eNote 23

Riemann-integraler

I denne eNote vil vi opstille og give eksempler på de teknikker, metoder, og resultater, som er helt nødvendige hjælpemidler når vi skal finde længder af kurver, arealer af plane områder og af overflader, samt rumfang, massemidtpunkter, og inertimomenter af rumlige områder etc. Det handler i første omgang om at kunne integrere og om at kunne finde stamfunktioner til givne kontinuerte funktioner, især til funktioner af én variabel. Vi vil derfor et par gange referere til eNote 14. Vi skal i denne eNote se hvordan uendelige summer af uendeligt små addender i grænsen fører til de såkaldte Riemann-integraler, som igen kan udtrykkes og beregnes ved brug af passende stamfunktioner. Metoderne og de fundamentale resultater for Riemann-integralerne er ikke afgørende forskellige i de dimensioner vi betragter, men vi vil alligevel diskutere og analysere betegnelser, resultater, og eksempler helt eksplicit for funktioner af én, to, og tre variable med henblik på at kunne bruge Riemann-integralerne mest effektivt i de anvendelser, som dyrkes i de eNoter der handler om integration i flere variable.

23.1 Indledning

Ideen med denne og de efterfølgende eNoter er at motivere, opstille, og anvende det unikke værktøj, der kan besvare spørgsmål som helt naturligt opstår i mangfoldige sammenhænge: Hvor lang er den kurve? Hvor stort er det område i planen? Hvad vejer det fladestykke? Hvad er rumfanget af det område i rummet? Hvad er energi-optaget på det solfangertag i løbet af i dag? Hvor meget deformeres det legeme, når det flyder langs det vektorfelt?

Det værktøj – den metode – der kan besvare disse spørgsmål, hedder *integration*. Det vil sige, vi skal kunne integrere givne funktioner $f(x)$ og finde stamfunktioner til dem.

Som bekendt er en stamfunktion til $f(x)$ en funktion $F(x)$ hvis differentialkvotient er $f(x)$. Men dem er der jo mange af; hvis vi differentierer $F(x) + c$, hvor c er en konstant, så får vi igen $f(x)$. Det vil sige, hvis $F(x)$ er en stamfunktion, så er $F(x) + c$ også en stamfunktion!

Derudover er det på ingen måde på forhånd klart, at sådanne stamfunktioner skulle have noget som helst at gøre med længder, arealer, rumfang, eller vægt. Og hvilken funktion $f(x)$ skal vi iøvrigt bruge, når vi for eksempel vil finde rumfanget af en kugle? Og hvis vi ellers kan finde en stamfunktion til $f(x)$, hvilken konstant skal der så lægges til for at vi kan få det rigtige rumfang? For at få en ide om det, må vi først se på, hvordan vi i det hele taget kan prøve på at *definere* hvad vi skal forstå ved begrebet rumfang.

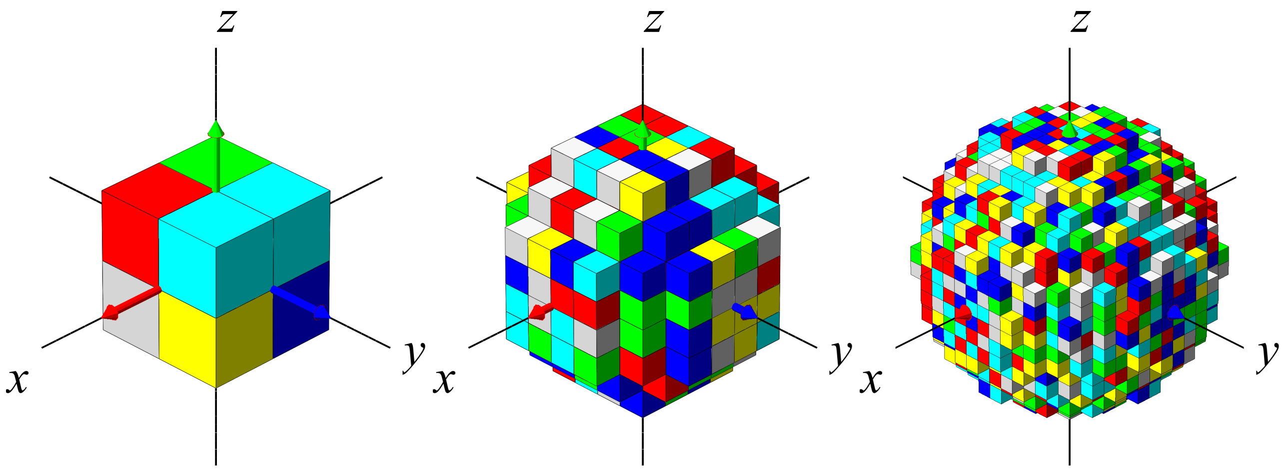

Figure 23.1: Kuglefyldninger med kubiske klodser. Den antydede kugle, som ønskes fyldt med klodserne, har radius 1. Til venstre er der plads i kuglen til 8 klodser hver med sidelængde 0.5; i midten er der brugt 304 klodser, hver med sidelængden 0.2; til højre er benyttet 3280 klodser, hver med sidelængden 0.1.

23.2 Rumfang-problemet

Rumfanget af et givet område i rummet, f.eks. en massiv kugle med radius 1, kan bygges op af standard-elementer med simplest mulig kasseformet geometri, for eksempel kubiske klodser. Men resultatet af en sådan opbygning af kuglen kan jo kun blive en grov tilnærmelse til kuglen, se figur 23.1. Og summen af de kubiske klodsers rumfang er derfor kun en grov tilnærmelse til kuglens rumfang.

Hvis vi imidlertid fylder den samme kugle med kubiske klodser, der hver for sig har 1000 gange mindre rumfang (altså 10 gange mindre sidelængde) er det klart, at den ønskede kugle derved kan tilnærmes meget bedre ved brug af (mere end 1000 gange) flere kubiske klodser; og det er stadig (i princippet) en simpel sag at lægge alle klodsernes rumfang sammen. Det giver dermed også en meget bedre værdi for rumfanget af kuglen.

