

|||| eNote 25

Flade- og rum-integraler

Flade og rumintegraler opstilles her på stort set samme måde som kurve- og planintegralerne i eNote 22, som derved sammen med den grundlæggende generelle indførelse i Riemann-integralerne eNote 21 danner basis for nærværende eNote. Udgangspunktet for bestemmelse af flade- og rum-integralerne er fladernes og de rumlige områders respektive parameterfremstillinger. Til hver parameterfremstilling hører en Jacobi-funktion og det er denne funktion der benyttes til opstilling og beregning af integralerne.

25.1 Flade-integraler

En parametriseret flade i rummet er givet ved en parameterfremstilling som meget ligner parameterfremstillingerne for plane områder, jvf. eNote 22. Forskellen er dog den helt essentielle, at her er også z -koordinaten en funktion af de to parameterværdier u og v :

$$F_r: \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [a, b], \quad v \in [c, d], \quad (25-1)$$

hvor $x(u, v)$, $y(u, v)$, og $z(u, v)$ er givne glatte funktioner af de to variable u og v .

|||| Eksempel 25.1 Graf-flader for funktioner af to variable

En funktion $h(x, y)$ af to variable $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ har en grafflade \mathcal{F} i rummet, som let kan 'parametriseres' på den anviste form:

$$\mathcal{F} : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad v \in \mathbb{R} \quad . \quad (25-2)$$

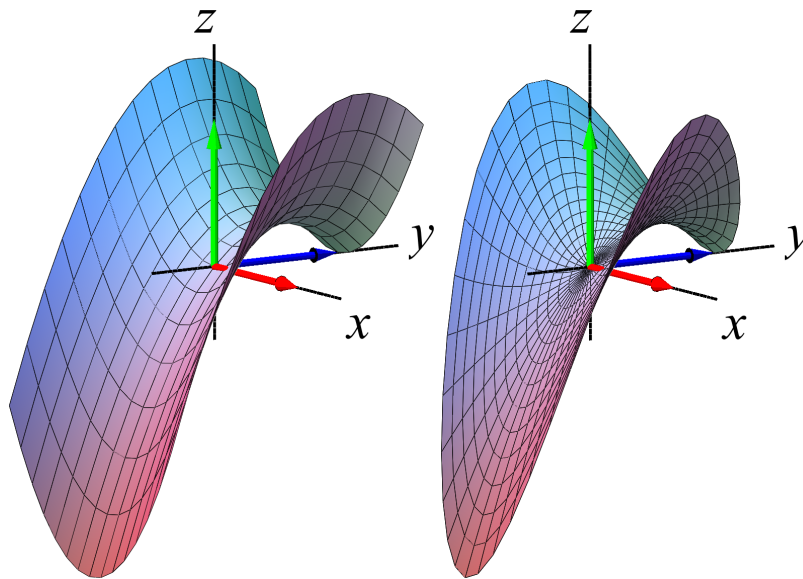


Figure 25.1: Graf-fladen for funktionen $h(x, y) = x^2 - y^2 + y$ dels over kvadratet $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ og dels over cirkelskiven med radius 1 og centrum i $(0, 0)$ i $((x, y))$ -planen.

Typisk er vi kun interesserede i et udsnit af sådanne graf-flader, f.eks. det udsnit, der ligger over et rektangel i (x, y) planen: $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$. Det udsnit parametriseres lige så let som hele graffladen:

$$\hat{\mathcal{F}} : \hat{\mathbf{r}}(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad . \quad (25-3)$$

Hvis vi derimod er interesserede i det udsnit af graffladen som ligger over cirkelskiven med radius a og centrum i $(0, 0)$ så må vi først parametrisere cirkelskiven i (x, y) -planen med de to parametre u og v , hvorefter grafflade-udsnittet kan præsenteres ved at 'løfte' cirkelskivepunkterne til den korrekte 'højde' med funktionen $h(x, y)$:

$$\tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\mathbf{r}}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), h(u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v))) \quad , \quad (25-4)$$

hvor parametrene u og v nu gennemløber parameterområdet for cirkelskiveparametriseringen:

$$u \in [0, a] \quad , \quad v \in [-\pi, \pi] \quad . \quad (25-5)$$

I analogi med planintegralerne (jvf. eNote 22) definerer vi nu fladeintegralerne således:

|||| Definition 25.2 Fladeintegralet

Lad $f(x, y, z)$ betegne en kontinuert funktion i \mathbb{R}^3 . Fladeintegralet af funktionen $f(x, y, z)$ over den parametriserede flade $F_{\mathbf{r}}$ defineres ved

$$\int_{F_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \quad , \quad (25-6)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| \quad (25-7)$$

er arealet af det parallelogram, der på stedet $\mathbf{r}(u, v)$ udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{r}(u, v)$ på fladen.

|||| Definition 25.3 Regulær parameterfremstilling

Parameterfremstillingen (25.1.1) siges at være en *regulær parameterfremstilling* hvis der gælder følgende:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) > 0 \quad \text{for alle } u \in [a, b] \text{ , } v \in [c, d] \quad . \quad (25-8)$$

|||| Definition 25.4 En-entydig parameterfremstilling

Som for parametriserede kurver siges parameterfremstillingen i (25.1.1) at være *en-entydig* hvis forskellige punkter i definitionsmængden afbildes i forskellige punkter i billedmængden.

|||| Eksempel 25.5 Kugleflade-parametrisering

Hele kuglefladen med radius R og centrum i $(0, 0, 0)$ kan parametriseres med 'geografiske' parametre således:

$$\mathcal{S}_R \quad : \quad \mathbf{r}(u, v) = (R \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), R \cdot \sin(u) \cdot \sin(v), R \cdot \cos(u)) \quad , \quad (25-9)$$

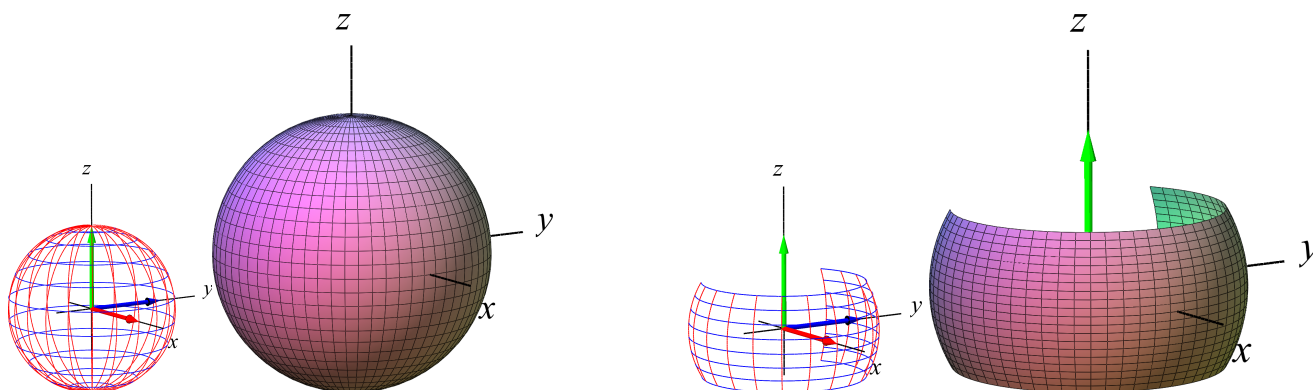


Figure 25.2: Enheds-kuglefladen og en del af enheds-kuglefladen. Delen er konstrueret ved at indskrænke parameterdomænet til $(u, v) \in [\pi/3, 2\pi/3] \times [-2\pi/3, 2\pi/3]$.

hvor $u \in [0, \pi]$ og $v \in [-\pi, \pi]$.

