

## |||| eNote 24

# Kurve- og plan-integraler

Vi vil her med udgangspunkt i de metoder og resultater der er opstillet i eNote 21 vise, hvordan Riemann-integralerne derfra kan benyttes til blandt andet at finde længder af kurver og arealer af plane områder, for så vidt de er beskrevet på en passende parameterform.

## 24.1 Kurveintegraler

Vi vil i udgangspunktet betragte kurver som er parametriserede på følgende måde ved en parameterfremstilling.

En parametriseret kurve  $K_r$  i rummet er givet ved en parameterfremstilling således:

$$K_r : \mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [a, b] \quad . \quad (24-1)$$



En given kurve kan sædvanligvis parametriseres på uendelig mange måder. Figur 24.1 viser tre forskellige parametriseringer af det rette linjestykke fra  $(0, -2, \frac{1}{2})$  til  $(0, 2, \frac{1}{2})$ . Figur 24.2 viser tilsvarende to forskellige parametriseringer af en cirkel med radius 1 og centrum i  $(0, 0, 0)$ . Figur 24.4 viser tilsvarende 2 forskellige parametriseringer af en skrueelinje.

Vi antager her og i det følgende, at de tre koordinatfunktioner  $x(u)$ ,  $y(u)$  og  $z(u)$  i parameterfremstillingerne er pæne funktioner af  $u$ . Vi antager simpelthen, at de alle tre er glatte funktioner af  $u$  således at de kan differentieres vilkårligt mange gange. Specielt

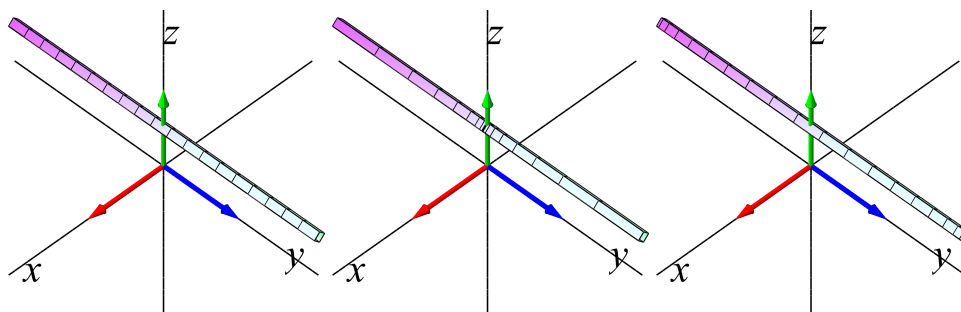


Figure 24.1: Linjestykket fra  $(0, -2, \frac{1}{2})$  til  $(0, 2, \frac{1}{2})$  er her parametriseret på 3 forskellige måder:  $\mathbf{r}_1(u) = (0, 2u, \frac{1}{2})$ ,  $u \in [-1, 1]$ ;  $\mathbf{r}_2(u) = (0, 2u^3, \frac{1}{2})$ ,  $u \in [-1, 1]$ , og  $\mathbf{r}_3(u) = (0, 2\sin(\frac{\pi}{2}u), \frac{1}{2})$ ,  $u \in [-1, 1]$ . Markeringerne på de enkelte linjestykker stammer fra den inddeling af det fælles parameterinterval  $[-1, 1]$  som består af 20 lige store delintervaller. Bemærk, at længden af de tre 'kurver' klart er den samme, selv om parametriseringerne er ret forskellige. Se Opgave 24.16.

er de afledede funktioner  $x'(u)$ ,  $y'(u)$  og  $z'(u)$  derfor kontinuerte i intervallet  $[a, b]$ . Så har vi også, at

$$|\mathbf{r}'(u)| = \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \quad (24-2)$$

er en kontinuert funktion i intervallet  $[a, b]$ . Specielt kan denne funktion derfor *integreres* over intervallet, jvf. eNote 21 og det har vi om lidt brug for i definition 24.5 nedenfor.

### ||| Definition 24.1 Regulær parameterfremstilling

En parameterfremstilling  $\mathbf{r}(u)$  for en kurve  $K_{\mathbf{r}}$  - som i (24.1.1) - siges at være en *regulær parameterfremstilling* hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\mathbf{r}'(u) \neq \mathbf{0} \quad \text{for alle } u \in [a, b] \quad . \quad (24-3)$$

### ||| Opgave 24.2

Hvilke af parameterfremstillingerne i figurerne 24.1, 24.2, 24.4, og 24.5 er regulære?

En parametriseret kurve er andet og mere end blot billedmængden (punkt-mængden)  $\mathbf{r}([a, b])$ , idet selve parametriseringen eksempelvis kan foreskrive at dele af punktmængden skal gennemløbes flere gange, se eksempel 24.10 nedenfor.

Man kan gerne tænke på intervallet  $[a, b]$  som en retlinet elastik i hvile. Vektorafbildningen  $\mathbf{r}$  deformerer elastikken (ind i rummet) ved at bøje, strække eller komprimere elastikken. En lokal strækning gør selvfølgelig elastikken lokalt længere, mens en lokal komprimering gør elastikken lokalt kortere. Et første naturligt spørgsmål er derfor hvor lang hele elastikken er efter brug af afbildningen  $\mathbf{r}$ . Kurveintegralet indføres blandt andet med henblik på at finde den totale længde af den deformerede kurve i rummet.



Vi kan ligeledes forestille os, at den parametriserede kurve selv er masseløs, men at den til gengæld efter deformationen med  $\mathbf{r}$  farves med en maling på en sådan måde at massetætheden af malingen langs med kurven (i gram pr. centimeter, f.eks.) er givet som en funktion  $f$  af stedet  $(x, y, z)$  i rummet – altså sådan at massetætheden af malingen på stedet  $\mathbf{r}(u)$  er  $f(\mathbf{r}(u))$ . Opgaven er da at finde den totale masse af den deformerede og farvelagte parametriserede kurve. Bemærk, at med lidt fantasi kan vi endda gerne tillade, at 'massetætheden'  $f$  antager negative værdier.

Disse forestillinger skal naturligvis kun hjælpe os til at få en passende intuitiv forståelse af de indførte begreber; vi skal i de relaterede eNoter se adskillige andre tolkninger og brug af kurveintegralet.

### ||| Eksempel 24.3 Skruelinje

Skruelinjen i figur 24.4 er præsenteret med 2 forskellige parametriseringer:

$$\mathbf{r}_1(u) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), \frac{\pi}{5}u), \quad u \in [-1, 1], \text{ og}$$

$$\mathbf{r}_2(u) = (\cos(2\pi u^3), \sin(2\pi u^3), \frac{\pi}{5}u^3), \quad u \in [-1, 1].$$

Markeringerne stammer fra den inddeling af *parameterintervallet*  $[-1, 1]$  som består af 200 lige store delintervaller. Kurverne er igen klart lige lange (se opgave 24.16).