Eksemplet i Figur 23.1 viser princippet: Approksimationen af en kugle med radius 1 med 8 kubiske klodser med sidelængde $1/2$ har rumfanget $8 \cdot (1/2)^3 = 1$; i midten har vi 304 kubiske klodser (alle med sidelængde $1/5$) der giver et tilnærmet rumfang på $304 \cdot (1/5)^3 = 2.432$, mens approksimationen med 3280 klodser (med sidelængde 0.1) i højre figur klart giver en endnu bedre tilnærmelse: $3280 \cdot (1/10)^3 = 3.280$. Til sammenligning vidste allerede Archimedes, at det eksakte volumen af enhedskuglen er $4\pi/3 \approx 4.1888$.

Når først dette er klart, så er ønsket selvfølgelig at 'gå til grænsen' ved at lade antallet af standard-klodser gå imod uendelig samtidig med at de benyttede klodser gøres tilsvarende mindre i hvert forsøg. Og således pakke og udfylde kuglen bedre og bedre, med flere og flere, mindre og mindre kuber, og derved opnå ***Archimedes' resultat*** i grænsen.

Men hvordan lægger vi uendelig mange uendelig små rumfang sammen? Og går det virkelig godt? Integrationsbegrebet og de tilhørende stamfunktionsbestemmelser giver præcise anvisninger og overraskende positive svar på begge disse spørgsmål.

Vi viser i denne eNote hvilke formelle overvejelser og metoder, der ligger bag den succes og tager dernæst straks i de efterfølgende eNoter fat på at bruge integrationsteknikkerne til at bestemme længder af kurver, arealer af fladestykker, rumfang af rumlige områder, etc.

I eNoten om integration i tre variable vises for eksempel, hvordan kuglens rumfang kan beregnes eksakt ved hjælp af 'udfyldninger' med kasseformede blokke (med forskellig størrelse og form i stil med udfyldningerne af kuglen ovenfor), se figurerne 23.1, 23.2 og eksempel 23.26.

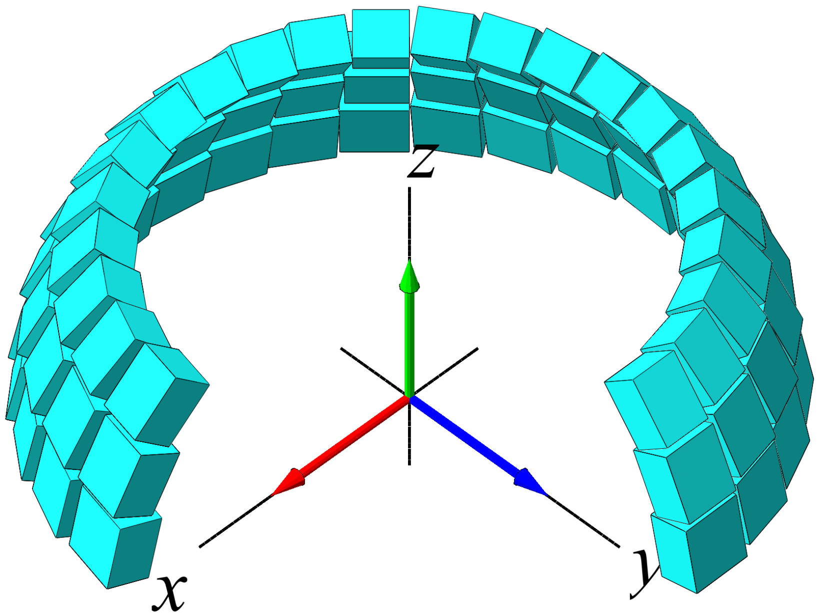

Figure 23.2: Delvis opbygning af en kugleskal.

23.3 Approksimerende summer og eksakte integraler

På den reelle u-akse betragter vi en fast valgt kontinuert reel funktion $f(u)$ på intervallet $[0,1]$, f.eks. $f(u) = 1 + u + u^2$. For et givet helt tal $n > 0$ gør vi nu følgende. Først deles intervallet $[0,1]$ i n lige store delintervaller, som derved hver får længden $\delta_u = \frac{1}{n}$. Delintervallernes venstre endepunkter har $u-$koordinaterne:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{1}{n}, \quad u_3 = \frac{2}{n}, \quad u_4 = \frac{3}{n}, \cdots, \quad u_{n-1} = \frac{n-2}{n}, \quad u_n = \frac{n-1}{n} \quad .$$

Det vil sige, at det i'te intervals venstre endepunkt har $u-$koordinaten $u_i = (i-1)\,\frac{1}{n} = (i-1)\,\delta_u$, hvor $i = 1, 2, 3, ..., n-1, n$.

|||| Opgave 23.1

Bemærk, at hvis vi forøger antallet af delintervaller n med 1, og nu ønsker en deling af $[0,1]$ i $n+1$ lige store delintervaller, så vil alle de tidligere placerede n venstre endepunkter i intervallet $[0,1]$ skulle flyttes lidt (pånær u_1) for at give plads til det ekstra delinterval. Hvor meget?


Figure 23.3: Gottfried Wilhelm von Leibniz (til venstre) og Georg Friedrich Bernhard Riemann.

For et fast antal delintervaller, n, finder vi funktionsværdien af f i hvert af delintervallernes venstre endepunkter, altså de n værdier $f(0)$, $f(\frac{1}{n})$, $f(\frac{2}{n})$, $f(\frac{3}{n})$, ..., $f(\frac{n-1}{n})$.

Summen af disse værdier vil sædvanligvis afhænge meget af antallet n af funktionsværdier, men hvis vi først ganger hver enkelt funktionsværdi med delinterval-længden δ_u får vi følgende såkaldte *vægtede sum* af funktionsværdierne, som iøvrigt derved netop er en approksimation til det med fortegn regnede areal af området imellem $u-$aksen og grafen for $f(u)$ over intervallet (jvf. figur 23.4):

$$\mathrm{I}(f,n,[0,1]) = \sum_{i=1}^{i=n} f\left((i-1)\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{i=n} f\left((i-1)\delta_u\right)\delta_u = \sum_{i=1}^{i=n} f\left(u_i\right)\delta_u \quad . \tag{23-1}$$

|||| Opgave 23.2

Vis, at den vægtede sum af funktionsværdierne af f i ligning (23.3.1) er opadtil begrænset af f's største værdi og nedadtil begrænset af f's mindste værdi i intervallet $[0,1]$.