Jacobi-funktionen hørende til denne parametrisering fås af følgende beregninger:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u &= R \cdot (\cos(u) \cdot \cos(v), \cos(u) \cdot \sin(v), -\sin(v)) \quad , \\ \mathbf{r}'_v &= R \cdot (-\sin(u) \cdot \sin(v), \sin(u) \cdot \cos(v), 0) \quad , \\ \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) &= |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = R^2 \cdot \sin(u) \quad . \end{aligned} \quad (25-10)$$

Denne parametrisering er hverken regulær overalt eller en-entydig i det givne parameterområde. Hvorfor ikke? Hvor og hvordan er der brud på regulariteten? Hvor og hvordan er der brud på en-entydigheden? Se afsnit 22.4 i eNote 20.

|||| Eksempel 25.6 Graflader

Enhver standard-parametrisering af en graflade for en glat funktion $h(x, y)$ af to variable er en-entydig og regulær overalt. Hvis vi ser på standard-parametriseringen

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad (25-11)$$

får vi Jacobifunktionen ved følgende generelle beregning:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u(u, v) &= (1, 0, h'_u(u, v)) \quad , \\ \mathbf{r}'_v(u, v) &= (0, 1, h'_v(u, v)) \quad , \\ \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v) &= (-h'_u(u, v), -h'_v(u, v), 1) \quad , \\ \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) &= \sqrt{1 + (h'_u(u, v))^2 + (h'_v(u, v))^2} = \sqrt{1 + |\nabla h(u, v)|^2} \quad , \end{aligned} \quad (25-12)$$

■ som jo klart er positiv for alle (u, v) i parameter-området.

|||| Definition 25.7 Areal af flade

Arealet af den parametriserede flade

$$F_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d]$$

defineres som fladeintegralet af den konstante funktion 1 over fladen:

$$\text{Areal}(F_{\mathbf{r}}) = \int_{F_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv \quad . \quad (25-13)$$

|||| Eksempel 25.8 Areal af graf-flader

Arealet af grafflader for funktionen $h(x, y)$ over det rektangulære område $[a, b] \times [c, d]$ i (x, y) -planen er derfor:

$$\text{Areal}(\widehat{\mathcal{F}}) = \int_{\widehat{\mathcal{F}}} 1 \, d\mu = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv \quad , \quad (25-14)$$

hvor

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}} = F_{\mathbf{r}} \quad : \quad \mathbf{r}(u, v) &= (u, v, h(u, v)) \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \\ \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) &= \sqrt{1 + |\nabla h(u, v)|^2} \end{aligned} \quad (25-15)$$

sådan at

$$\text{Areal}(\widehat{\mathcal{F}}) = \int_c^d \int_a^b \sqrt{1 + |\nabla h(u, v)|^2} \, du \, dv \quad . \quad (25-16)$$

|||| Opgave 25.9

Bestem arealet af den del af grafflader for funktionen $h(x, y) = x + y - 1$ som ligger over kvadratet $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ i (x, y) -planen. Bemærk, at denne del af grafflader er et plant parallelogram. Brug dels dobbelt-integration som i eksempel 25.8 og dels den klassiske arealbestemmelse ved hjælp af grundlinje og højde.

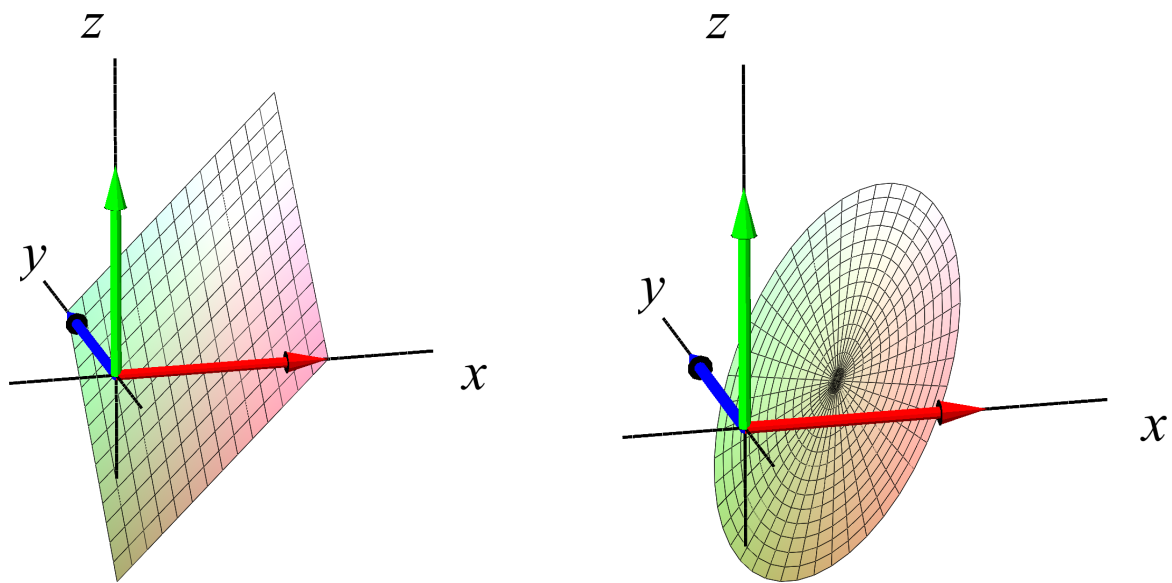


Figure 25.3: Dele af en plan grafflade.

|||| Opgave 25.10

Bestem arealet af den del af graffladen for funktionen $h(x, y) = x + y - 1$ som ligger over den cirkelskive i (x, y) -planen som har radius $1/2$ og centrum i $(1/2, 1/2)$. Bemærk, at denne del af graffladen er et plant område, som er afgrænset af en ellipse.

|||| Opgave 25.11

Bestem arealet af den del af graf-fladen for funktionen $h(x, y) = x \cdot y$ som ligger over kvadratet $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ i (x, y) -planen.

|||| Eksempel 25.12 Areal af kugleflade

En del af en kugleflade med radius R og centrum i $(0, 0, 0)$ er parametriseret således:

$$\hat{S} : \hat{\mathbf{r}}(u, v) = (R \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), R \cdot \sin(u) \cdot \sin(v), R \cdot \cos(u)) \quad , \quad (25-17)$$

hvor $u \in [a, b] \subset [0, \pi]$ og $v \in [c, d] \subset [-\pi, \pi]$.

Arealet af den del af kuglefladen er så, idet $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = R^2 \cdot \sin(u)$:

$$\begin{aligned} \text{Areal}(\widehat{\mathcal{S}}) &= \int_c^d \int_a^b R^2 \cdot \sin(u) \, du \, dv \\ &= R^2 \cdot (d - c) \cdot [-\cos(u)]_{u=a}^{u=b} \\ &= R^2 \cdot (d - c) \cdot (\cos(a) - \cos(b)) \quad . \end{aligned} \quad (25-18)$$

Specielt får vi derfor også arealet af hele kuglefladen med $a = 0, b = \pi, c = -\pi, \text{ og } d = \pi$:

$$\text{Areal}(\mathcal{S}_R) = 4\pi \cdot R^2 \quad . \quad (25-19)$$

25.1.1 Motivering af fladeintegralet

Hvis vi – i stil med motiveringen af kurveintegralet – deler *begge* intervallerne $[a, b]$ og $[c, d]$ i henholdsvis n og m lige store dele, så har hvert u -delinterval længden $\delta_u = (b - a)/n$ og hvert v -delinterval har længden $\delta_v = (d - c)/m$. Tilsvarende bliver delepunkternes koordinater i (u, v) -parameterområdet (som jo er rektanglet $[a, b] \times [c, d]$ i \mathbb{R}^2) - jvf. afsnittet om dobbelt-integralsummer i eNote 21:

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) &= (a, c), \\ (u_1, v_j) &= (a, c + (j - 1)\delta_v), \\ (u_i, v_1) &= (a + (i - 1)\delta_u, c), \\ (u_i, v_j) &= (a + (i - 1)\delta_u, c + (j - 1)\delta_v), \\ &\dots \\ (b, d) &= (a + n\delta_u, c + m\delta_v) \quad . \end{aligned} \quad (25-20)$$

Med hvert af disse faste punkter (u_i, v_j) som udviklingspunkt kan vi betragte Taylor's grænseformel for hver af de 3 koordinat-funktioner for $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ til første orden med tilhørende epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{r}(u_i, v_j) \\ &\quad + \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot (u - u_i) \\ &\quad + \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot (v - v_j) \\ &\quad + \rho_{ij} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(u - u_i, v - v_j) \quad , \end{aligned} \quad (25-21)$$

hvor $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$. Her betegner $\rho_{ij} = \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_j)^2}$ afstanden mellem det variable punkt (u, v) og det faste udviklingspunkt (u_i, v_j) i parameterområdet. Der gælder her, at $\varepsilon_{ij}(u - u_i, v - v_j) \rightarrow (0, 0, 0) = \mathbf{0}$ for $(u - u_i, v - v_j) \rightarrow (0, 0)$.

