u \in \,]u_0, u_1[$, er en vilkrlig differentiabel kurve fra $p = (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(u_0)$ til $q = (x_1, y_1, z_1) = \mathbf{r}(u_1)$ og får derved:

$$h'(u) = \mathbf{r}'(u) \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u)) \quad . \tag{27-25}$$

Heraf følger, at $h(u)$ er en stamfunktion til funktionen på højresiden af ovenstående ligning:

$$h(u_1) - h(u_0) = \int_{u_0}^{u_1} \mathbf{r}'(u) \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u))\, du \quad . \tag{27-26}$$

Men da

$$\begin{aligned} h(u_0) &= f(\mathbf{r}(u_0)) = f(p) \quad , \\ h(u_1) &= f(\mathbf{r}(u_1)) = f(q) \quad , \end{aligned} \tag{27-27}$$

får vi dermed

$$\begin{aligned} f(q) &= f(p) + \int_{u_0}^{u_1} \mathbf{r}'(u) \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(u))\, du \\ &= f(p) + \operatorname{Tan}(\mathbf{V}, K_\mathbf{r}) \quad , \end{aligned} \tag{27-28}$$

og det var det vi skulle vise.

■

Hvis kurven er lukket – gerne sammensat af et endeligt antal glatte kurver som f.eks i en polygon med retlinede kanter – får vi at det tangentielle kurveintegral af et gradientvektorfelt over den lukkede kurve er 0.

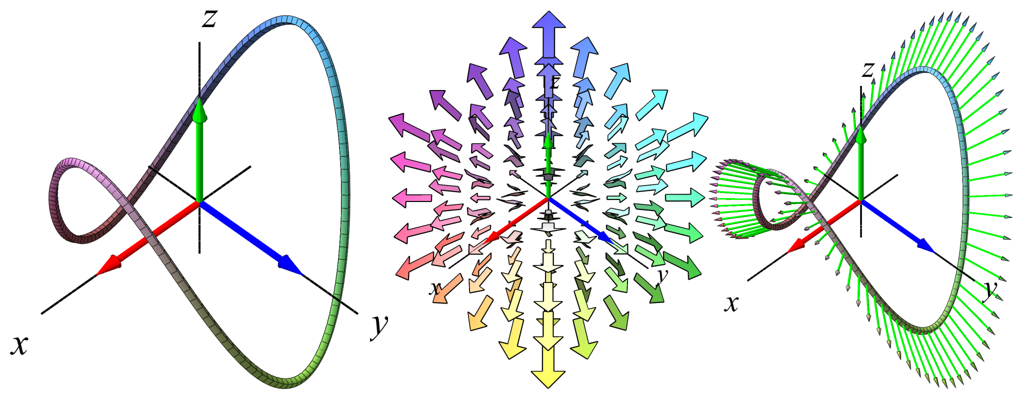

Figure 27.2: Den lukkede kurve $\mathbf{r}(u) = (\cos(t), \sin(t), \cos(2 \cdot t))$, $u \in [-\pi, \pi]$ og gradientvektorfeltet $\mathbf{V}(x, y, z) = (x, y, z) = \boldsymbol{\nabla} f(x, y, z)$ for $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$ er her antydet – dels i rummet og dels langs kurven.

|||| Definition 27.11 Cirkulationen af et vektorfelt langs en lukket kurve

Lad $K_{\mathbf{r}}^{\circ}$ betegne en *lukket* kurve i rummet (som gerne kan være sammensat af et endeligt antal glatte kurver). Lad $\mathbf{V}(x, y, z)$ være et glat vektorfelt i rummet. Så kalder vi det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}(x, y, z)$ over $K_{\mathbf{r}}^{\circ}$ *cirkulationen* af $\mathbf{V}(x, y, z)$ over $K_{\mathbf{r}}^{\circ}$ og skriver:

$$\mathrm{Cirk}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}^{\circ}) = \mathrm{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}^{\circ}) \quad . \tag{27-29}$$

Betegnelsen *cirkulation* er helt rimelig. Hvis vektorfeltet er et gradientvektorfelt ved vi, at rotationen er $\mathbf{0}$ overalt, se eNote 24, og det stemmer med, at cirkulationen i disse tilfælde også er 0 for enhver lukket kurve.