Den vægtede sum er ikke blot begrænset for alle n. Det viser sig nemlig, at den også har en grænseværdi for n gående imod uendelig – i hvert fald hvis $f(u)$ er kontinuert; det er den grænseværdi vi kalder Riemann-integralet af $f(u)$ over intervallet $[0,1]$ (efter B. Riemann, se figur 23.3). Selve grænseværdien *betegnes* (efter G. Leibniz, se figur 23.3) med følgende notation

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(f,n,[0,1]) = \int_0^1 f(u)\,du \quad . \tag{23-2}$$

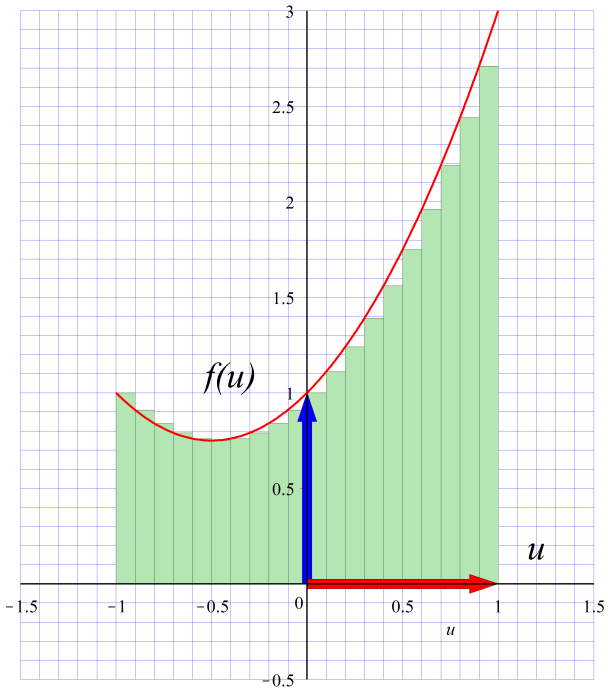

Figure 23.4: Figuren viser areal-repræsentationen af integralsummen $\mathrm{I}(f, n, [-1, 1])$ for funktionen $f(u) = 1 + u + u^2$ (se opgave 23.5.28evncount.23.14) med $n = 20$ delintervaller i intervallet $[a, b] = [-1, 1]$. De 20 addender i summen er repræsenteret ved rektangulære søjler med den fælles bredde $(b - a)/20 = 1/10$ og højder givet ved værdierne af funktionen $f(u) = 1 + u + u^2$ i delintervallernes venstre endepunkter.

|||| Eksempel 23.3 Konstant funktion

Lad $f(u) = \alpha$ for alle $u \in [0, 1]$, hvor α er en konstant. Så er

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(f, n, [0, 1]) &= \sum_{i=1}^{i=n} f(u_i)\ \delta_u \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} \alpha \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{\alpha}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} 1 \\
&= \frac{\alpha}{n} \cdot n \\
&= \alpha \quad ,
\end{aligned}
\tag{23-3}
$$

således at

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(f,n,[0,1]) \;=\; \int_0^1 \alpha\, du = \alpha \quad . \tag{23-4}$$

|||| Eksempel 23.4 Førstegradspolynomium

Lad $f(u) = \alpha + \beta \cdot u$ for $u \in [0,1]$, hvor α og β er konstanter. Det vil sige at grafen for $f(u)$ er et ret linjestykke over intervallet $u \in [0,1]$ på u-aksen. Så er

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(f,n,[0,1]) &= \sum_{i=1}^{i=n} f(u_i)\;\delta_u \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} (\alpha + \beta \cdot u_i) \cdot \frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\alpha + \beta \cdot (i-1) \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\
&= \alpha \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n}\right) + \beta \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=n} (i-1) \cdot \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \alpha + \beta \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i}{n^2} - \beta \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n^2} \\
&= \alpha + \beta \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{i=n} i - \beta \cdot \frac{1}{n} \quad ,
\end{aligned} \tag{23-5}$$

hvor vi så har brug for følgende identitet:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)\cdot n}{2} = \frac{(n+1)}{2 \cdot n} \quad , \tag{23-6}$$

sådan at

$$\mathrm{I}(f,n,[0,1]) = \alpha + \beta \cdot \frac{(n+1)}{2 \cdot n} - \beta \cdot \frac{1}{n} \quad . \tag{23-7}$$

Det følger heraf, at

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(f,n,[0,1]) \;=\; \alpha + \beta \cdot \frac{1}{2} \quad , \tag{23-8}$$

og dermed

$$\int_0^1 \alpha + \beta \cdot u\, du \;=\; \alpha + \frac{1}{2} \cdot \beta \quad . \tag{23-9}$$

Bemærk, at den fundne værdi er præcis arealet af området imellem grafen for $f(u) = \alpha + \beta \cdot u$ og u-aksen over intervallet $[0,1]$ for så vidt grafen der ligger helt over u-aksen.