Hvert delrektangel $[u_i, u_i + \delta_u] \times [v_j, v_j + \delta_v]$ afbildes på flade-stykket $\mathbf{r}(u, v)$, $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$ og dette fladestykke kan vi approksimere med den lineære del af udtrykket i (25.1.21), som fås ved at fjerne ε_{ij} -bidraget fra højre side i (25.1.21):

$$\mathbf{r}_{\text{app},ij}(u, v) = \mathbf{r}(u_i, v_j) + \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot (u - u_i) + \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot (v - v_j) \quad , \quad (25-22)$$

hvor u og v stadig gennemløber del-intervallerne $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$.

Disse lineære approksimationer er parallelogrammer, som udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot \delta_u$ og $\mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot \delta_v$. Se Figur 25.4 hvor de approksimerende parallelogrammer er vist for en parametrisering af en kegleflade.

Areal

Hvert enkelt af de ialt $n \cdot m$ approksimerende parallelogrammer har et areal. Arealet af det (i, j) 'te parallelogram er længden af krydsproduktet af de to vektorer, der udspænder det pågældende parallelogram:

$$\Delta \text{Areal}_{ij} = |(\mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot \delta_u) \times (\mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot \delta_v)| = \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \quad . \quad (25-23)$$

|||| Opgave 25.13

Bevis denne påstand: Arealet af et parallelogram er længden af krydsproduktet af de to vektorer, der udspænder parallelogrammet.

Summen af disse ialt $n \cdot m$ arealer er klart en god approksimation til arealet af hele fladestykket, således at vi har

$$\text{Areal}_{\text{app}}(n, m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta \text{Areal}_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \quad . \quad (25-24)$$

Da ovenstående sum er en dobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ over parameter-rektanglet $[a, b] \times [c, d]$ får vi i grænsen, hvor n og m begge går mod

uendelig (jvf. eNote 21):

$$\text{Areal}_{\text{app}}(n, m) \rightarrow \text{Areal} = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv = \int_{E_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu \quad \text{for } n, m \rightarrow \infty . \quad (25-25)$$

Dette er begrundelsen for definitionen af arealet af en parametriseret flade som angivet ovenfor, nemlig som fladeintegralet af den konstante funktion 1.

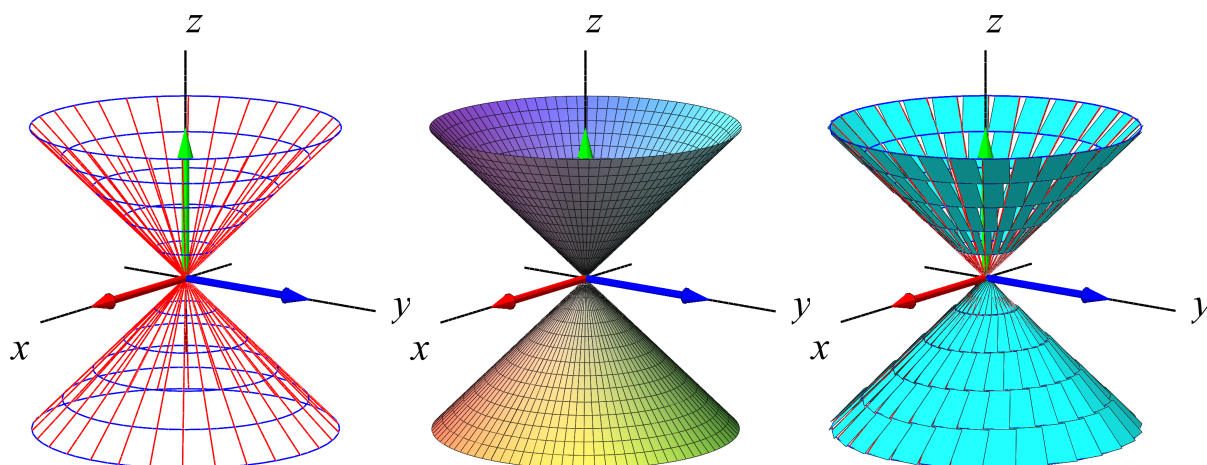


Figure 25.4: Kegle-fladen er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u)$, $u \in [-1, 1]$, $v \in [-\pi, \pi]$. Et system af koordinatkurver på fladen er vist til venstre og de tilsvarende areal-approksimerende parallelgrammer er vist til højre.

|||| Opgave 25.14

Vis, at den givne parameterfremstilling i figur 25.4 hverken er regulær eller en-entydig i det givne parameterområde. Overvej, om der findes en regulær parameterfremstilling for keglefladen.

|||| Opgave 25.15

Hvorfor er de approksimerende parallelgrammer på den øvre halvdel af keglefladen i figur 25.4 mindre end de tilsvarende parallelgrammer (med samme afstand til toppunktet) på den nedre halvdel?

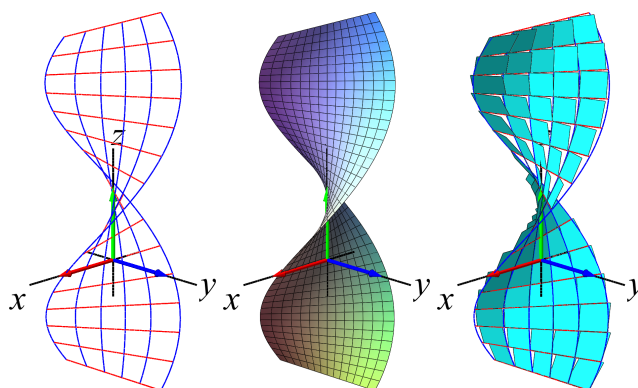


Figure 25.5: Denne vindelflade er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (\sinh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v), v)$. Figuren viser også en approksimation af fladen med parallelogrammer, som faktisk alle er kvadrater af forskellig størrelse. Se opgave 25.16.

||| Opgave 25.16

Vis, at de approksimerende parallelogrammer i figur 25.5 alle er kvadrater.

Massen af en flade

Hvis vi nu antager, at hvert enkelt parallelogram i (25.1.22) tildeles en konstant massetæthed givet ved værdien af funktionen $f(x, y, z)$ i parallelogrammets kontaktpunkt med fladen, så får vi massen af det (i, j) 'te parallelogram :

$$\begin{aligned} \Delta M_{ij} &= f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j), z(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \\ &= f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \quad . \end{aligned} \quad (25-26)$$

Den totale masse af hele systemet af parallelogrammer er derfor følgende, som er en god approksimation til massen af hele fladen når denne gives massetætheden $f(\mathbf{r}(u, v))$ i punktet $\mathbf{r}(u, v)$.

$$M_{\text{app}}(n, m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta M_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \quad . \quad (25-27)$$

Dette er en dobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ over parameter-rektanglet $[a, b] \times [c, d]$. Vi får altså i grænsen, hvor n og m går mod

uendelig:

$$M_{\text{app}}(n, m) \rightarrow M = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \quad \text{for } n, m \rightarrow \infty . \quad (25-28)$$

Dermed har vi motiveret definitionen af massen af en parametriseret flade med massetætheden $f(\mathbf{r}(u, v))$ og dermed også den generelle definition af fladeintegralet, definition 25.2.

25.1.2 Omdrejningsflader

Omdrejningsflader er de specielle flader, der fremkommer ved at dreje en plan kurve omkring en ret linje (omdrejningsaksen) som også ligger i samme plan. Kurven kaldes en *profil-kurve* eller en *frembringer-kurve*. Det antages, at profilkurven ikke skærer omdrejningsaksen. Profilkurven vælges typisk i (x, z) -planen og drejes om z -aksen i et (x, y, z) -koordinatsystem. Profilkurven kan så repræsenteres ved en parameterfremstilling således:

$$G_{\mathbf{p}}: \quad \mathbf{p}(u) = (g(u), 0, h(u)) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [a, b], \quad (25-29)$$

hvor $g(u) > 0$ og $h(u)$ er givne funktioner af parameteren u . Den omdrejningsflade, der fremkommer ved at dreje $G_{\mathbf{p}}$ en hel gang omkring z -aksen har derfor parameterfremstillingen:

$$FG_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u)), \quad u \in [a, b], \quad v \in [-\pi, \pi]. \quad (25-30)$$

|||| Opgave 25.17

Vis, at Jacobifunktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ for parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v)$ for den generelle omdrejningsflade $FG_{\mathbf{r}}$ i (25.1.30) er givet ved

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = g(u) \sqrt{(h'(u))^2 + (g'(u))^2}. \quad (25-31)$$

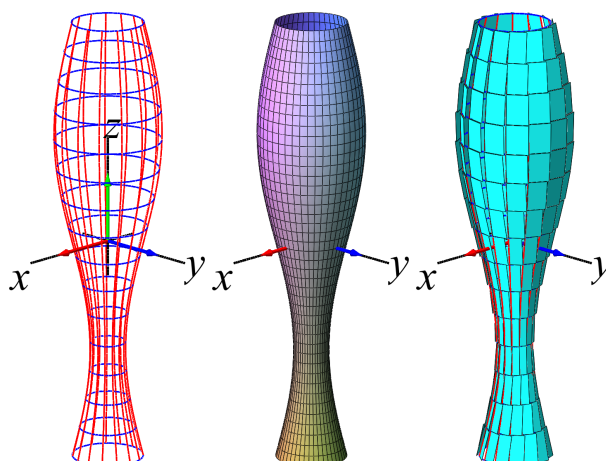


Figure 25.6: Omdrejnings-fladen her er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u))$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$, hvor $g(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin(u)$ og $h(u) = u$.

||| Eksempel 25.18 Torus-areal

En given torus er parametriseret på følgende måde:

$$\mathcal{T} : \mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u)), \quad u \in [-\pi, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi], \quad (25-32)$$

hvor $g(u) = 2 + \cos(u)$ og $h(u) = \sin(u)$.