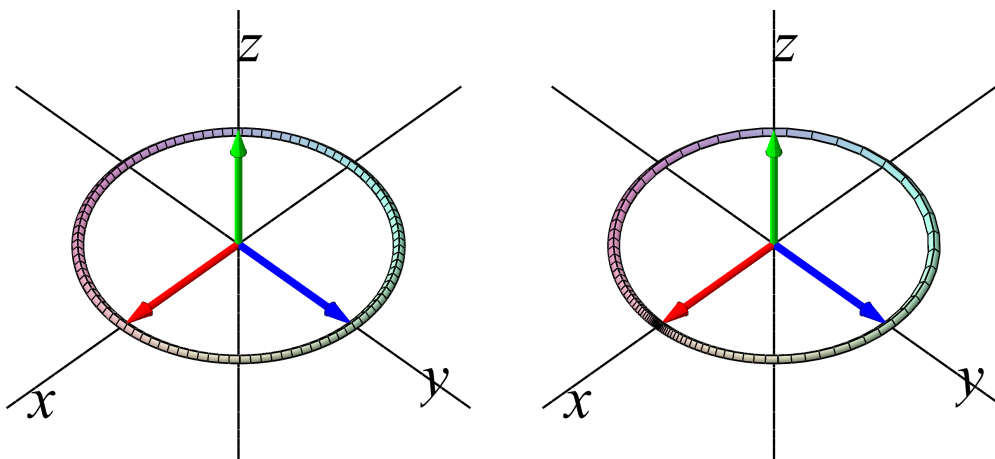


Figure 24.2: En cirkel i  $(x, y)$ -planen er her parametriseret på 2 forskellige måder:  $\mathbf{r}_1(u) = (\cos(\pi u), \sin(\pi u), 0)$ ,  $u \in [-1, 1]$ , og  $\mathbf{r}_2(u) = (\cos(\pi u^3), \sin(\pi u^3), 0)$ ,  $u \in [-1, 1]$ . Markeringerne stammer fra den inddeling af *parameterintervallet*  $[-1, 1]$  som består af 100 lige store delintervaller. Længden af cirklen er  $2\pi$  - uafhængig af parametriseringen.

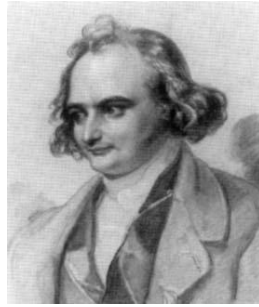
### ||| Eksempel 24.4 Knude

Knuden i Figur 24.5 har den noget komplicerede parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(u) = \left( -\frac{1}{3} \cos(u) - \frac{1}{15} \cos(5u) + \frac{1}{2} \sin(2u), \frac{1}{3} \sin(u) - \frac{1}{15} \sin(5u) - \frac{1}{2} \cos(2u), \frac{1}{3} \cos(3u) \right),$$

hvor  $u \in [-\pi, \pi]$ .

Vi definerer kurveintegration på følgende måde, og motiverer definitionen i afsnit 24.1.1 nedenfor:

Figure 24.3: Carl Gustav Jakob Jacobi. Se [Biografi](#).

### |||| Definition 24.5 Kurveintegral

Lad  $f(x, y, z)$  betegne en kontinuert funktion på  $\mathbb{R}^3$ . Kurveintegralet af funktionen  $f$  over en parametriseret kurve  $K_{\mathbf{r}}$  defineres ved

$$\int_{K_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) du \quad , \quad (24-4)$$

hvor Jacobi-funktionen  $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u)$  er givet ved:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) = |\mathbf{r}'(u)| \quad . \quad (24-5)$$

Jacobi-funktionen  $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u)$  betegner altså længden af tangentvektoren  $\mathbf{r}'(u)$  til kurven på stedet  $\mathbf{r}(u)$ .



Læg mærke til, at det symbol, der står på venstre side af lighedstegnet i (24.1.4), kun er et *symbol* for kurveintegralet. Det integral vi skal regne ud står på højre side. Og det kan lade sig gøre at integrere, fordi både  $f$ ,  $\mathbf{r}$  og  $|\mathbf{r}'|$  er kontinuerte, således at integranden er kontinuert.

Hvis vi indsætter  $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$  i udtrykket for kurveintegralet får vi:

$$\int_{K_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_a^b f(x(u), y(u), z(u)) \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du \quad . \quad (24-6)$$

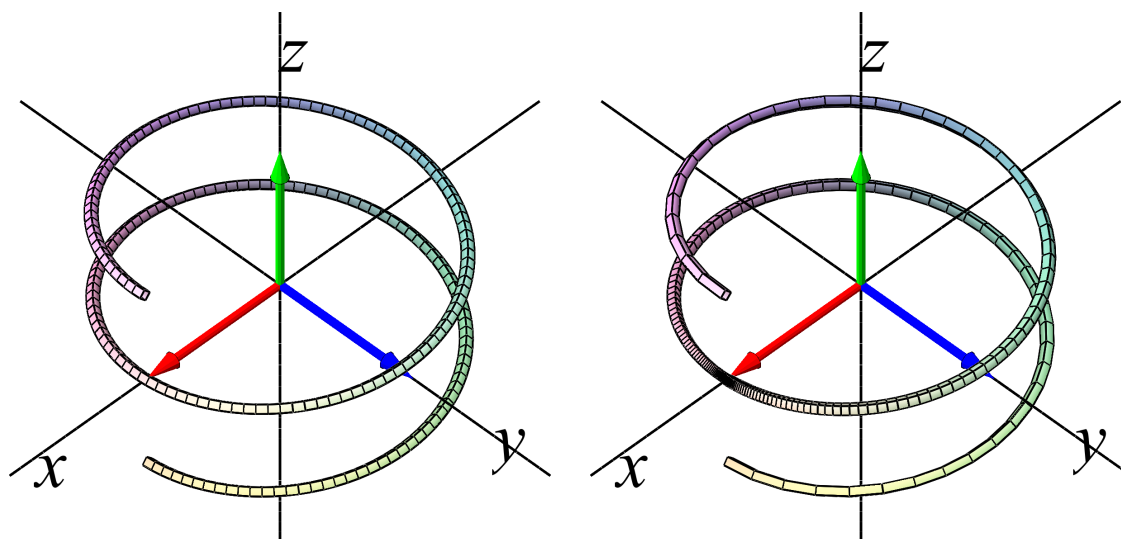


Figure 24.4: En skruelinje i rummet med to forskellige parametriseringer. Se eksempel 24.3.

### ||| Bemærkning 24.6

Parameterfremstillingen (24.1.1) for kurven er *regulær* hvis parameterfremstillingens Jacobi-funktion er positiv:  $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) = |\mathbf{r}'(u)| > 0$  for alle  $u$  i det givne interval  $[a, b]$ .

### ||| Eksempel 24.7 En vægtet cirkel

Givet funktionen  $f(x, y, z) = 7x$  og et parametriseret cirkelstykke

$$C_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Kurveintegralet af  $f$  over  $C_{\mathbf{r}}$  er

$$\begin{aligned} \int_{C_{\mathbf{r}}} f \, d\mu &= \int_{-\pi/2}^{\pi} f(x(u), y(u), z(u)) \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \, du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} 7 \cos(u) \sqrt{(-\sin(u))^2 + (\cos(u))^2} \, du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} 7 \cos(u) \, du = 7. \end{aligned}$$