Hvis vi benytter den samme strategi som ovenfor, men nu med en deling af det mere generelle interval $[a, b]$ på u-aksen i n lige store delintervaller, har vi følgende sætning:

|||| Sætning 23.5 Integralsum og Riemann-integral

Lad $f(u)$ betegne en kontinuert funktion på intervallet $[a, b]$. For ethvert n inddeles intervallet i n lige store delintervaller, hver med længden $\delta_u = (b-a)/n$. Disse delintervallers venstre endepunkter har så koordinaterne $u_i = a + (i-1)\delta_u$ for $i = 1, 2, 3, ..., n-1, n$. Lad $\mathrm{I}(f, n, [a, b])$ betegne følgende sum:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(f, n, [a,b]) &= \sum_{i=1}^{i=n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} f\left(a + (i-1)\delta_u\right)\,\delta_u = \sum_{i=1}^{i=n} f\left(u_i\right)\,\delta_u \quad . \end{aligned} \tag{23-10}$$

Så har $\mathrm{I}(f, n, [a, b])$ en grænseværdi for n gående imod ∞. Grænseværdien kaldes ***Riemann-integralet*** af $f(u)$ over $[\,a,\ b\,]$ og betegnes med $\int_a^b f(u)\,du$:

$$\mathrm{I}(f, n, [a,b]) = \sum_{i=1}^{i=n} f\left(u_i\right)\,\delta_u \rightarrow \int_a^b f(u)\,du \quad \text{for} \quad \mathrm{n} \rightarrow \infty \quad . \tag{23-11}$$

|||| Opgave 23.6

Lad $f(u) = \alpha + \beta \cdot u$ for givne konstanter α og β og lad $[a, b]$ betegne et interval på u-aksen. Bestem for ethvert n værdien af

$$\mathrm{I}(f, n, [a,b]) \quad , \tag{23-12}$$

find dernæst grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(f, n, [a,b]) \quad , \tag{23-13}$$

og sammenlign med arealet af området mellem (den retlinjede) grafen for $f(u)$ og u-aksen.

Summer af typen $\mathrm{I}(f, n, [a, b])$ vil vi i det følgende kalde ***integralsummer***. Det er eksistensen af grænseværdier af disse integralsummer, der er det helt afgørende for vort forehavende. Bemærk for eksempel, at grænseværdien $\int_a^b f(u)\,du$ jo nu er det bedste bud på, hvad vi skal forstå ved arealet af det plane område imellem $u-$aksen og grafen for $f(u)$ over intervallet $[a, b]$ (for så vidt at $f(u)$ er positiv i hele intervallet). I opgave

23.5.28evncount.23.14 og i eksemplerne 23.15 og 23.16 behandles andre eksempler p, hvordan sådanne grænseværdier (og arealer) kan beregnes direkte ud fra en analyse af, hvordan summerne $\sum_{i=1}^{i=n} f(u_i)\,\delta_u$ opfører sig når $n \to \infty$.

Bemærk, at Riemann-integralet netop konstrueres og opstår som en uendelig sum af uendeligt små addender $\sum_{i=1}^{i=n} f(u_i)\,\delta_u$ for $n \to \infty$, altså præcis som vi havde brug for det i forbindelse med vore overvejelser om rumfanget af kuglen ovenfor og i figur 23.1.

23.4 Stamfunktionsbestemmelse

Riemann-integraler kan bestemmes ved hjælp af stamfunktioner – det er præcis indholdet af den fundamentalsætning, som vi vil formulere og bruge i næste afsnit. Vi vil antage i det følgende, at vi allerede for passende elementære funktioner $f(x)$ er i stand til at finde stamfunktionerne $F(x)$ til $f(x)$. Som bekendt går det ud på at finde alle de funktioner $F(x)$ der opfylder, at $F'(x) = f(x)$. De funktioner betegner vi som følger ved hjælp af ***integraltegnet***, og vi siger, at ***integranden*** $f(x)$ *integreres* og giver *integralet* eller *stamfunktionen* $F(x)$:

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad . \tag{23-14}$$

Hvis $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$ og c en reel konstant, så er $F(x) + c$ også en stamfunktion til $f(x)$. Og *alle* stamfunktionerne til $f(x)$ fås ved at finde én stamfunktion og dertil lægge vilkårlige (arbitrære) konstanter c.

Her er nogle eksempler på stamfunktioner til nogle velkendte funktioner $f(x)$ (vi angiver kun én stamfunktion til hver af de givne funktioner):

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a \quad , \quad F(x) = \int f(x)\,dx = ax \\
f(r) &= 4\pi r^2 \quad , \quad F(r) = \int f(r)\,dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \\
f(t) &= 1/(1+t^2) \quad , \quad F(t) = \int f(t)\,dt = \arctan(t) \\
f(u) &= 1+u+u^2 \quad , \quad F(u) = \int f(u)\,du = u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 \\
f(x) &= \sin(x^2) \quad , \quad F(x) = \int f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \mathrm{FresnelS}\left(x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) \\
f(x) &= \mathrm{e}^{-x^2} \quad , \quad F(x) = \int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(x) \\
f(x) &= \mathrm{e}^{x} \quad , \quad F(x) = \int f(x)\,dx = \mathrm{e}^{x} \quad .
\end{aligned}
\tag{23-15}
$$

Da vi i de eNoter der handler om integration i flere variable har udstrakt brug for at kunne finde stamfunktioner – også for lidt mere indviklede integrand-funktioner – nævner vi følgende to sætninger, der kan være en hjælp til omformning af givne stamfunktionsproblemer til bestemmelse af simplere stamfunktioner.

|||| Sætning 23.7 Partiel integration

Lad $f(x)$ betegne en kontinuert funktion med en stamfunktion $F(x)$ og lad $g(x)$ være en differentiabel funktion med kontinuert afledet $g'(x)$. Så kan alle stamfunktioner til produktet $f(x) \cdot g(x)$ bestemmes ved:

$$\int f(x) \cdot g(x)\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,dx. \tag{23-16}$$

|||| Bevis

Vi skal blot vise, at de to sider af ligningen (23.4.16) har samme differentialkvotienter for alle x! To funktioner er stamfunktioner for den samme integrandfunktion, hvis deres differens er en konstant. De afledede er ens fordi:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\cdot g(x)\,dx\right) = f(x)\cdot g(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx\right) &= F'(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x) - F(x)\cdot g'(x) \\ &= f(x)\cdot g(x) \quad .\end{aligned} \tag{23-17}$$

■

|||| Eksempel 23.8 Partiel integration

Vi vil bestemme en stamfunktion til $h(x) = x\cdot\sin(x)$. Først skriver vi $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ med $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x$. Så har vi i henhold til reglen om partiel integration:

$$\int x\cdot\sin(x)\,dx = x\cdot(-\cos(x)) - \int 1\cdot(-\cos(x))\,dx = -x\cdot\cos(x) + \sin(x) \quad . \tag{23-18}$$

|||| Opgave 23.9

Bestem samtlige stamfunktioner til funktionen $f(x) = \cos(x)\cdot\sin(x)$.