Vi har allerede nu indset den ene halvdel af følgende sætning – den anden (lidt vanskeligere) halvdel er bevist nedenfor:

|||| Sætning 27.12 Cirkulationssætningen

Et glat vektorfelt $\mathbf{V}(x,y,z)$ i rummet er et gradientvektorfelt hvis og kun hvis der gælder:

$$\mathrm{Cirk}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}^{\circ}) = 0 \tag{27-30}$$

for *alle* lukkede kurver $K_{\mathbf{r}}^{\circ}$.

En stamfunktion kan konstrueres ved linjeintegralmetoden 27.6.

|||| Bevis

Som nævnt ved vi allerede, at hvis $\mathbf{V}(x,y,z)$ er et gradientvektorfelt, så er cirkulationen 0 for enhver lukket kurve. Den anden vej handler altså om at antage, at alle lukkede kurver giver cirkulation 0 og derudfra slutte, at så er det pågældende vektorfelt et gradientvektorfelt. Vi vil derfor konstruere en funktion $F(x,y,z)$ hvis gradientvektorfelt er det givne vektorfelt. Der er i ovenstående fremstilling stort set kun én kandidat, der eventuelt ville kunne bruges som en sådan funktion, nemlig $*$-funktionen $F^*(x,y,z)$ hørende til $\mathbf{V}(x,y,z)$:

$$F^*(x,y,z) = (x,y,z) \bullet \int_0^1 \mathbf{V}(u \cdot x, u \cdot y, u \cdot z)\, du \quad . \tag{27-31}$$

Da cirkulationen er 0 langs enhver lukket kurve ved vi, at denne funktion ikke afhænger af integrationsvejen: Det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}(x,y,z)$ langs enhver anden kurve fra $(0,0,0)$ til (x,y,z) vil give samme værdi som $F^*(x,y,z)$.

Vi vil vise, at gradienten af $F^*(x,y,z)$ i punktet (x_0,y_0,x_0) er $\mathbf{V}(x_0,y_0,z_0)$, så vi ser på

$$F^*(x,y,z) = F^*(x_0,y_0,z_0) + \mathrm{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) \quad , \tag{27-32}$$

hvor $K_{\mathbf{r}}$ er en vilkårlig glat kurve fra (udviklings-)punktet (x_0,y_0,z_0) til et vilkårligt andet punkt (x,y,z). Vi vælger *igen* det rette linjestykke mellem de to punkter:

$$K_{\mathbf{r}} \quad : \quad \mathbf{r}(u) = (x_0,y_0,z_0) + u \cdot ((x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)) \quad , \quad u \in [0,1] \quad , \tag{27-33}$$

og får så:

$$\mathrm{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \bullet \int_0^1 \mathbf{V}(\mathbf{r}(u))\, du \tag{27-34}$$

Det første bidrag til dette skalarprodukt er

$$(x - x_0) \cdot \int_0^1 V_1(\mathbf{r}(u))\, du \quad . \tag{27-35}$$

Vi vil nu benytte den observation (se opgave 27.13), at der for enhver glat funktion $g(u)$ på $[0,1]$ gælder, at der findes en værdi ξ imellem 0 og 1 således at

$$\int_0^1 g(u)\,du = g(\xi) \quad . \tag{27-36}$$

Ved at bruge den integral-middelværdisætning får vi til indsættelse i (27.2.35):

$$\begin{aligned}(x-x_0)\cdot\int_0^1 V_1(\mathbf{r}(u))\,du &= (x-x_0)V_1(\mathbf{r}(\xi_1))\\ &= (x-x_0)\cdot(V_1(x_0,y_0,z_0)+\varepsilon_1(x-x_0,y-y_0,z-z_0)) \quad ,\end{aligned} \tag{27-37}$$

idet $V_1(x,y,z)\to V_1(x_0,y_0,z_0)$ for $(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)$.