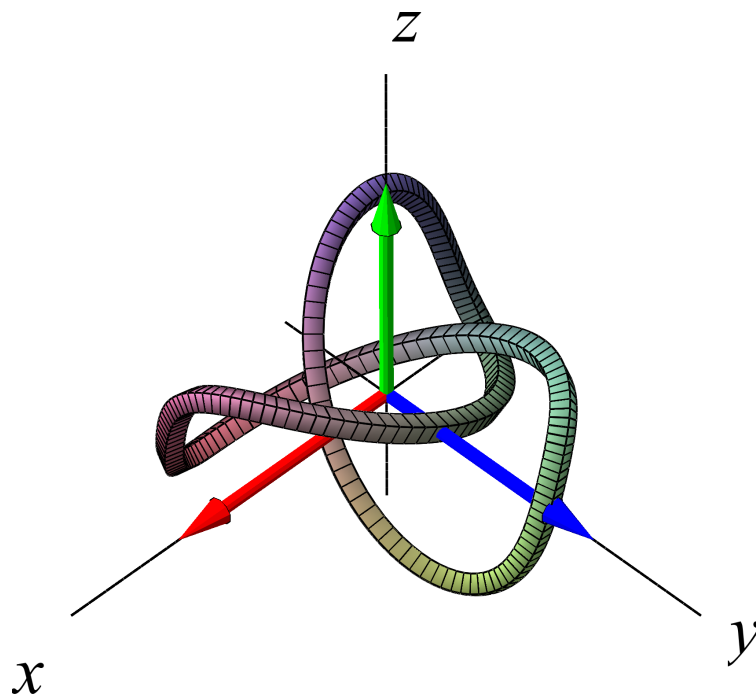


Figure 24.5: En knude. Se eksempel 24.4

Som nævnt, og som vi vil godtgøre nedenfor - i afsnit 24.1.1 om *Motivering af kurveintegralet* - kan kurveintegraler benyttes til at finde længder af parametriserede kurver og til at finde den totale masse af parametriserede kurver med givne massetætheder. Hvis massetætheden er konstant 1 fås længden (man kan finde længden af en sådan kurve ved at veje den):

### ||| Definition 24.8 Længden af en kurve

Længden af den parametriserede kurve

$$K_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u)) \quad , \quad u \in [a, b]$$

defineres som kurveintegralet

$$L(K_{\mathbf{r}}) = \int_{K_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_a^b |\mathbf{r}'(u)| \, du \quad . \quad (24-7)$$

### |||| Eksempel 24.9 Længde af cirkelstykke

Det parametriserede cirkelstykke

$$C_r : \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

har længden

$$\begin{aligned} L(C_r) &= \int_{C_r} 1 \, d\mu = \int_{-\pi/2}^{\pi} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \, du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} \sqrt{(-\sin(u))^2 + \cos(u)^2} \, du \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi} 1 \, du = \frac{3\pi}{2} . \end{aligned}$$

### |||| Eksempel 24.10 Multiple cirkelvindinger

Den parametriserede plane kurve

$$\tilde{C}_r : \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, 7\pi\right]$$

har længden  $L(\tilde{C}_r) = \frac{15\pi}{2}$  svarende til at parametriseringen 'lægger' det lange interval flere gange rundt på enhedscirklen!

### |||| Eksempel 24.11 Længden af en plan spiral

Den parametriserede plane spiral (se figur 24.6)

$$K_r : \mathbf{r}(u) = (u \cos(u), u \sin(u), 0), \quad u \in [0, \pi/2]$$

har længden

$$\begin{aligned} L(K_r) &= \int_{K_r} 1 \, d\mu = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \, du \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\cos(u) - u \sin(u))^2 + (\sin(u) + u \cos(u))^2} \, du \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + u^2} \, du \\ &= \left[ (1/2)u\sqrt{1+u^2} + (1/2) \operatorname{arcsinh}(u) \right]_0^{\pi/2} \\ &= (\pi/4)\sqrt{1 + (\pi/2)^2} + (1/2) \operatorname{arcsinh}(\pi/2) \\ &= (\pi/8)\sqrt{4 + \pi^2} + (1/2) \ln(2) - (1/2) \ln(-\pi + \sqrt{4 + \pi^2}) \\ &= 2.079 . \end{aligned} \tag{24-8}$$



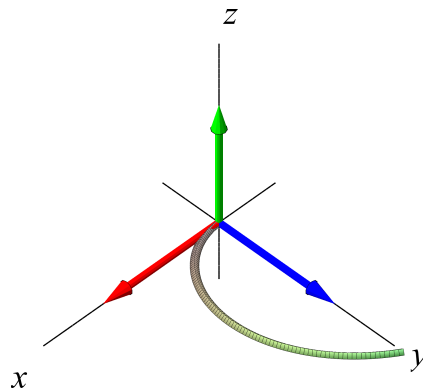


Figure 24.6: Del af en plan spiral. Se eksempel 24.11.

### ||| Eksempel 24.12 Ellipsens længde

Længden af en ellipse. Den parametriserede ellipse (se Figur 24.7)

$$K_r: \mathbf{r}(u) = (a \cos(u), b \sin(u), 0), \quad u \in [-\pi, \pi]$$

har længden

$$\begin{aligned} L(K_r) &= \int_{K_r} 1 \, d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \, du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(u) + b^2 \cos^2(u)} \, du \\ &= 4aE \left( \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right), \end{aligned}$$

hvor  $E$  betegner det såkaldte fuldstændige elliptiske integral af 2. orden. Om funktionen  $E(u)$  nævner vi her kun, at funktionsværdien i  $u = 0$  er  $E(0) = \pi/2$ , således at ovenstående resultat betyder, at når ellipsen specielt er en cirkel, dvs. når  $a = b$ , så får vi den korrekte omkreds af cirklen med radius  $a$ :  $L = 2\pi a$ .

### ||| Eksempel 24.13 Skruelinjens længde

Den parametriserede skruelinje

$$K_r: \mathbf{r}(u) = (\cos(u), \sin(u), u), \quad u \in [-2\pi, 2\pi]$$

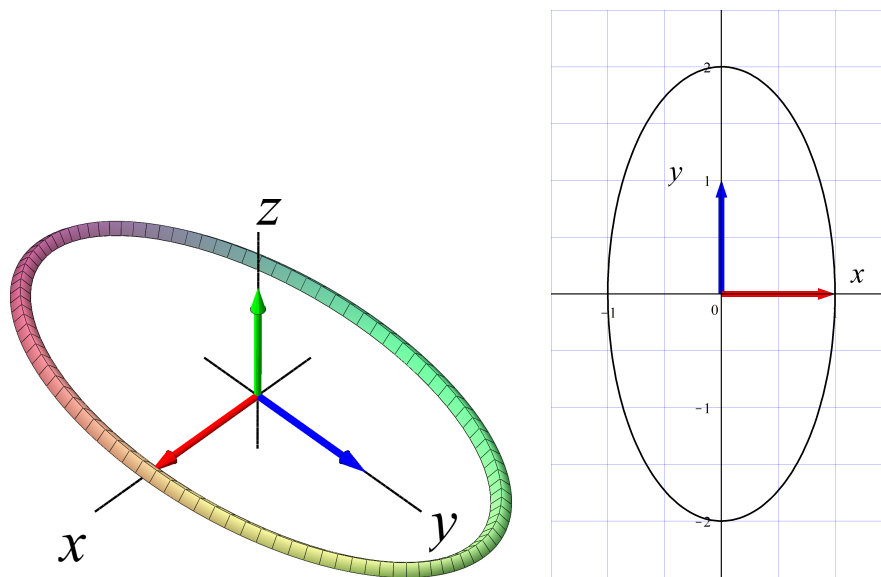


Figure 24.7: En ellipse med halvakser  $a = 1$  og  $b = 2$ . Se eksempel 24.12.