Jacobifunktionen er

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = g(u) \sqrt{(h'(u))^2 + (g'(u))^2} = 2 + \cos(u), \quad (25-33)$$

så arealet af denne torus er simpelthen:

$$\text{Areal}(\mathcal{T}) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(u)) \, du \, dv = 8\pi^2. \quad (25-34)$$

Hvis vi 'belaster' denne torus med en vægtfunktion, massetæthed, givet ved funktionen $f(x, y, z) = 2 + z$ får vi den totale vægt af torusen:

$$M(\mathcal{T}) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 + \sin(u)) \cdot (2 + \cos(u)) \, du \, dv = 16\pi^2. \quad (25-35)$$

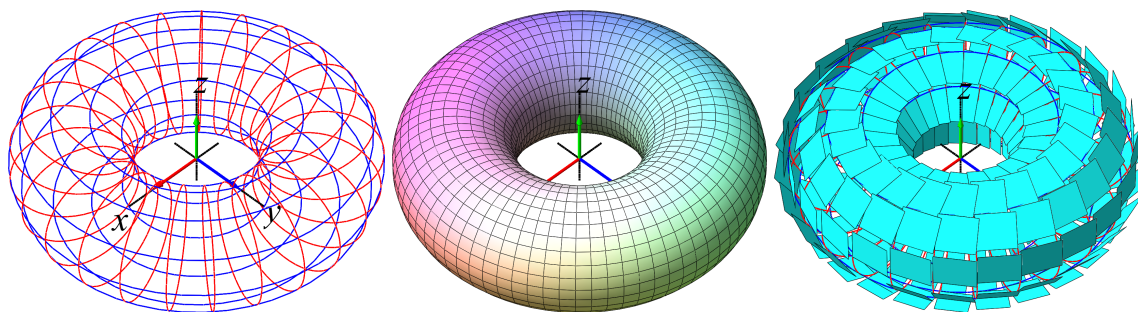


Figure 25.7: Denne såkaldte torus er omdrejningsfladen givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v) = (g(u) \cos(v), g(u) \sin(v), h(u))$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$, hvor nu $g(u) = 2 + \cos(u)$ og $h(u) = \sin(u)$.

25.2 Rum-integraler

Et parametriseret rumligt område er på samme måde som kurver og flader givet ved en parameterfremstilling, nu med følgende form hvor de tre koordinatfunktioner x , y , og z nu er funktioner af de ialt 3 parameter-variable u , v , og w :

$$\Omega_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}^3, \quad (25-36)$$

$$u \in [a, b], \quad v \in [c, d], \quad w \in [h, l].$$

|||| Definition 25.19 Rumintegral

Lad $f(x, y, z)$ betegne en kontinuert funktion i \mathbb{R}^3 . Rumintegralet af funktionen $f(x, y, z)$ over det parametriserede rumlige område $\Omega_{\mathbf{r}}$ defineres ved

$$\int_{\Omega_{\mathbf{r}}} f \, d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw, \quad (25-37)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ nu er givet ved

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) = |(\mathbf{r}'_u(u, v, w) \times \mathbf{r}'_v(u, v, w)) \cdot \mathbf{r}'_w(u, v, w)|. \quad (25-38)$$

Det vil sige, $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ er volumenet (her beregnet som et rumprodukt) af det parallelepipedum, der på stedet $\mathbf{r}(u, v, w)$ udspringes af de tre koordinatkurvetangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v, w)$, $\mathbf{r}'_v(u, v, w)$ og $\mathbf{r}'_w(u, v, w)$.

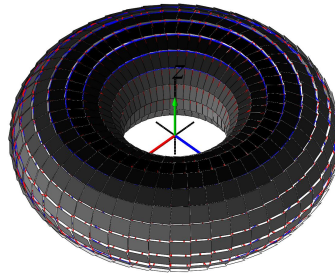


Figure 25.8: Denne torus er den samme som i figur 25.7, men er her givet vægtfunktionen $f(x, y, z) = 2 + z$. Den totale masse af den vgtede torus er $M = 16\pi^2$.

|||| Opgave 25.20

Vis, at Jacobifunktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ også kan findes som den numeriske værdi af determinanten af den matrix, der som søjler har koordinaterne for de tre vektorer $\mathbf{r}'_u(u, v, w)$, $\mathbf{r}'_v(u, v, w)$ og $\mathbf{r}'_w(u, v, w)$.

|||| Definition 25.21 Regulær parameterfremstilling

Parameterfremstillingen i (25.2.36) kaldes en *regulær parameterfremstilling* hvis $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) > 0$ for alle $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, $w \in [h, l]$.

||| Definition 25.22 En-entydig parameterfremstilling

Som for kurver og flader vil vi kalde parameterfremstillingen i (25.2.36) en-entydig hvis forskellige punkter i definitionsområdet afbildes i forskellige punkter i billedmængden.

||| Definition 25.23 Rumfang, volumen

Volumenet eller rumfanget af det rumlige område

$$\Omega_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad , \quad (25-39)$$

hvor

$$u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \quad \text{og} \quad w \in [h, l] \quad , \quad (25-40)$$

defineres som rumintegralet af den konstante funktion 1:

$$\text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) = \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw \quad . \quad (25-41)$$

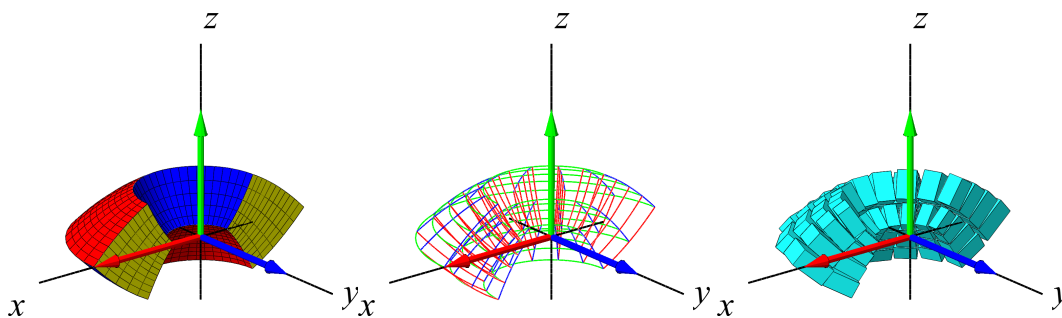


Figure 25.9: Billeder af det rumlige område givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (u v \cos(w), u v \sin(w), \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$, $u \in [\frac{1}{2}, 1]$, $v \in [\frac{1}{2}, 1]$, $w \in [\pi, 2\pi]$.

||| Opgave 25.24

Vis, at parameterfremstillingen i figur 25.9 er regulær og en-entydig.