Tilsvarende fås for de to andre bidrag til skalarproduktet i (27.2.34), således at vi samlet har:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tan}(\mathbf{V},K_{\mathbf{r}}) &= (x-x_0,y-y_0,z-z_0)\bullet(\mathbf{V}(x_0,y_0,z_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(x-x_0,y-y_0,z-z_0))\\ &= (x-x_0,y-y_0,z-z_0)\bullet\mathbf{V}(x_0,y_0,z_0)\\ &\qquad + \rho_{(x_0,y_0,z_0)}(x,y,z)\cdot\varepsilon(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\end{aligned} \tag{27-38}$$

Vi indsætter til sidst i (27.2.32) og får følgende ligning

$$\begin{aligned}F^*(x,y,z) &= F^*(x_0,y_0,z_0)+\mathrm{Tan}(\mathbf{V},K_{\mathbf{r}})\\ &= F^*(x_0,y_0,z_0)+(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\bullet\mathbf{V}(x_0,y_0,z_0)\\ &\qquad + \rho_{(x_0,y_0,z_0)}(x,y,z)\cdot\varepsilon(x-x_0,y-y_0,z-z_0) \quad .\end{aligned} \tag{27-39}$$

Gradienten af (stjerne-)funktionen $F^*(x,y,z)$ i (x_0,y_0,z_0) kan derefter aflæses ved direkte inspektion – det er jo "faktoren" på $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ før epsilon-leddet:

$$\boldsymbol{\nabla} F^*(x_0,y_0,z_0) = \mathbf{V}(x_0,y_0,z_0) \quad , \tag{27-40}$$

hvilket netop betyder, at $\mathbf{V}(x,y,z)$ er et gradientvektorfelt (med $F^*(x,y,z)$ som stamfunktion), og det var det vi skulle vise.

■

|||| Opgave 27.13

Overvej – og indse – den påstand vi har brugt i beviset for sætning 27.12:
For enhver glat funktion $g(u)$ på $[0,1]$ gælder, at der findes en værdi ξ imellem 0 og 1 således at

$$\int_0^1 g(u)\,du = g(\xi) \quad . \tag{27-41}$$

I analogi med cirkulationssætningen 27.12 har vi ligeledes en to-vejs kobling mellem gradientvektorfelt-egenskaben og *rotation* **0**:

|||| Sætning 27.14 Stamfunktions-sætningen

Et glat vektorfelt $\mathbf{V}(x,y,z)$ i rummet er et gradientvektorfelt hvis og kun hvis der gælder:

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x,y,z) = (0,0,0) \quad . \tag{27-42}$$

En stamfunktion til vektorfeltet $\mathbf{V}(x,y,z)$ kan konstrueres ved linjeintegralmetoden 27.6.

|||| Bevis

Vi nøjes med at se på den ene (lette) vej – rotationen af et gradientvektorfelt er **0**. Se også den påstand i sætning 26.29 i eNote 24. Lad altså $f(x,y,z)$ være en glat funktion i rummet. Så er

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = \left(f'_x(x,y,z), f'_y(x,y,z), f'_z(x,y,z)\right) \quad . \tag{27-43}$$

Idet vi nøjes med at fokusere på første koordinat i rotationsvektoren får vi heraf:

$$\begin{aligned}\mathbf{Rot}(\boldsymbol{\nabla} f)(x,y,z) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} f'_z(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z} f'_y(x,y,z), *, *\right) \\ &= \left(f''_{zy}(x,y,z) - f''_{yz}(x,y,z), *, *\right) \\ &= (0,*,*) \quad ,\end{aligned} \tag{27-44}$$

og tilsvarende 0 for de to andre koordinater.

■

|||| Eksempel 27.15 Tangentielt kurveintegral af et ikke-gradientvektorfelt

Lad $\mathbf{V}(x,y,z) = (-y,x,0)$. Så er $\mathbf{V}(x,y,z)$ *ikke et gradientvektorfelt* idet $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x,y,z) = (0,0,2) \neq (0,0,0)$, se også eksempel 26.3 i eNote 24.