|||| Sætning 23.10 Integration ved substitution

Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion og lad $g(u)$ betegne en monoton, differentiabel funktion med kontinuert afledet $g'(u)$. Så kan vi bestemme en stamfunktion til $f(x)$ ved hjælp af den sammensatte funktion $f(g(u))$ således:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(g(u))\cdot g'(u)\,du\right)_{u=g^{\circ-1}(x)} \quad , \tag{23-19}$$

hvor $g^{\circ-1}(x)$ betegner den omvendte funktion til $g(u)$.

|||| Bevis

Vi skal igen vise, at de to sider i (23.4.19) har samme differentialkvotient for alle x:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x) \quad \text{og}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\int f(g(u))\cdot g'(u)\,du\right)_{u=g^{\circ-1}(x)} \\
&\qquad = \frac{d}{du}\left(\int f(g(u))\cdot g'(u)\,du\right)_{u=g^{\circ-1}(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(g^{\circ-1}(x)\right) \\
&\qquad = \left(f(g(u))\cdot g'(u)\right)_{u=g^{\circ-1}(x)} \cdot \frac{1}{g'(u)} \\
&\qquad = f(g(u)) \\
&\qquad = f(x) \quad ,
\end{aligned} \tag{23-20}$$

hvor vi undervejs har benyttet reglen om differentiation af sammensatte funktioner (kædereglen) og reglen om differentiation af omvendte funktioner, se eNote 14.

■

|||| Eksempel 23.11 Substitution

Vi vil bestemme en stamfunktion til funktionen

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x} \quad , \quad x \in\,]0,\infty[\tag{23-21}$$

altså:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx. \tag{23-22}$$

Hvis vi substituerer med funktionen $g(u) = u^2$ for $u \in\,]0,\infty[$ får vi 'fjernet' kvadratrodstegnet og har dermed ingredienserne til brug i substitutionsreglen:

$$\begin{aligned}
f(g(u)) &= \frac{u}{1+u^2} \\
g'(u) &= 2\cdot u \quad .
\end{aligned} \tag{23-23}$$

Vi indsætter og får:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx \\ &= \left(\int \frac{u}{1+u^2}\cdot 2\cdot u\,du\right)_{u=g^{\circ -1}(x)} \\ &= \left(\int 2\cdot \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,du\right)_{u=\sqrt{x}} \\ &= 2\cdot\left(\int \left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)\,du\right)_{u=\sqrt{x}} \\ &= 2\cdot(u-\arctan(u))_{u=\sqrt{x}} \\ &= 2\cdot(\sqrt{x}-\arctan(\sqrt{x})) \quad , \quad x\in\,]0,\infty[\quad .\end{aligned} \tag{23-24}$$

|||| Opgave 23.12

Bestem samtlige stamfunktioner til funktionen $f(x) = x\cdot e^{x^2}$.

23.5 Fundamental-sætningen

Følgende fundamentale sætning etablerer den antydede relation mellem stamfunktionsbestemmelse og Riemann-integralerne, og det er den vi benytter os kraftigt af i de eNoter, der handler om integration i flere variable.

|||| Sætning 23.13 Integralregningens fundamentalsætning

Lad $f(u)$ betegne en kontinuert funktion på intervallet $[a,b]$. Antag, at $F(u)$ er en (vilkårlig) stamfunktion for $f(u)$. Så gælder følgende:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(f,n,[a,b]) \;=\; \int_a^b f(u)\,du \;=\; [\,F(u)\,]_{u=a}^{u=b} \;=\; F(b)-F(a) \quad . \tag{23-25}$$

Vi vil ikke her bevise fundamentalsætningen – blot bemærke, at man godt kan forvente, at stamfunktionen til $f(u)$ kan give integralsummens grænseværdi som i sætning 23.13: Hvis vi for et givet n lader

$$\widehat{F}(x_0) = \mathrm{I}(f, n, [a, x_0]) \tag{23-26}$$

og hvis vi sætter $x_0 = u_{n+1}$ og $x = x_0 + \delta_u$, så er

$$\begin{aligned} \widehat{F}(x) &= \mathrm{I}(f, n+1, [a, x]) \\ &= \mathrm{I}(f, n, [a, x_0]) + f(u_{n+1}) \cdot \delta_u \\ &= \widehat{F}(x_0) + f(x_0) \cdot (x - x_0) \quad , \end{aligned} \tag{23-27}$$

Hvis vi et øjeblik tillader os at se bort fra n-afhængighederne og de nødvendige involverede grænseværdier for $n \to \infty$, så 'følger' det af (23.5.27), at $\widehat{F}(x)$ er 'differentiabel' i x_0 med 'differentialkvotienten' $f(x_0)$, se definitionen på differentiabilitet af en funktion af én variabel i eNote 14, afsnit 3.4. I den forstand m vi forvente, at $\widehat{F}(x)$ faktisk er en 'stamfunktion' til $f(x)$. Denne grove overvejelse er naturligvis kun en pejling i retning af et egentligt bevis for fundamentalsætningen.

Riemann-integralerne kan herefter beregnes på to måder, dels som grænseværdi af integralsummer og dels som en differens mellem evalueringerne af en stamfunktion i interval-endepunkterne. Det er sædvanligvis den sidste metode, det er smartest at benytte sig af, hvis altså de relevante stamfunktioner kan findes eller bestemmes.