25.2.1 Motivering af rumintegralet

Intervallerne $[a, b]$, $[c, d]$ og $[h, l]$ inddeles i henholdsvis n , m og q lige store dele. Så har hvert u -delinterval længden $\delta_u = (b - a)/n$, hvert v -delinterval har længden $\delta_v = (d - c)/m$ og hvert w -interval har længden $\delta_w = (l - h)/q$. Tilsvarende bliver depunkternes koordinater i (u, v, w) -parameterområdet (som her er det retvinklede 'kasse-område' $[a, b] \times [c, d] \times [h, l]$ i \mathbb{R}^3).

$$\begin{aligned} (u_1, v_1, w_1) &= (a, c, h), \\ &\dots \\ (u_i, v_j, w_k) &= (a + (i - 1)\delta_u, c + (j - 1)\delta_v, h + (k - 1)\delta_w), \\ &\dots \\ (b, d, l) &= (a + n\delta_u, c + m\delta_v, h + q\delta_w) \quad . \end{aligned} \quad (25-42)$$

Med hvert af disse faste punkter (u_i, v_j, w_k) som udviklingspunkt kan vi igen bruge Taylors grænseformel for hver af de 3 koordinat-funktioner for

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

til første orden og med tilhørende epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v, w) &= \mathbf{r}(u_i, v_j, w_k) \\ &+ \mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot (u - u_i) \\ &+ \mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot (v - v_j) \\ &+ \mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot (w - w_k) \\ &+ \rho_{ijk} \cdot \varepsilon_{ijk}(u - u_i, v - v_j, w - w_k) \quad , \end{aligned} \quad (25-43)$$

hvor $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$, $w \in [w_k, w_k + \delta_w]$. Afstanden mellem det variable punkt (u, v, w) og det faste punkt (u_i, v_j, w_k) i parameterområdet betegnes med ρ_{ijk} og vi har som før $\varepsilon_{ijk}(u - u_i, v - v_j, w - w_k) \rightarrow \mathbf{0}$ for $(u - u_i, v - v_j, w - w_k) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Hvert parameter-delområde eller delkasse $[u_i, u_i + \delta_u] \times [v_j, v_j + \delta_v] \times [w_k, w_k + \delta_w]$ afbildes på det rumlige billed-område $\mathbf{r}(u, v, w)$, $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$, $w \in [w_k, w_k + \delta_w]$ i billedrummet og dette område kan vi approksimere med den lineære del

af udtrykket i (25.2.43), som fås ved at fjerne ε_{ijk} -bidraget fra højre side i (25.2.43):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{app } ijk}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{r}(u_i, v_j, w_k) \\ &\quad + \mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot (u - u_i) \\ &\quad + \mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot (v - v_j) \\ &\quad + \mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot (w - w_k) \quad , \end{aligned} \quad (25-44)$$

hvor vi stadig har at $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$, $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$, $w \in [w_j, w_j + \delta_w]$.

Disse lineære rumlige approksimationer er parallelepipeda, som udspændes af de tre tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u$, $\mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_v$ og $\mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_w$.

Volumen

Hvert enkelt af de ialt $n m q$ approksimerende parallelepipeda har et volumen. Volumen af det (i, j, k) 'te parallelepipedum er den numeriske værdi af rumproduktet af de tre vektorer, der udspænder det pågældende parallelepipedum:

$$\begin{aligned} \Delta \text{Vol}_{ijk} &= |((\mathbf{r}'_u(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u) \times (\mathbf{r}'_v(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_v)) \cdot (\mathbf{r}'_w(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_w)| \\ &= \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \cdot \delta_v \cdot \delta_w \quad . \end{aligned} \quad (25-45)$$

||| Opgave 25.25

Bevis denne påstand: Volumen af et parallelepipedum er den numeriske værdi af rumproduktet af de tre udspændende vektorer.

Summen af de ialt $n m q$ volumener er en god approksimation til volumen af hele det rumlige område, således at vi har

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{\text{app}}(n, m, q) &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta \text{Vol}_{ijk} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w \quad . \end{aligned} \quad (25-46)$$

Da ovenstående sum er en tredobbelt integralsum for den kontinuerte funktion af de tre variable, $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$, over parameter-kassen $[a, b] \times [c, d] \times [h, l]$ får vi i grænsen,

hvor n , m og q alle går mod uendelig:

$$\text{Vol}_{\text{app}}(n, m, q) \rightarrow \text{Vol} = \int_h^l \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_r(u, v, w) du dv dw \quad \text{for } n, m, q \rightarrow \infty . \quad (25-47)$$

Dette er begrundelsen for definitionen af volumenet af et parametriseret område i rummet som angivet ovenfor, nemlig som rumintegralet af den konstante funktion 1.

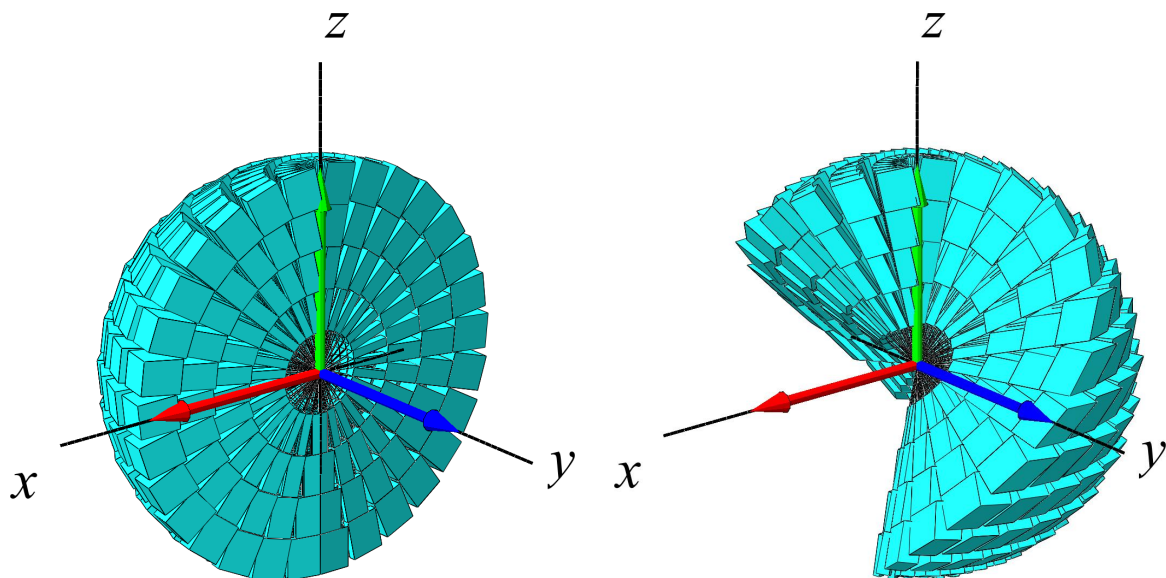


Figure 25.10: To forskellige delvise kugle-fyldninger med parallelepipeda. Se Opgave 25.26.

||| Opgave 25.26

Kugle-parameterfremstillingerne i figur 25.10 er henholdsvis følgende:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(u, v, w) &= [w \sin(u) \cos(v), w \sin(u) \sin(v), w \cos(u)] \\ \mathbf{r}_2(u, v, w) &= [w \sin(v) \cos(u + v), w \sin(v) \sin(u + v), w \cos(v)] , \end{aligned}$$

hvor parameterintervallerne i begge tilfælde er givet ved:

$$u \in [-\pi, 0] , v \in [0, \pi] , w \in [0, 1] .$$

Bestem Jacobi-funktionerne for hver af de to parameterfremstillinger, og vis, at begge de viste rumlige områder har volumenet $2\pi/3$, altså præcis halvdelen af hele enheds-kuglens volumen.

Masse

Hvis vi nu antager, at hvert enkelt parallelepipedum givet ved (25.2.44) tildeles en konstant massetæthed som er givet ved værdien af funktionen $f(x, y, z)$ på stedet $\mathbf{r}(u_i, v_j, w_k)$, så bliver massen af det (i, j, k) 'te parallelepipedum:

$$\begin{aligned} \Delta M_{ijk} &= f(x(u_i, v_j, w_k), y(u_i, v_j, w_k), z(u_i, v_j, w_k)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w \\ &= f(\mathbf{r}(u_i, v_j, w_k)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w \quad . \end{aligned} \quad (25-48)$$

Den totale masse af hele systemet af approksimerende parallelepipeda er derfor følgende, som nødvendigvis er en god approksimation til massen af hele det rumlige område:

$$\begin{aligned} M_{\text{app}}(n, m, q) &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta M_{ijk} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j, w_k)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j, w_k) \cdot \delta_u \delta_v \delta_w \quad . \end{aligned} \quad (25-49)$$

Dette er en tredobbelt integralsum for den kontinuerte funktion $f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ over parameter-kassen $[a, b] \times [c, d] \times [h, l]$. Vi får i grænsen, hvor n, m og q går mod uendelig:

$$\begin{aligned} M_{\text{app}}(n, m, q) &\rightarrow M = \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) du dv dw \\ \text{for } n, m, q &\rightarrow \infty \quad . \end{aligned} \quad (25-50)$$

Dermed har vi motiveret definitionen af massen af et parametriseret område med massetætheden $f(\mathbf{r}(u, v, w))$ og dermed også den generelle definition 25.19 af rumintegralet.

|||| Opgave 25.27

I figur 25.11 betragtes følgende parametrisering af et rumligt område:

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (u \sin(v) \cos(w), u \sin(v) \sin(w), u \cos(v)) \quad , \quad (25-51)$$

hvor $u \in [1/2, 1]$, $v \in [\pi/3, 2\pi/3]$, og $w \in [-\pi, \pi]$. Ved afbildning af det kasseformede parameterområde forventes ialt 6 sideflader for billed-mængden, dvs. for det rumlige område, der fremkommer ved parameterfremstillingen. Vi ser på figuren kun tre af de 6 sideflader. Hvor er de andre og hvordan ser de ud?