har længden

$$\begin{aligned}
 L(K_{\mathbf{r}}) &= \int_{K_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} \, du \\
 &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{(-\sin(u))^2 + (\cos(u))^2 + 1} \, du \\
 &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{2} \, du = 4\pi\sqrt{2} \quad .
 \end{aligned}$$

#### ||| Definition 24.14 En-entydig parameterfremstilling

Parameterfremstillingen i (24.1.1) for kurven  $K_{\mathbf{r}}$  siges at være *en-entydig* hvis der for alle  $u_1 \in [a, b]$  og for alle  $u_2 \in [a, b]$  gælder følgende:

$$u_1 \neq u_2 \quad \text{medfører at} \quad \mathbf{r}(u_1) \neq \mathbf{r}(u_2) \quad . \quad (24-9)$$

||| **Opgave 24.15**

Hvilke af parameterfremstillingerne i figurerne 24.1, 24.2, og 24.4, henholdsvis i eksemplerne 24.9, 24.10, og 24.13, er en-entydige?

||| **Opgave 24.16**

Vis, at Definition 24.8 giver samme længde for de tre parametriseringer af linjestykket i figur 24.1, samme længde af de to cirkelstykker i figur 24.2 og samme længde af de to skruelinjer i figur 24.4.

||| **Opgave 24.17**

Find længden (med 3 decimaler) af knuden i figur 24.5.

||| **Opgave 24.18**

Find regulære, en-entydige parameterfremstillinger af linjestykket (figur 24.1), cirklen (figur 24.2), og skruelinjen (figur 24.4), således at alle parameterfremstillingerne har det fælles parameterinterval  $[0, \pi]$ .

### 24.1.1 Motivering af kurveintegralet

Hvis vi deler intervallet  $[a, b]$  i  $n$  lige store dele, så har hvert delinterval længden  $\delta_u = (b - a)/n$  og delepunkternes koordinater i  $[a, b]$  bliver:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= a, \\
 u_2 &= u_1 + \delta_u = a + \delta_u, \\
 u_3 &= u_2 + \delta_u = a + 2\delta_u, \\
 u_4 &= u_3 + \delta_u = a + 3\delta_u, \\
 &\dots \\
 b &= u_n + \delta_u = a + n\delta_u.
 \end{aligned}
 \tag{24-10}$$

Med hver af disse fast valgte værdier af  $u_i$  som udviklingspunkt kan vi nu bruge Taylor's grænseformel for hver af de 3 koordinat-funktioner  $x(u)$ ,  $y(u)$ , og  $z(u)$  for  $\mathbf{r}(u) =$

$(x(u), y(u), z(u))$  til første orden og med de tilhørende epsilon-funktioner som følger, se eNote 17:

$$\begin{aligned} x(u) &= x(u_i) + x'(u_i)(u - u_i) + \varepsilon_x(u - u_i) \cdot |u - u_i| \\ y(u) &= y(u_i) + y'(u_i)(u - u_i) + \varepsilon_y(u - u_i) \cdot |u - u_i| \\ z(u) &= z(u_i) + z'(u_i)(u - u_i) + \varepsilon_z(u - u_i) \cdot |u - u_i| \end{aligned} \quad (24-11)$$

Disse 3 formler kan vi samle og udtrykke med vektor-notation således:

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u_i) + \mathbf{r}'(u_i) \cdot (u - u_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i(u - u_i) \cdot \rho_i \quad , \quad (24-12)$$

hvor vi bruger den korte skrivemåde  $\rho_i = |u - u_i| = \sqrt{(u - u_i)^2}$  for afstanden mellem den variable værdi  $u$  og den faste værdi  $u_i$  i parameterintervallet. Desuden gælder at vektoren  $\boldsymbol{\varepsilon}_i(u - u_i) = (\varepsilon_x(u - u_i), \varepsilon_y(u - u_i), \varepsilon_z(u - u_i)) \rightarrow (0, 0, 0) = \mathbf{0}$  for  $u \rightarrow u_i$ .

Hvert del-interval  $[u_i, u_i + \delta_u]$  fra  $u$ -aksen afbildes på kurve-stykket  $\mathbf{r}(u)$ ,  $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$ , og dette kurve-stykke kan vi approksimere med den lineære del af udtrykket i (24.1.12), som fås ved at fjerne  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ -bidraget fra højre side i (24.1.12):

$$\mathbf{r}_{\text{app}_i}(u) = \mathbf{r}(u_i) + \mathbf{r}'(u_i) \cdot (u - u_i) \quad , \quad u \in [u_i, u_i + \delta_u] \quad . \quad (24-13)$$

Se figurerne 24.8 og 24.9 hvor de approksimerende linjestykker er vist for en parametriseret cirkel, for to forskellige parametriseringer og for forskellige værdier af  $n$ . Det  $i$ 'te linjestykke har pr. definition kontakt med kurven i sit ene endepunkt. Det kalder vi kontaktpunktet for linjestykket.

### Længden af en kurve

Hvert enkelt af de i alt  $n$  approksimerende linjestykker har en længde, se Figur 24.8. Længden af det  $i$ 'te linjestykke er ifølge (24.1.13)

$$\Delta L_i = |\mathbf{r}_{\text{app}_i}(u_i + \delta_u) - \mathbf{r}_{\text{app}_i}(u_i)| = |\mathbf{r}'(u_i)| \cdot \delta_u \quad . \quad (24-14)$$

Summen af disse  $n$  længder er (for store værdier af  $n$ ) klart en god approksimation til længden af kurven, således at vi kan skrive

$$L_{\text{app}}(n) = \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}'(u_i)| \cdot \delta_u \quad , \quad (24-15)$$

Da ovenstående sum er en integralsum (se eNote 21) for den kontinuerte funktion  $|\mathbf{r}'(u)|$  over intervallet  $[a, b]$ , opnås i grænsen, hvor  $n$  går imod uendelig:

$$L_{\text{app}}(n) \rightarrow L = \int_a^b |\mathbf{r}'(u)| du \quad \text{for } n \rightarrow \infty . \quad (24-16)$$

Vi har dermed motiveret definitionen af længden af en kurve som angivet ovenfor, nemlig som kurveintegralet af den konstante funktion 1 over den parametriserede kurve.

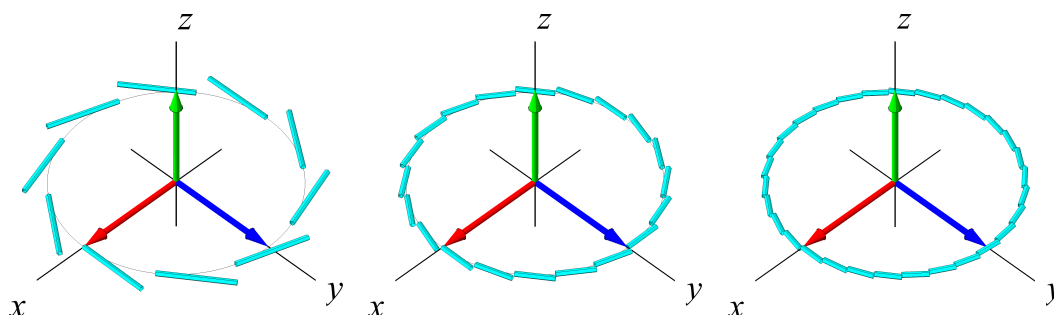


Figure 24.8: Kurven  $\mathbf{r}(u) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), 0)$ ,  $u \in [-1, 1]$ , med henholdsvis 10, 20, og 30 approksimerende linjestykker. Det er rimeligt at definere længden af kurven som den totale længde af de approksimerende linjestykker i den grænse hvor antallet af linjestykker går mod uendelig.