Hvis vi vælger den lukkede kurve:

$$K_{\mathbf{r}} \quad : \quad \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), 0) \quad , \quad u \in [-\pi, \pi] \quad , \tag{27-45}$$

får vi i overensstemmelse med cirkulationssætningen en cirkulation, der ikke er 0:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tan}(\mathbf{V}, K_{\mathbf{r}}) &= \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin(u), \cos(u), 0) \bullet (-\sin(u), \cos(u), 0)\, du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin^2(u) + \cos^2(u)\right)\, du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1\, du \\ &= 2 \cdot \pi \quad . \end{aligned} \tag{27-46}$$

Hvis vi konstruerer $*$-funktionen hørende til $\mathbf{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ får vi en veldefineret funktion i rummet:

$$\begin{aligned} F^*(x, y, z) &= (x, y, z) \bullet \int_0^1 \mathbf{V}(u \cdot x, u \cdot y, u \cdot z)\, du \\ &= (x, y, z) \bullet \int_0^1 (-u \cdot y, u \cdot x, 0)\, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((x, y, z) \bullet (-y, x, 0)) \\ &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{27-47}$$

og det er klart *ikke* en stamfunktion til $\mathbf{V}(x, y, z)$, hvilket er i fuld overensstemmelse med stamfunktionssætningen.

27.3 Opsummering

Vi har defineret det tangentielle kurveintegral for glatte vektorfelter langs glatte parametriserede kurver og vist, hvordan de tangentielle kurveintegraler kan benyttes til at konstruere stamfunktioner til et vektorfelt $\mathbf{V}(x,y,z)$ – hvis ellers vektorfeltet er et gradientvektorfelt.

- Det tangentielle kurveintegral af $\mathbf{V}(x,y,z)$ langs den parametriserede kurve $K_\mathbf{r}$ kan beregnes således:

$$\mathrm{Tan}(\mathbf{V},K_\mathbf{r}) \; = \; \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u)\; du \quad . \tag{27-48}$$

  Hvis kurven $K_\mathbf{r}$ er lukket, så betegnes kurven med $K_\mathbf{r}^\circ$, det tangentielle kurveintegral kaldes i så fald cirkulationen af vektorfeltet langs den lukkede kurve, og vi skriver

$$\mathrm{Cirk}(\mathbf{V},K_\mathbf{r}^\circ) = \mathrm{Tan}(\mathbf{V},K_\mathbf{r}^\circ) \quad . \tag{27-49}$$

- Stamfunktionssætningen giver en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at et givet vektorfelt er et gradientvektorfelt:

  $\mathbf{V}(x,y,z)$ er et gradientvektorfelt hvis og kun hvis $\mathbf{Rot}(\mathbf{V})(x,y,z) = (0,0,0)$.

- Cirkulationssætningen udtrykker en tilsvarende nødvendig og tilstrækkelig betingelse for gradientfelt-egenskaben udtrykt ved cirkluationen af vektorfeltet langs lukkede kurver:

  $\mathbf{V}(x,y,z)$ er et gradientvektorfelt hvis og kun hvis $\mathrm{Cirk}(\mathbf{V},K_\mathbf{r}^\circ) = 0$ for alle lukkede kurver $K_\mathbf{r}^\circ$.

- Stjerne-funktionen $F^*(x,y,z)$ hørende til et gradientvektorfelt $\mathbf{V}(x,y,z)$ er en stamfunktion til $\mathbf{V}(x,y,z)$. Funktionen beregnes som det tangentielle linjeintegral fra $(0,0,0)$ til punktet (x,y,z) således:

$$\begin{aligned} F^*(x,y,z) &= \mathrm{Tan}(\mathbf{V},K_\mathbf{r}) \\ &= \int_0^1 \mathbf{V}(\mathbf{r}(u)) \cdot \mathbf{r}'(u)\; du \\ &= (x,y,z) \cdot \int_0^1 \mathbf{V}(u\cdot x, u\cdot y, u\cdot z)\; du \quad . \end{aligned} \tag{27-50}$$