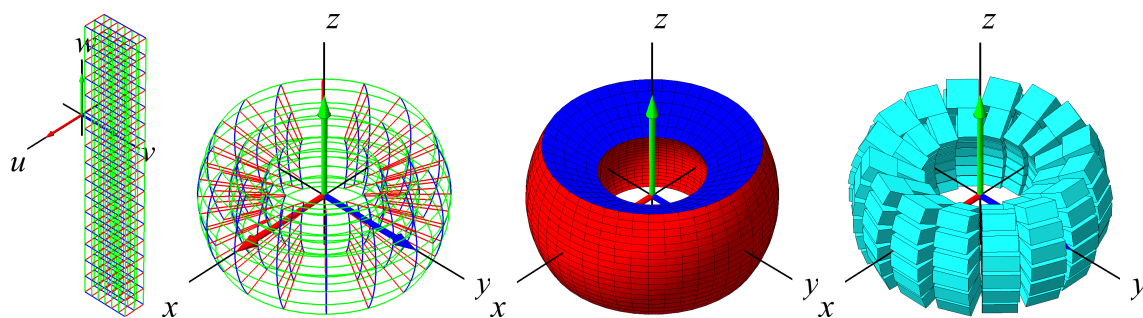


Figure 25.11: Dette rumlige område er givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (u \sin(v) \cos(w), u \sin(v) \sin(w), u \cos(v))$, $u \in [1/2, 1]$, $v \in [\pi/3, 2\pi/3]$, $w \in [-\pi, \pi]$. Parameterkassen, koordinatkurverne, billedet af det rumlige område ved parameterfremstillingen og et system af volumen-approksimerende parallelipipida er vist.

|||| Eksempel 25.28 Rumfang af massiv ellipsoide

En massiv ellipsoide med halvaksler a , b , og c har en parameterfremstilling:

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (a u \sin(v) \cos(w), b u \sin(v) \sin(w), c u \cos(v)) \quad , \quad (25-52)$$

hvor $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi]$ og $w \in [-\pi, \pi]$.

Jacobi-funktionen for denne parametrisering er $\text{Jacobi}(u, v, w) = abc u^2 \sin(v)$, og deraf følger volumenet ved tredobbelt integration:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) &= \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw \\ &= abc \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 u^2 \sin(v) \, du \, dv \, dw \\ &= \frac{4}{3} \pi abc \quad . \end{aligned} \quad (25-53)$$

For en massiv kugle B_a med radius a får vi derfor rumfanget

$$\text{Vol}(B_a) = \frac{4}{3} \pi \cdot a^3 \quad . \quad (25-54)$$

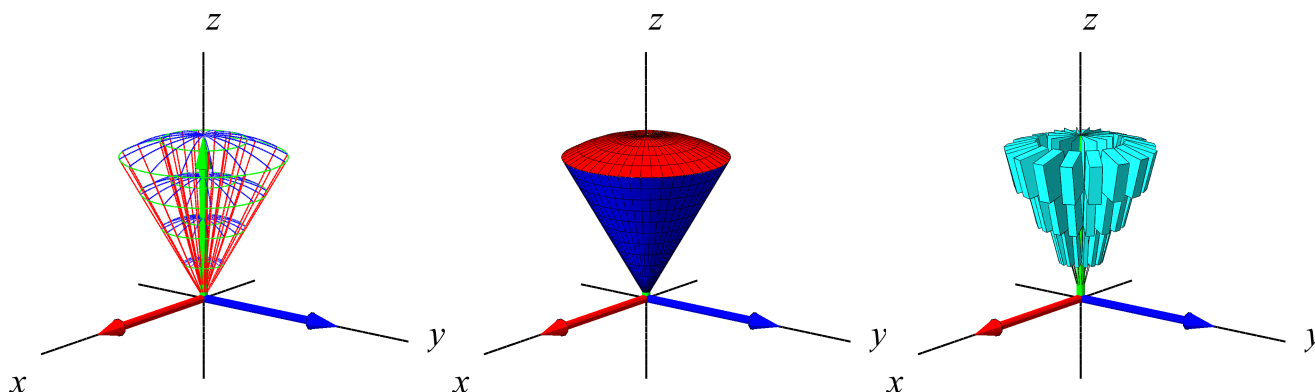


Figure 25.12: Dette rumlige område er et 'rumvinkel'-udsnit af kuglefladen repræsenteret ved $\mathbf{r}(u, v, w) = (u \sin(v) \cos(w), u \sin(v) \sin(w), u \cos(v))$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi/6]$, $w \in [-\pi, \pi]$.

|||| Eksempel 25.29 Graf-flade-afgrænset rumligt område

En positiv funktion $h(x, y)$ af to variable (x, y) har en grafplade, der over et givet område P i (x, y) -planen afgrænser et rumligt område. Det er let at parametrisere det rumlige område, når først det plane område er parametriseret.

Hvis det plane område er givet ved et rektangel $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ har vi parameterfremstillingen for det rumlige område:

$$\Omega_r : \mathbf{r}(u, v, w) = (u, v, w \cdot h(u, v)) \quad , \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d] \quad , \quad w \in [0, 1] \quad . \quad (25-55)$$

Jacobifunktionen er særlig simpel:

$$\begin{aligned} \text{Jacobi}_r(u, v, w) &= |((1, 0, w \cdot h'_u(u, v)) \times (0, 1, w \cdot h'_v(u, v))) \cdot (0, 0, h(u, v))| \\ &= |((1, 0, *) \times (0, 1, **)) \cdot (0, 0, h(u, v))| \\ &= h(u, v) \quad . \end{aligned} \quad (25-56)$$

Rumfanget af det rumlige område, som graf-fladen afgrænser sammen med det plane område i (x, y) -planen er derfor:

$$\text{Vol}(\Omega_r) = \int_0^1 \int_c^d \int_a^b h(u, v) \, du \, dv \, dw = \int_c^d \int_a^b h(u, v) \, du \, dv \quad . \quad (25-57)$$

Hvis det plane område P i (x, y) -planen ikke er et rektangel som ovenfor, må vi først parametrisere P . Vi antager derfor nu, at det plane område P er billedet af et rektangulært

parameterområde ved en vektorfunktion $\hat{\mathbf{r}}$:

$$P : \hat{\mathbf{r}}(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v)) \quad , u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \quad (25-58)$$

hvor $\xi(u, v)$ og $\eta(u, v)$ er givne funktioner af u og v . Så er det rumlige område imellem P og graffladen for $h(x, y)$ givet ved parameterfremstillingen:

$$\Omega_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v, w) = (\xi(u, v), \eta(u, v), w \cdot h(\xi(u, v), \eta(u, v))) \quad , \quad (25-59)$$

hvor $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ og $w \in [0, 1]$ med tilhørende Jacobi-funktion:

$$\begin{aligned} \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) &= \\ &= |((\xi'_u(u, v), \eta'_u(u, v), *) \times (\xi'_v(u, v), \eta'_v(u, v), **)) \cdot (0, 0, h(\xi(u, v), \eta(u, v))))| \quad (25-60) \\ &= h(\xi(u, v), \eta(u, v)) \cdot \text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) \quad . \end{aligned}$$

Rumfanget af det rumlig område, som graf-fladen afgrænser sammen med det plane område i (x, y) -planen er derfor i denne mere generelle situation:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) &= \int_0^1 \int_c^d \int_a^b h(\xi(u, v), \eta(u, v)) \cdot \text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) \, du \, dv \, dw \\ &= \int_c^d \int_a^b h(\xi(u, v), \eta(u, v)) \cdot \text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) \, du \, dv \quad . \end{aligned} \quad (25-61)$$