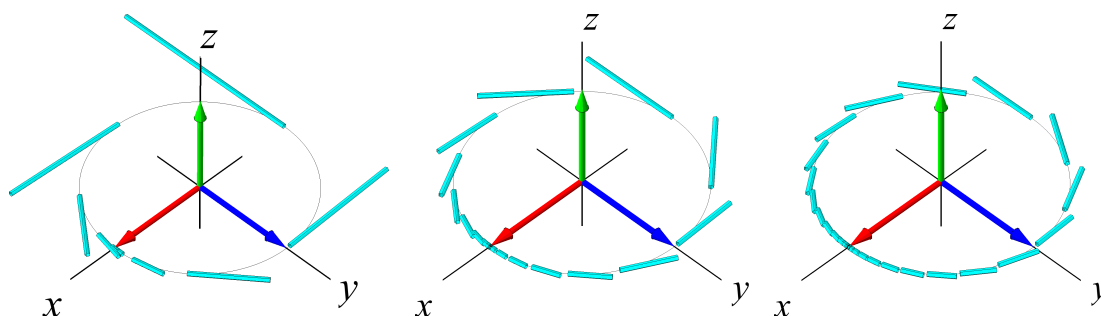


Figure 24.9: Kurven  $\mathbf{r}(u) = (\cos(2\pi u^3), \sin(2\pi u^3), 0)$ ,  $u \in [-1, 1]$ , med henholdsvis 30, 60 og 100 approksimerende linjestykker. Det er stadig rimeligt at definere længden af kurven som den totale længde af de approksimerende linjestykker i den grænse hvor antallet af approksimerende linjestykker går mod uendelig.

### Masse, vægten af en kurve med massetæthed

Hvis vi antager, at hvert enkelt linjestykke i (24.1.13) tildeles en konstant massetæthed givet ved værdien af funktionen  $f(x, y, z)$  i linjestykkets kontaktpunkt med kurven, så får vi massen af det  $i$ 'te linjestykke:

$$\Delta M_i = f(x(u_i), y(u_i), z(u_i)) |\mathbf{r}'(u_i)| \cdot \delta_u = f(\mathbf{r}(u_i)) |\mathbf{r}'(u_i)| \cdot \delta_u \quad .$$

Den totale masse af hele systemet af linjestykker er derfor følgende, som er en god approksimation til massen af hele kurven, når kurven tildeles massetætheden  $f(\mathbf{r}(u))$  på stedet  $\mathbf{r}(u)$  :

$$M_{\text{app}}(n) = \sum_{i=1}^n \Delta M_i = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i)) |\mathbf{r}'(u_i)| \cdot \delta_u \quad . \quad (24-17)$$

Dette er igen en integralsum, men nu for den kontinuerte funktion  $f(\mathbf{r}(u)) |\mathbf{r}'(u)|$  over intervallet  $[a, b]$ . Vi får altså i grænsen, hvor  $n$  går mod uendelig:

$$M_{\text{app}}(n) \rightarrow M = \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) |\mathbf{r}'(u)| du \quad \text{for } n \rightarrow \infty \quad . \quad (24-18)$$

Dermed har vi motiveret definitionen af massen af en kurve med massetætheden  $f(\mathbf{r}(u))$  (for så vidt denne funktion er positiv i  $[a, b]$ ) og dermed den generelle definition af kurveintegralet, Definition 24.5.

## 24.2 Planintegraler

Et parametriseret område i planen er givet ved en parameterfremstilling

$$P_{\mathbf{r}}: \quad \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \quad (24-19)$$

hvor  $x(u, v)$  og  $y(u, v)$  er givne (typisk glatte) funktioner af de to parameter-variable  $u$  og  $v$ .

Planintegraler opstilles, betegnes, og beregnes helt analogt til kurveintegralerne:

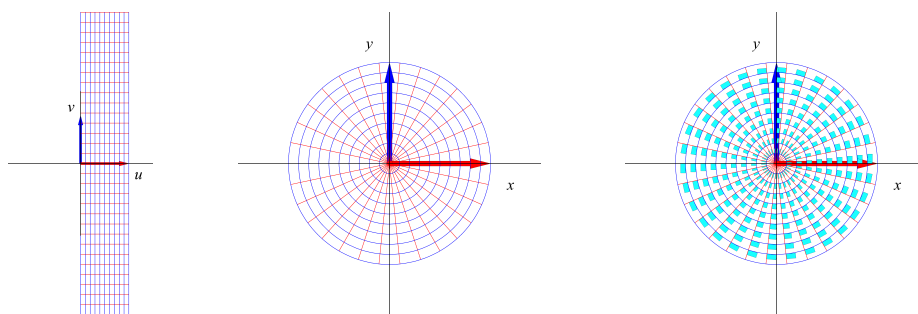


Figure 24.10: Dette område i planen er givet ved følgende parameterfremstilling, der repræsenterer *polære koordinater* i planen:  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v))$ ,  $u \in [0, 1]$ ,  $v \in [-\pi, \pi]$ . Parameterrektanglet ses til venstre. Den deformeres og afbildes (ved brug af  $\mathbf{r}$ ) på det plane område i midten. Til højre er antydnet placeringen og størrelsen (pånær en faktor 4) af de til det givne net hørende approksimerende parallellogrammer (her er der tale om rektangler).

### |||| Definition 24.19 Planintegral

Lad  $f(x, y)$  betegne en kontinuert funktion på  $\mathbb{R}^2$ . Planintegralet af funktionen  $f$  over det parametriserede område  $P_{\mathbf{r}}$  defineres ved

$$\int_{P_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \quad , \quad (24-20)$$

hvor Jacobi-funktionen  $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$ ,

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = |\mathbf{r}'_u(u, v)| \cdot |\mathbf{r}'_v(u, v)| \cdot \sin(\theta(u, v)) \quad , \quad (24-21)$$

er arealet af det parallellogram *i planen*, der på stedet  $\mathbf{r}(u, v)$  udspændes af de to tangentvektorer  $\mathbf{r}'_u(u, v)$  og  $\mathbf{r}'_v(u, v)$  til de respektive koordinatkurver igennem punktet  $\mathbf{r}(u, v)$  i planen (funktionen  $\theta(u, v) \in [0, \pi]$  betegner vinklen mellem disse tangentvektorer).

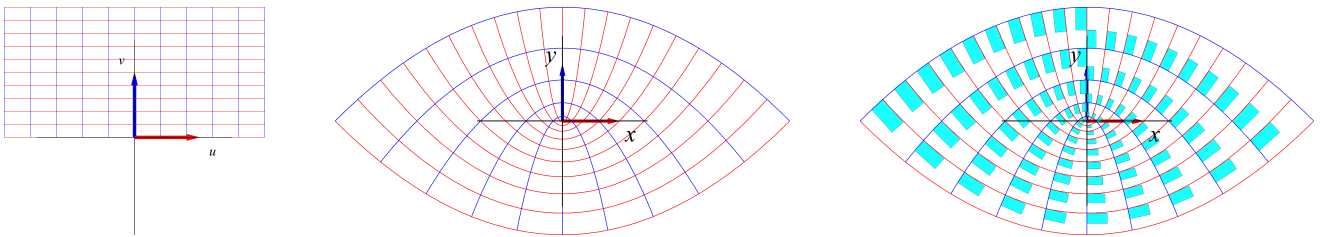


Figure 24.11: Plant område med parabelkoordinater. Dette område i planen er givet ved parameterfremstillingen  $\mathbf{r}(u, v) = (u v, \frac{1}{2}(u^2 - v^2))$ ,  $u \in [-2, 2]$ ,  $v \in [0, 2]$ . Figuren til højre antyder igen et system af areal-approksimerende parallelogrammer på nær faktor 4.