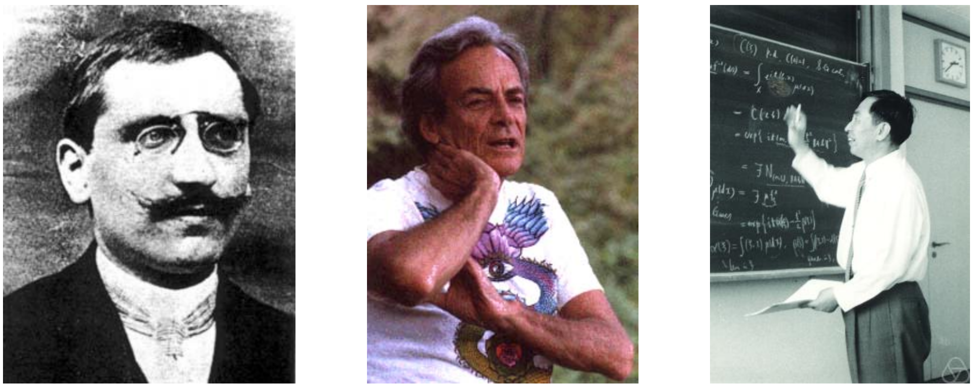

Figure 23.5: Henri Léon Lebesgue, Richard P. Feynman, og Kiyosi Ito.

Riemann-integration er senere blevet udviklet betydeligt til gavn for og brug i adskillige anvendelser. Lebesgue's integral- og målteori fra 1901 gør det for eksempel muligt at udvide begreberne længde, areal, og volumen til også at give konsistent mening for f.eks. fraktale geometriske objekter. Ito-calculus, Santalo's integralgeometri, og Feynman's sti-integraler er blandt de nyeste udviklinger med spændende anvendelser i så vidt forskellige discipliner som finansiel matematik og kvantefeltteori.

Vi illustrerer her fundamentalsætningen og de to beregningsmetoder i form af en opgave og et par eksempler:

|||| Opgave 23.14

Lad $f(u) = 1 + u + u^2$, $u \in [-1, 1]$. Så er

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(f, n, [-1,1]) &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(1 + \left(-1 + (i-1)\frac{2}{n} \right) + \left(-1 + (i-1)\frac{2}{n} \right)^2 \right) \frac{2}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{8 + 4\,n + 2\,n^2 - 16\,i - 4\,i\,n + 8\,i^2}{n^3} \right) \quad . \end{aligned} \tag{23-28}$$

Benyt tabellen over del-summerne nedenfor til at beregne summen i (23.5.28) som funktion af n og dernæst til at eftervise

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(f, n, [-1,1]) = \int_{-1}^{1} \left(1 + u + u^2 \right) du = F(1) - F(0) = \frac{8}{3} \quad , \tag{23-29}$$

idet en stamfunktion til $f(u)$ i dette tilfælde jo er $F(u) = u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3$ således at $F(1) = \frac{8}{3}$ og $F(0) = 0$.

Der gælder følgende om størrelsen af de del-summer, der (pånær faktorer, som kan sættes udenfor $\sum$ −tegnet) optræder i det sidste udtryk for $\mathrm{I}(f, n, [-1,1])$ i ligning (23.5.28):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{n^3} \right) &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{i=n} 1 = \frac{1}{n^2} \quad , \\ \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{n}{n^3} \right) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{n^2} \right) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{i=n} 1 = \frac{1}{n} \quad , \\ \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{n^2}{n^3} \right) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} 1 = 1 \quad , \end{aligned} \tag{23-30}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i}{n^3}\right) &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n+1}{2\,n^2} \quad , \\
\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i\,n}{n^3}\right) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i}{n^2}\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n+1}{2\,n} \quad , \\
\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i\,n}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n+1}{2} \quad ,
\end{aligned} \tag{23-31}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i^2}{n^3}\right) &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{2\,n^2+3\,n+1}{6\,n^2} \\
\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i^2}{n^2}\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{2\,n^2+3\,n+1}{6\,n} \\
\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i^2}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{2\,n^2+3\,n+1}{6}
\end{aligned} \tag{23-32}$$

Vi har benyttet ovenfor, at

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=n} i &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad \text{og} \\
\sum_{i=1}^{i=n} i^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad .
\end{aligned} \tag{23-33}$$

Bevis de to ligninger i (23.5.33) – evt. ved ***matematisk induktion***, se Wikipedia.

Hvis vi ønsker at bestemme Riemann-integraler for funktioner, der ikke er så simple som polynomier, så er det ofte simplest at benytte stamfunktionsberegningen i stedet for at vurdere grænseværdierne for integral-summerne.

|||| Eksempel 23.15 Sinus som integralsum

Vi betragter en velkendt funktion $f(u) = \cos(u)$ med stamfunktionen:

$$\int f(u)\,du = \int \cos(u)\,du = \sin(u) \quad , \tag{23-34}$$

således at

$$\int_0^{u_0} \cos(u)\,du = \sin(u_0) \tag{23-35}$$

for ethvert $u_0 \in \mathbb{R}$. En 'baglæns læsning' af fundamentalsætningen giver derfor $\sin(u_0)$ udtrykt ved værdier af $\cos(u)$ for $u \in [0, u_0]$:

$$\sin(u_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_0}{n}\right) \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \cos\left(\frac{(i-1)\cdot u_0}{n}\right) \tag{23-36}$$

|||| Eksempel 23.16 FresnelC og FresnelS

Vi vil vurdere følgende sum for $n \to \infty$:

$$S(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \cos\left(\frac{(k-1)^2}{n^2}\right) \quad . \tag{23-37}$$

Summen har form som en integralsum

$$S(n) = \mathrm{I}(f, n, [0,1]) = \sum_{i=1}^{i=n} f(u_i)\cdot\delta_u \tag{23-38}$$

nemlig for funktionen $f(u) = \cos(u^2)$ med $\delta_u = 1/n$ over intervallet $[0,1]$. Ifølge fundamentalsætningen har vi derfor:

$$S(n) \to \int_0^1 \cos(u^2)\,du \quad \text{for} \quad n\to\infty \quad . \tag{23-39}$$

Den stamfunktion $F(u)$ til $f(u) = \cos(u^2)$ som har værdien $F(0) = 0$ i $u = 0$, kan udtrykkes ved en funktion der hedder FresnelC(u):

$$F(u) = \int \cos(u^2)\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot \mathrm{FresnelC}\left(u\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) \quad , \tag{23-40}$$

sådan at:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \cos\left(\frac{(k-1)^2}{n^2}\right) \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\mathrm{FresnelC}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = 0.905 \quad \text{for} \quad n\to\infty \quad . \tag{23-41}$$