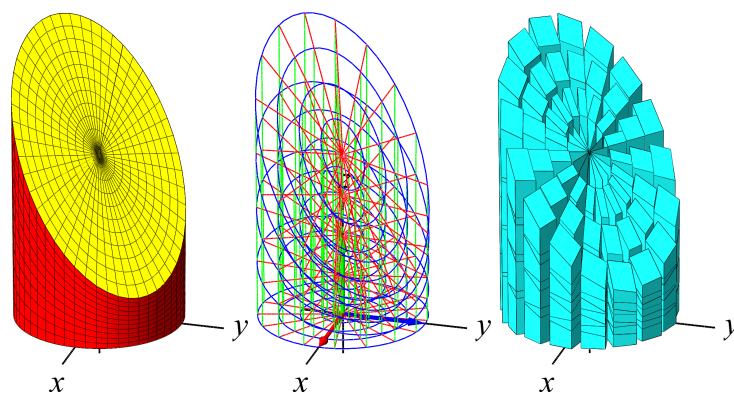


Figure 25.13: Planetariet er afgrænset af graffladen for $f(x, y) = 2 - x - y$ over en cirkulær grundplan i (x, y) -planen med radius 1 og centrum i $(0, 0)$. Rumfanget er 2π .

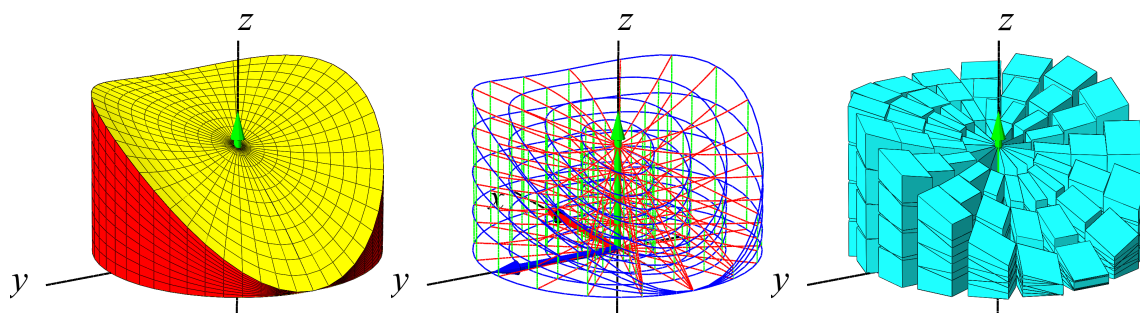


Figure 25.14: Et 'planetarium' med en lidt mere kompliceret tag-graf-flade; den benyttede funktion er her $f(x, y) = y^2 - x^2 + 2x + 3$. Rumfanget er ca. 2.36.

|||| Eksempel 25.30 Planetariet

Rumfanget i en cylinder mellem to plane afskæringer (se figur 25.13) er bestemt ved parameterfremstillingen:

$$\Omega_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v, w) = (\xi(u, v), \eta(u, v), w \cdot h(\xi(u, v), \eta(u, v))) \quad , \quad (25-62)$$

hvor højdefunktionen er $h(x, y) = 2 - x - y$, parametrene er $(u, v) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi]$, $w \in [0, 1]$, og det cirkulære grundareal er givet ved

$$P : \hat{\mathbf{r}}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v)) \quad , u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [-\pi, \pi] \quad (25-63)$$

med Jacobi-funktionen

$$\text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) = u \quad , \quad (25-64)$$

således at

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 h(\xi(u, v), \eta(u, v)) \cdot \text{Jacobi}_{\hat{\mathbf{r}}}(u, v) \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (2 - u \cdot \cos(v) - u \cdot \sin(v)) \cdot u \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (2u - u^2 \cdot \cos(v) - u^2 \cdot \sin(v)) \, du \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left([u^2]_{u=0}^{u=1} - \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_{u=0}^{u=1} \cdot \cos(v) - \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_{u=0}^{u=1} \cdot \sin(v) \right) \, dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \cos(v) - \frac{1}{3} \cdot \sin(v) \right) \, dv \\ &= 2 \cdot \pi \quad . \end{aligned} \quad (25-65)$$

Bemærk, at det rumfang også vha. symmetri kan findes meget lettere som halvdelen af rumfanget af den cylinder, der har samme grundflade og er skåret vinkelret i højden 4.

25.3 Omdrejningslegemer

Omdrejningslegemer er de specielle rumlige områder, der fremkommer ved at dreje et plant område (f.eks. defineret i (x, z) -planen) omkring en omdrejningsakse i samme plan (z -aksen), som antages at ligge udenfor området. Jævnfør definitionen af omdrejningsflader i afsnit 25.1.2.

Det plane område - profilområdet - repræsenteres ved en parameterfremstilling således:

$$P_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (g(u, v), 0, h(u, v)) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [a, b], \quad v \in [c, d], \quad (25-66)$$

hvor $g(u, v) > 0$ og $h(u, v)$ er givne funktioner af parametrene u og v . Det rumlige område, det legeme, der fremkommer ved at dreje profilområdet en hel gang omkring z -aksen har derfor parameterfremstillingen:

$$\Omega_{P_{\mathbf{r}}} : \mathbf{r}(u, v, w) = (g(u, v) \cos(w), g(u, v) \sin(w), h(u, v)) \in \mathbb{R}^3, \quad (25-67)$$

$$u \in [a, b], \quad v \in [c, d], \quad w \in [-\pi, \pi].$$

Figur 25.9 viser halvdelen af et omdrejningslegeme. Figur 25.11 viser overfladen af et omdrejningslegeme defineret ved brug af kuglekoordinater. Cylinderkoordinater i rummet giver tilsvarende velkendte omdrejningslegemer som f.eks. det, der er vist i figur 25.15.

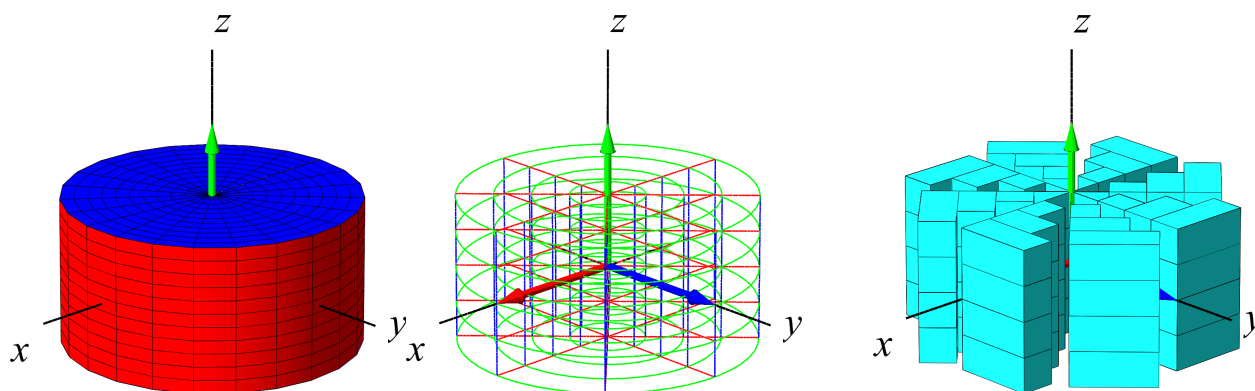


Figure 25.15: Cylinderkoordinatiseret rumligt område givet ved parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w) = (g(u, v) \cos(w), g(u, v) \sin(w), h(u, v))$, $u \in [0, \frac{1}{2}]$, $v \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $w \in [-\pi, \pi]$, hvor $g(u, v) = u$ og $h(u, v) = v$.

||| Opgave 25.31

Vis, at Jacobifunktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$ for parameterfremstillingen $\mathbf{r}(u, v, w)$ for det generelle omdrejningslegeme Ω_P i (25.3.67) er givet ved

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) = g(u, v) |g'_u(u, v) h'_v(u, v) - h'_u(u, v) g'_v(u, v)| . \quad (25-68)$$