### |||| Definition 24.20 Regulær parameterfremstilling for et område i planen

Parameterfremstillingen (24.2.19) siges at være en *regulær parameterfremstilling* for det plane område hvis der gælder følgende:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) > 0 \quad \text{for alle } u \in [a, b], v \in [c, d] \quad . \quad (24-22)$$

### |||| Definition 24.21 En-entydig parameterfremstilling

Som for parametriserede kurver siges parameterfremstillingen i (24.2.19) at være en-entydig hvis forskellige punkter i definitionsmængden afbildes i forskellige punkter i billedmængden i planen.

### |||| Opgave 24.22

Vis, at  $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$  (i (24.2.21)) også kan findes som den numeriske værdi af determinanten af den  $(2 \times 2)$ -matrix, der som søjler har koordinaterne for de to vektorer  $\mathbf{r}'_u(u, v)$  og  $\mathbf{r}'_v(u, v)$ .



### ||| Eksempel 24.23 Standard graf-afgrænset område

Laf  $f(x)$  betegne en positiv funktion på et  $x$ -interval  $[a, b]$ . Så kan vi parametrisere området imellem  $x$ -aksen og grafen for funktionen  $f(x)$  på følgende simple måde:

$$P_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (u, v \cdot f(u)) \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [0, 1] \quad . \quad (24-23)$$

Se figur 24.12 (hvor funktionen  $f(x) = 1 + x + x^2$  er benyttet til illustration). Til bestemmelse af arealet af området imellem grafen for  $f(x)$  og  $x$ -aksen har vi nu helt generelt:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = f(u) \quad , \quad (24-24)$$

fordi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u(u, v) &= (1, v \cdot f'(u)) \quad \text{og} \\ \mathbf{r}'_v(u, v) &= (0, f(u)) \quad , \end{aligned} \quad (24-25)$$

sådan at determinanten af den matrix, der har søjlerne  $\mathbf{r}'_u(u, v)$  og  $\mathbf{r}'_v(u, v)$ , netop i dette tilfælde er funktionen  $f(u)$  selv og dermed er også Jacobifunktionen givet ved  $f(u)$  ifølge opgave 24.22. Heraf fås det ønskede areal rekonstrueret som:

$$\begin{aligned} \text{Areal}(P_{\mathbf{r}}) &= \int_{P_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_0^1 \left( \int_a^b f(u) \, du \right) \, dv \\ &= \int_a^b f(u) \, du \quad . \end{aligned} \quad (24-26)$$

Overvej, hvad der sker med integralet i (24.2.26), hvis  $f(x)$  tillades at være negativ på givne delintervaller af  $[a, b]$ .

### ||| Eksempel 24.24 Elliptisk område

Det parametriserede elliptiske område i planen (se figur 24.13)

$$P_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (av \cos(u), bv \sin(u)) \quad , \quad u \in [-\pi, \pi] \quad , \quad v \in [0, 1] \quad .$$

har arealet

$$\text{Areal}(P_{\mathbf{r}}) = \int_{P_{\mathbf{r}}} 1 \, d\mu = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} abv \, du \, dv = ab\pi \quad ,$$

idet  $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = abv$ . Sammenlign med beregningen af længden af ellipsen i eksempel 24.12.

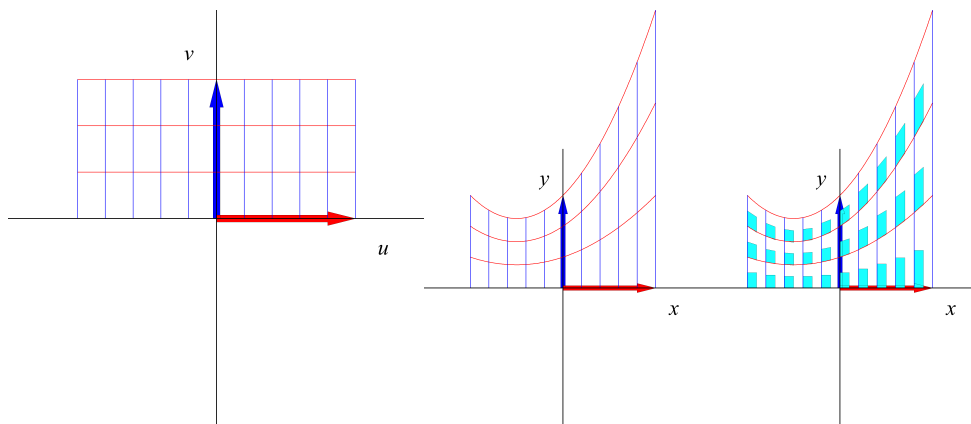


Figure 24.12: Parametrisering af området imellem  $x$ -aksen og grafen for funktionen  $f(x) = 1 + x + x^2$ . Se eksempel 24.23.

### |||| Opgave 24.25 Niveau-afgrænset elliptisk område

Et elliptisk område i planen er afgrænset af niveaukurven  $\mathcal{K}_0(f)$  for andengradspolynomiet

$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13 \quad . \quad (24-27)$$

Bestem længden af niveaukurven og bestem arealet af det afgrænsede elliptiske område i  $(x, y)$ -planen. Se figur 24.14. Vink: eksempel 22.1 i eNote 20.

### |||| Eksempel 24.26 Spiral-område

Det parametriserede spiral-afgrænsede område i planen (se Figur 24.15)

$$P_r : \mathbf{r}(u, v) = (vu \cos(u), vu \sin(u)) , \quad u \in [0, \pi/2] , \quad v \in [0, 1] .$$

har arealet

$$\text{Areal}(P_r) = \int_{P_r} 1 \, d\mu = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} v^2 u \, du \, dv = \pi^3/48 \quad ,$$

idet  $\text{Jacobi}_r(u, v) = v^2 u$ . Sammenlign med beregningen af længden af spiralen i eksempel 24.11.

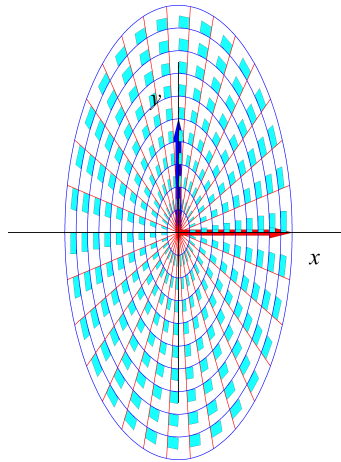


Figure 24.13: Et elliptisk område i planen med halvaksler  $a = 1$  og  $b = 2$ . Se eksempel 24.24. Bemærk, at de approksimerende parallellogrammer (her vist skalerede) ikke er rektangler.