Tilsvarende er den funktion som benævnes FresnelS stamfunktion til $\sin(u^2)$ (med værdien 0 i $u = 0$), således at

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(\frac{(k-1)^2}{n^2}\right) \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\mathrm{FresnelS}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = 0.310 \quad \text{for} \quad n\to\infty \quad . \tag{23-42}$$

23.6 Dobbeltsummer og dobbeltintegraler

For funktioner af to variable har vi svarende til sætning 23.5 følgende:

|||| Sætning 23.17

Lad $f(u, v)$ betegne en kontinuert reel funktion på et rektangel $[a, b] \times [c, d]$ i (u, v)-planen. Intervallet $[a, b]$ deles i n lige store delintervaller og intervallet $[c, d]$ deles i m lige store delintervaller. Så har hvert u-delinterval længden $\delta_u = (b-a)/n$ og hvert v-delinterval har længden $\delta_v = (d-c)/m$. Tilsvarende bliver delepunkternes koordinater i (u, v)-parameterområdet (som jo er rektanglet $[a, b] \times [c, d]$ i $\mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned}
(u_1, v_1) &= (a, c), \\
(u_1, v_j) &= (a, c + (j-1)\delta_v), \\
(u_i, v_1) &= (a + (i-1)\delta_u, c), \\
(u_i, v_j) &= (a + (i-1)\delta_u, c + (j-1)\delta_v), \\
&\dots. \\
(u_n, v_m) &= (a + (n-1)\delta_u, c + (m-1)\delta_v) \quad .
\end{aligned} \tag{23-43}$$

Derved bliver det rektangulære parameterområde tilsvarende underopdelt i ialt $n \cdot m$ helt ens under-rektangler, der hver har arealet $\delta_u \cdot \delta_v$. De definerede delepunkter er de nederste venstre hjørnepunkter i disse underrektangler.

Lad nu $\mathrm{II}(f, n, m, [a, b] \times [c, d])$ betegne følgende dobbeltsum, hvor hver addend er et vægtet areal; vægtene er de respektive værdier af $f(u, v)$ i hvert af de ovenfor definerede nederste venstre hjørnepunkter i de rektangler der opdeler parameterområdet, og hvert enkelt del-areal er det konstante areal af hver del-rektangel $\delta_u \cdot \delta_v$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{II}(f, n, m, [a, b] \times [c, d]) \\
&= \sum_{j=1}^{j=m} \left(\sum_{i=1}^{i=n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n},\ c + (j-1)\frac{d-c}{m}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{d-c}{m}\right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{j=m} \left(\sum_{i=1}^{i=n} f\left(a + (i-1)\delta_u,\ c + (j-1)\delta_v\right) \cdot \delta_u \cdot \delta_v \right) \\
&= \sum_{j=1}^{j=m} \left(\sum_{i=1}^{i=n} f\left(u_i,\ v_j\right) \cdot \delta_u \right) \cdot \delta_v \quad .
\end{aligned} \tag{23-44}$$

Så har $\mathrm{II}(f, n, m, [a, b] \times [c, d])$ en grænseværdi for $n \to \infty$, $m \to \infty$, og den betegnes med:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{m \to \infty} \mathrm{II}(f, n, m, [a, b] \times [c, d]) \right) = \int_c^d \left(\int_a^b f(u, v)\, du \right) dv \quad . \tag{23-45}$$

Summer af typen $\mathrm{II}(f,n,m,[a,b]\times[c,d])$ vil vi kalde *dobbelt integralsummer* og grænseværdien $\int_c^d \left(\int_a^b f(u,v)\,du\right)\,dv$ kaldes tilsvarende igen Riemann-integralet af $f(u,v)$ over $[a,b]\times[c,d]$.

Bemærk, at vi nu kan tillade os at skrive følgende – når Riemann-integralet af $f(u,v)$ over $[a,b]\times[c,d]$ eksisterer:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f\left(u_i,\ v_j\right)\cdot\delta_u\right)\cdot\delta_v = \int_c^d \left(\int_a^b f(u,v)\,du\right)\,dv \quad , \tag{23-46}$$

således at vi groft sagt har at $\sum$-tegnet bliver til et $\int$-tegn i grænsen, og tilsvarende δ_u og δ_v bliver til henholdsvis du og dv.

Riemann-integralet af $f(u,v)$ over $[a,b]\times[c,d]$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(u,v)\,du\right)\,dv \tag{23-47}$$

i sætning 23.17 er *kun* et *symbol*, en betegnelse, for grænseværdien af dobbeltintegralsummen for $f(u,v)$. Sætningens essentielle påstand er at den grænseværdi *eksisterer* når $f(u,v)$ er kontinuert i det rektangulære område. Men den reduktion af dobbeltsummen, der foregår i ligning (23.6.44) og selve notationen for Riemnan-integralet mere end antyder, at Riemann-integralet faktisk kan *beregnes* ved hjælp af stamfunktioner for passende funktioner af én variabel. Det er selvfølgelig indholdet af fundamentalsætningen for dobbelte integralsummer.