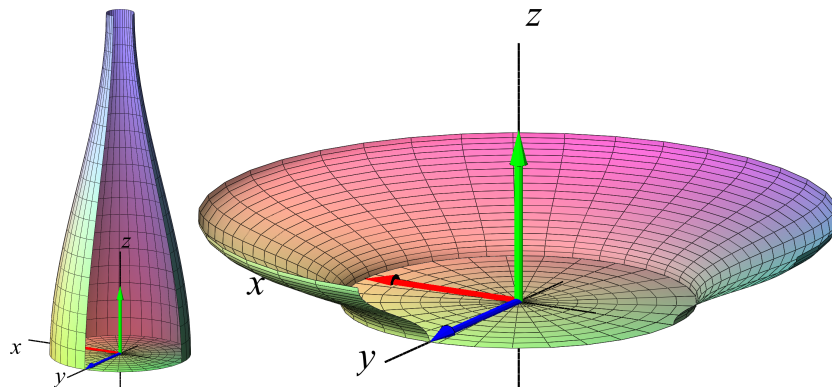


Figure 25.16: Dele af henholdsvis omdrejnings-flaske og -fad, se Opgave 25.32.

||| Opgave 25.32

En omdrejnings-flaske (eller -fad?) er (på nær bunden) givet ved sin profilkurves parameterfremstilling i (x, z) -planen således:

$$G_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(u) = (g(u), 0, h(u)) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [0, 1], \quad (25-69)$$

hvor

$$\begin{aligned} g(u) &= 2(R_1 - R_2)u^3 + 3(R_2 - R_1)u^2 + R_1 \\ h(u) &= H u, \end{aligned} \quad (25-70)$$

for passende valg af *positive* konstanter R_1 , R_2 , og H .

1. Plot forskellige versioner af disse omdrejningsflader, se f.eks. figur 25.16.
2. Vis, at omdrejningsfladen står vinkelret på (x, y) -planen for ethvert valg af positive konstanter R_1 , R_2 , og H .

3. Hvor meget rumfang (vand, f.eks.) kan omdrejningsfladen 'indeholde' for givne værdier af positive konstanter R_1 , R_2 , og H ?
4. Hvad er arealet af overfladen af omdrejningsfladen + bund for givne værdier af positive konstanter R_1 , R_2 , og H ?
5. Hvilke(t) valg af konstanter giver mest rumfang i forhold til det totale overfladeareal?

25.4 Flere arkitektonisk motiverede rumlige områder

|||| Opgave 25.33

Inspireret af Malmø's Turning Torso er det en interessant opgave at finde rumfang og overfladeareal af forskellige 'snoede' bygningsværker:

1. Find en parameterfremstilling for det rumlige område, der er vist i figur 25.17 til venstre. Vlg selv dimensionerne p din bygning, dvs. grundflade og højde. Vink: De opadgående sidelinjer er skruelinjer, se eksempel ?? i eNote 22 .
2. Hvad er rumfanget af din bygning?
3. Hvad er overfladearealet af bygningens sidevægge?
4. Med fastholdt højde og tværsnitsfigur: Vis, at rumfanget er uafhængig af drejningstallet (det antal gange tværsnitsfiguren drejes fra bund til top - for Torsoen er drejningstallet $1/5$). Hvordan afhænger overfladearealet af drejningstallet? Med hvilket drejningstal fås det største volumen i forhold til det totale overfladeareal (af sidevæggene)?

|||| Opgave 25.34

Find parameterfremstillinger af de to (højeste) tårne der vises i figur 25.18. Vælg selv dimensionerne. Vink: Tårnet i venstre billede har elliptiske tværsnit. Find rumfang og overfladeareal for hver af bygningerne.

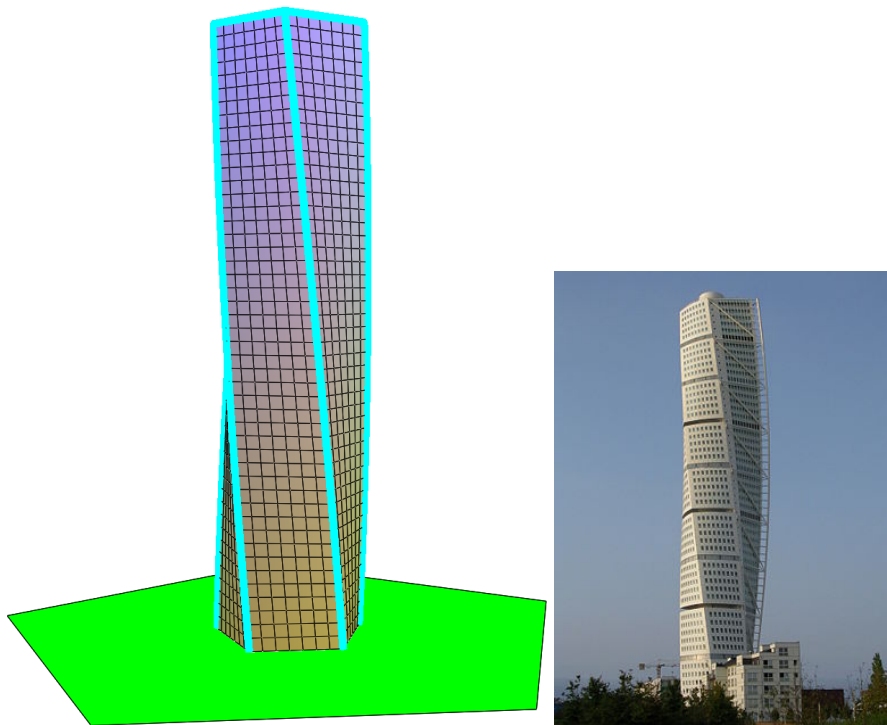


Figure 25.17: Fem-kantet Turning Torso model og 'the real thing in Malmø'.



Figure 25.18: Chinese-Canadian projekt.

25.5 Opsummering

Vi har i denne eNote opstillet de begreber og metoder der gør det muligt at beregne (vægtede) arealer og rumfang af henholdsvis flader og rumlige områder – for så vidt de er givet ved parameterfremstillinger ud fra rektangulære og kasseformede parameterområder. En række eksempler og opgaver viser hvordan meget forskellige flader og områder kan parametriseres ved rimeligt simple vektorfunktioner $\mathbf{r}(u, v)$ og $\mathbf{r}(u, v, w)$.

Når først en relevant parametrisering er opstillet er 'resten' kun et spørgsmål om at beregne den tilhørende Jacobifunktion $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ eller $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$, gange den med en eventuel vægtfunktion $f(x, y, z)$ restringeret til parametriseringens billedmængde i rummet, og til sidst beregne dobbelt- eller tredobbelt- integralet af dette produkt over parameter-rektanglet eller parameter-kassen:

- For en flade $F_{\mathbf{r}}$ med parameterfremstillingen

$$F_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [a, b], \quad v \in [c, d] \quad (25-71)$$

er integralet af (vægt-)funktionen $f(x, y, z)$ over fladen givet ved:

$$\int_{F_{\mathbf{r}}} f \, d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv, \quad (25-72)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| \quad (25-73)$$

er arealet af det parallelogram, der på stedet $\mathbf{r}(u, v)$ udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v)$ og $\mathbf{r}'_v(u, v)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{r}(u, v)$ på fladen.

- Specielt er arealet af $F_{\mathbf{r}}$ bestemt ved:

$$\text{Areal}(F_{\mathbf{r}}) = \int_{F_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) \, du \, dv. \quad (25-74)$$

- For et rumligt område $\Omega_{\mathbf{r}}$ med parameterfremstillingen

$$\Omega_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)), \quad (25-75)$$

hvor $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, og $w \in [h, l]$ er integralet af (vægt-)funktionen $f(x, y, z)$ over området givet ved:

$$\int_{\Omega_{\mathbf{r}}} f \, d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v, w)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw, \quad (25-76)$$

hvor Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w)$

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) = |(\mathbf{r}'_u(u, v, w) \times \mathbf{r}'_v(u, v, w)) \cdot \mathbf{r}'_w(u, v, w)| \quad (25-77)$$

er volumenet af det parallelepipedum, der på stedet $\mathbf{r}(u, v, w)$ udspændes af de tre tangentvektorer $\mathbf{r}'_u(u, v, w)$, $\mathbf{r}'_v(u, v, w)$, og $\mathbf{r}'_w(u, v, w)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{r}(u, v, w)$ i det rumlige område.

- Specielt er rumfanget af $\Omega_{\mathbf{r}}$ bestemt ved:

$$\text{Vol}(\Omega_{\mathbf{r}}) = \int_{\Omega_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_h^l \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v, w) \, du \, dv \, dw \quad . \quad (25-78)$$