### 24.2.1 Motivering af plan-integralet

Hvis vi i analogi med opstillingen af kurveintegralet deler *begge* parameter-intervallerne  $[a, b]$  og  $[c, d]$  i henholdsvis  $n$  og  $m$  lige store dele, så har hvert  $u$ -delinterval længden  $\delta_u = (b - a)/n$  og hvert  $v$ -delinterval har længden  $\delta_v = (d - c)/m$ . Tilsvarende bliver delepunkternes koordinater i  $(u, v)$ -parameterområdet (som jo er rektanglet  $[a, b] \times [c, d]$  i  $\mathbb{R}^2$ ) - jvf. eNote 20:

$$\begin{aligned}
 (u_1, v_1) &= (a, c), \\
 (u_1, v_j) &= (a, c + (j - 1)\delta_v), \\
 (u_i, v_1) &= (a + (i - 1)\delta_u, c), \\
 (u_i, v_j) &= (a + (i - 1)\delta_u, c + (j - 1)\delta_v), \\
 &\dots \\
 (b, d) &= (a + n\delta_u, c + m\delta_v) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{24-28}$$

Med hvert af disse faste punkter  $(u_i, v_j)$  som udviklingspunkt kan vi igen benytte Taylor's grænseformel, nu for hver af de 2 koordinat-funktioner  $x(u, v)$  og  $y(u, v)$  for  $\mathbf{r}(u, v) =$

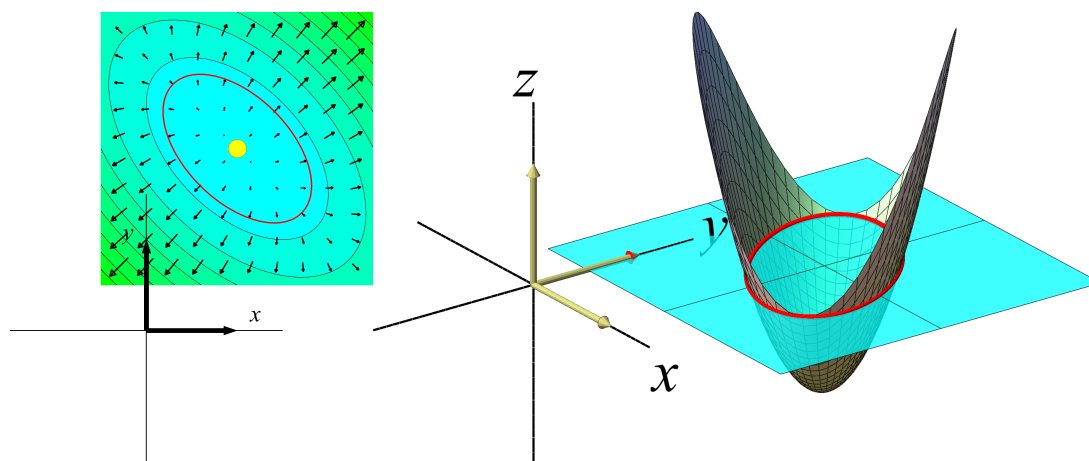


Figure 24.14: Et elliptisk område i planen er afgrænset af en ellipse som er niveaukurven  $\mathcal{K}_0(f)$  for andengradspolynomiet  $f(x, y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y - 8 \cdot x - 10 \cdot y + 13$ . Se opgave 24.25 og eksempel 22.1 i eNote 20.

$(x(u, v), y(u, v))$  til første orden med tilhørende epsilon-funktioner:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{r}(u_i, v_j) \\ &+ \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot (u - u_i) \\ &+ \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot (v - v_j) \\ &+ \rho_{ij} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(u - u_i, v - v_j) \quad , \end{aligned} \quad (24-29)$$

hvor  $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$ ,  $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$ . Her betegner  $\rho_{ij} = \sqrt{(u - u_i)^2 + (v - v_j)^2}$  afstanden mellem det variable punkt  $(u, v)$  og det faste udviklingspunkt  $(u_i, v_j)$  i parameterområdet. Der gælder her, at vektorfunktionen  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(u - u_i, v - v_j) \rightarrow (0, 0) = \mathbf{0}$  for  $(u - u_i, v - v_j) \rightarrow (0, 0)$ .

Hvert del-rektangel  $[u_i, u_i + \delta_u] \times [v_j, v_j + \delta_v]$  afbildes på det plane del-område, som vi kan angive med  $\mathbf{r}(u, v)$  evalueret i parameter-del-rektangleret  $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$ ,  $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$  og dette delområde af det plane område kan vi approksimere med den lineære del af udtrykket i (24.2.29), som igen netop fås ved at fjerne  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ -bidraget fra højre side i (24.2.29):

$$\mathbf{r}_{\text{app}_{ij}}(u, v) = \mathbf{r}(u_i, v_j) + \mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot (u - u_i) + \mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot (v - v_j) \quad , \quad (24-30)$$

hvor  $u$  og  $v$  stadig gennemløber del-intervallerne  $u \in [u_i, u_i + \delta_u]$ ,  $v \in [v_j, v_j + \delta_v]$ .

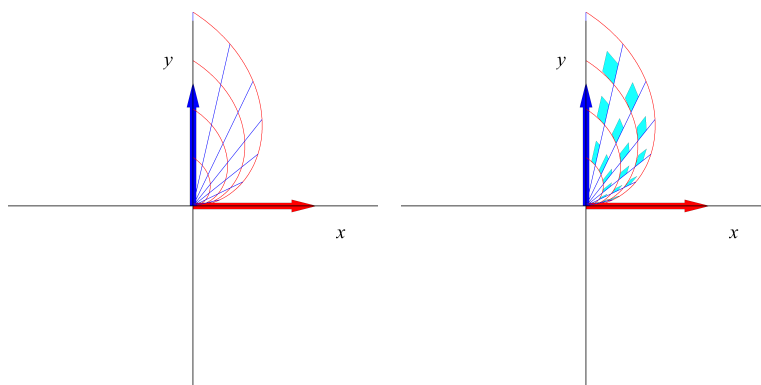


Figure 24.15: Et spiral-afgrænset område i planen. Se eksempel 24.26.

Disse lineære approksimationer er parallelogrammer, som udspændes af de to tangentvektorer  $\mathbf{r}'_u(u_i, v_j) \cdot \delta_u$  og  $\mathbf{r}'_v(u_i, v_j) \cdot \delta_v$ .

### Areal af plant område

Hvert enkelt af de ialt  $n \cdot m$  approksimerende parallelogrammer har et areal. Arealet af det  $(i, j)$ 'te parallelogram er givet ved

$$\begin{aligned} \Delta \text{Areal}_{ij} &= |\mathbf{r}'_u(u_i, v_j)| \cdot |\mathbf{r}'_v(u_i, v_j)| \sin(\theta(u_i, v_j)) \cdot \delta_u \cdot \delta_v \\ &= \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \cdot \delta_v \quad . \end{aligned} \quad (24-31)$$

### ||| Opgave 24.27

Bevis denne påstand: Arealet af et parallelogram er produktet af længderne af de to udspændende vektorer og sinus til den mellemliggende vinkel. Se eNote 6

Summen af disse ialt  $n m$  arealer er klart en god approksimation til arealet af hele fladestykket, således at vi har

$$\text{Areal}_{\text{app}}(n, m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta \text{Areal}_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \quad . \quad (24-32)$$

Da ovenstående sum er en dobbelt integralsum for den kontinuerte funktion  $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$  over parameter-rektanglet  $[a, b] \times [c, d]$  får vi i grænsen, hvor  $n$  og  $m$  begge går mod

uendelig (se eNote 21):

$$\text{Areal}_{\text{app}}(n, m) \rightarrow \text{Areal} = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \quad \text{for } n, m \rightarrow \infty . \quad (24-33)$$

Dette er begrundelsen for definitionen af arealet af et parametriseret område i planen som angivet ovenfor, nemlig som fladeintegralet af den konstante funktion 1.

Massen, vægten af et plant område

Hvis vi nu antager, at hvert enkelt parallelogram i (24.2.30) tildeles en konstant massetæthed givet ved værdien af funktionen  $f(x, y)$  i parallelogrammets kontaktpunkt med fladen, så får vi massen af det  $(i, j)$ 'te parallelogram :

$$\begin{aligned} \Delta M_{ij} &= f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v \\ &= f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v . \end{aligned} \quad (24-34)$$

Den totale masse af hele systemet af parallelogrammer er derfor følgende, som er en god approksimation til massen af hele det plane område når dette gives massetætheden  $f(\mathbf{r}(u, v))$  i punktet  $\mathbf{r}(u, v)$ .

$$M_{\text{app}}(n, m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \Delta M_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(u_i, v_j)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u_i, v_j) \cdot \delta_u \delta_v . \quad (24-35)$$

Dette er en dobbelt integralsum for den kontinuerte funktion  $f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$  over parameter-rektanglet  $[a, b] \times [c, d]$ . Vi får altså i grænsen, hvor  $n$  og  $m$  går mod uendelig:

$$M_{\text{app}}(n, m) \rightarrow M = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \quad \text{for } n, m \rightarrow \infty . \quad (24-36)$$

Dermed har vi motiveret definitionen af massen af et parametriseret område i planen med massetætheden  $f(\mathbf{r}(u, v))$  og dermed også den generelle definition af planintegralet, definition 24.19.

||| **Eksempel 24.28** Total vægt af ring-område

Lad  $f(x, y) = 1 + x$  være vægtfunktion på det plane område i  $(x, y)$ -planen der er afgrænset af  $x$ -aksen og de to øvre halvcirkelbuer af cirklerne med radius henholdsvis 1 og  $1/2$ , begge med centrum i  $(0, 0)$ , se figur 24.16. En parametrisering af området er for eksempel:

$$P_{\mathbf{r}} : \mathbf{r}(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v)) \quad , \quad \text{hvor } u \in [1/2, 1] \quad , \quad v \in [0, \pi] \quad . \quad (24-37)$$

Når området er vægtet med vægtfunktionen  $f(x, y)$  bliver den totale vægt af området:

$$M(P_{\mathbf{r}}) = \int_{P_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_0^{\pi} \int_{1/2}^1 f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \quad , \quad (24-38)$$

hvor

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}(u, v)) &= 1 + x(u, v) = 1 + u \cdot \cos(v) \quad \text{og} \\ \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) &= u \quad , \end{aligned} \quad (24-39)$$

sådan at

$$\begin{aligned} M(P_{\mathbf{r}}) &= \int_0^{\pi} \int_{1/2}^1 (1 + u \cdot \cos(v)) \cdot u du dv \\ &= \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 \cdot \cos(v) \right]_{u=1/2}^{u=1} dv \\ &= \int_0^{\pi} \left( \frac{3}{8} + \frac{7}{24} \cdot \cos(v) \right) dv \\ &= \left[ \frac{3}{8}v + \frac{7}{24} \cdot \sin(v) \right]_{v=0}^{v=\pi} \\ &= \frac{3}{8} \cdot \pi \quad . \end{aligned} \quad (24-40)$$

Den totale masse af området med den givne vægtfordeling er altså  $M(P_{\mathbf{r}}) = 3\pi/8$ . Til sammenligning er arealet af området jo også  $\text{Areal}(P_{\mathbf{r}}) = 3\pi/8$  – men det er et tilfælde.

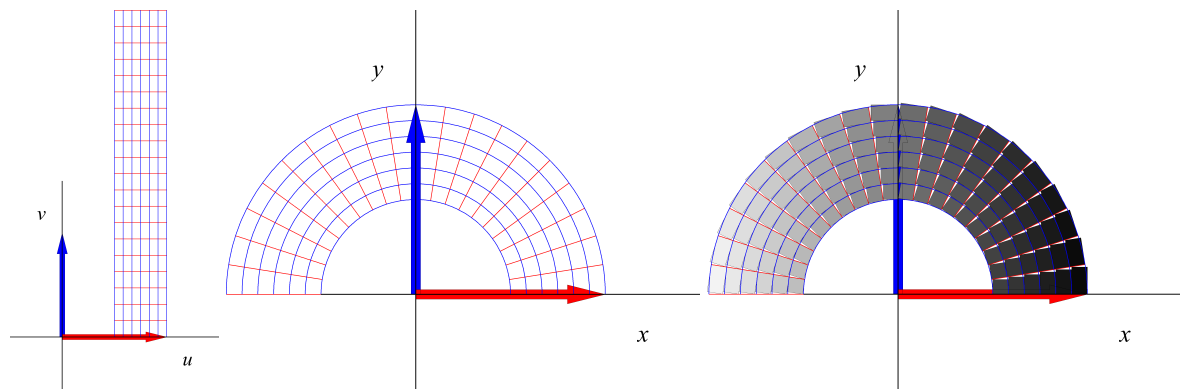


Figure 24.16: Et (halvt) ring-område i planen med antydnet vægtfordeling. Se eksempel [24.28](#).



## 24.3 Opsummering

Vi har i denne eNote opstillet de begreber og metoder, der giver os præcise udtryk for længder af kurver, arealer af plane områder og mere generelt kurve- og plan-integraler af (vægt-)funktioner på kurver og plane områder, der er parametriserede ud fra henholdsvis et interval eller et rektangulært parameter-område. Kurve- og plan-integralerne er opstillet ved hjælp af de respektive Jacobi-funktioner, som angiver hvor meget parameterintervallet eller parameter-området lokalt deformeres når det afbildes over i den ønskede kurve eller over i det ønskede plane område ved de valgte vektor-afbildninger  $\mathbf{r}(u)$  og  $\mathbf{r}(u, v)$ .

- For en rum-kurve  $K_{\mathbf{r}}$  med parameterfremstillingen  $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u))$  har vi følgende motiverede kurveintegral af funktionen  $f(x, y, z)$  over rumkurven:

$$\int_{K_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) du \quad , \quad (24-41)$$

hvor Jacobi-funktionen  $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u)$  er givet ved længden af parametriseringens tangentvektor:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u) = |\mathbf{r}'(u)| \quad . \quad (24-42)$$

- For et plant område  $P_{\mathbf{r}}$  med parameterfremstillingen  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  har vi ligeledes motiveret følgende definition af planintegralet af funktionen  $f(x, y)$  over området:

$$\int_{P_{\mathbf{r}}} f d\mu = \int_c^d \int_a^b f(\mathbf{r}(u, v)) \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) du dv \quad , \quad (24-43)$$

hvor Jacobi-funktionen  $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v)$  nu er givet ved parallelogram-arealet udspændt af koordinatkurvernes tangentvektorer:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(u, v) = |\mathbf{r}'_u(u, v)| \cdot |\mathbf{r}'_v(u, v)| \cdot \sin(\theta(u, v)) \quad , \quad (24-44)$$

hvor  $\theta(u, v) \in [0, \pi]$  betegner vinklen mellem de to tangentvektorer  $\mathbf{r}'_u(u, v)$  og  $\mathbf{r}'_v(u, v)$ .