23.7 Fundamental-sætningen for dobbelte integralsummer

De Riemann'ske dobbeltintegraler beregnes via stamfunktionsbestemmelse således:

|||| **Sætning 23.18**

Lad $f(u,v)$ betegne en kontinuert funktion på $[a,b] \times [c,d]$. Antag, at $F(u,v)$ er en (vilkårlig) stamfunktion for $f(u,v)$ (betragtet som en funktion af den ene variabel u) for et vilkårligt givet $v \in [c,d]$. Lad dernæst $G(a,v)$ være en vilkårlig stamfunktion til $F(a,v)$ og lad $G(b,v)$ være en vilkårlig stamfunktion til $F(b,v)$. Så gælder følgende:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} \mathrm{II}(f,n,m,[a,b]\times[c,d])\right) &= \int_c^d \left(\int_a^b f(u,v)\,du\right) dv \\
&= \int_c^d \left[\,F(u,v)\,\right]_{u=a}^{u=b} dv \\
&= \int_c^d \left(F(b,v) - F(a,v)\right) dv \\
&= \left[\,G(b,v)\,\right]_{v=c}^{v=d} - \left[\,G(a,v)\,\right]_{v=c}^{v=d} \\
&= \left(G(b,d) - G(b,c)\right) \\
&\quad - \left(G(a,d) - G(a,c)\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{23-48}
$$

Vi illustrerer beregningen af Riemann'ske dobbeltintegraler med enkelte eksempler – mest for at vise, at i konkrete tilfælde kan beregningerne være simplere end (23.7.48) lader ane:

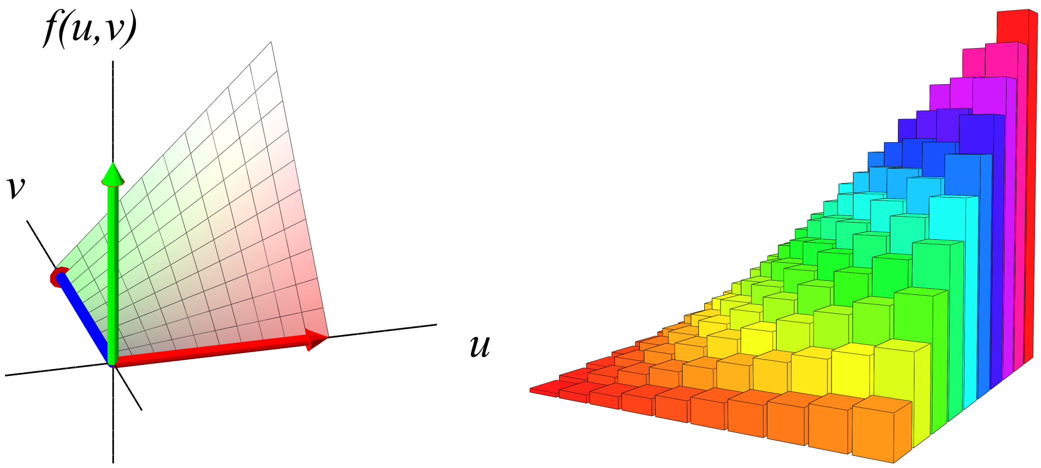

Figure 23.6: Volumen-repræsentation af integralsummen $\mathrm{II}(f,10,10,[0,1]\times[0,1])$ for funktionen $f(u,v) = u\,v$.

|||| Eksempel 23.19 Et Riemann'sk dobbeltintegral

Lad $f(u,v) = u \cdot v^2$ for $u \in [0,1]$ og $v \in [-1,1]$. Så er

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{1} v^2\, u du \right) dv &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [\, v^2\, u^2\,]_{u=0}^{u=1}\, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} v^2\, dv \\ &= \frac{1}{6} [\, v^3\,]_{v=-1}^{v=1} \\ &= \frac{1}{3} \quad . \end{aligned} \tag{23-49}$$

Bemærk, at beregningen af dobbeltintegralet foretages 'indefra' – det inderste integral er et integral over u-intervallet, her $[0,1]$, og beregnes først, dvs. med *fastholdt* v. En stamfunktion til $v^2 \cdot u$ med konstant v er $v^2 \cdot u^2/2$ sådan at:

$$\int_{0}^{1} v^2\, cdotu\, du = \frac{1}{2} \cdot [\, v^2\, u^2\,]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2} \cdot v^2 \quad . \tag{23-50}$$

I beregningen kunne vi alternativt have benyttet, at $F_v(u) = v^2u^2/2$ og dermed $G_a(v) = v^3a^2/6$, $G_b(v) = v^3b^2/6$ og indsat direkte i det sidste udtryk i (23.7.48).

|||| Eksempel 23.20 Et dobbeltintegral med symmetri

Lad $f(u,v) = u \cdot v$ for $u \in [-1,1]$ og $v \in [-1,1]$. Så er

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} v\, u\, du \right) dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [\, v\, u^2\,]_{u=-1}^{u=1}\, dv = 0 \quad , \tag{23-51}$$

mens

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1} v\, u du \right) dv &= \frac{1}{2} \int_{0}^{1} [\, v\, u^2\,]_{u=0}^{u=1}\, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{0}^{1} v\, dv \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot [\, v^2\,]_{v=0}^{v=1} \\ &= \frac{1}{4} \quad . \end{aligned} \tag{23-52}$$

|||| Eksempel 23.21 Dobbelt integralsum

Volumen-repræsentation af integralsummen $\mathrm{II}(f, 10, 10, [0,1] \times [0,1])$ for funktionen $f(u,v) = u\,v$ er vist i figur 23.6. De 100 addender i summen er til højre repræsenteret ved søjler med samme kvadratiske tværsnit og med højder, som er givet ved de respektive værdier af funktionen $f(u,v) = u\,v$ i (u,v)-kvadratets delepunkter. Der opnås derved en approksimation til rumfanget af det område i rummet, der er afgrænset af $(x,y)-$planen og graf-fladen for funktionen $f(x,y) = xy$ over kvadratet $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, som vist til venstre. Det eksakte rumfang er $\frac{1}{4}$.

23.8 Tredobbelte summer og tredobbelte integraler

Sætning 23.22

Lad $f(u,v,w)$ betegne en kontinuert reel funktion på et kasseformet parameterområde $[a,b]\times[c,d]\times[h,l]$ i (u,v,w)-rummet. Intervallet $[a,b]$ deles i n lige store delintervaller, intervallet $[c,d]$ deles i m lige store delintervaller, og intervallet $[h,l]$ deles i q lige store delintervaller. Så har hvert u-delinterval længden $\delta_u = (b-a)/n$, hvert v-delinterval har længden $\delta_v = (d-c)/m$ og hvert w-delinterval har længden $\delta_w = (h-l)/q$. Tilsvarende bliver delepunkternes koordinater i (u,v,w)-parameterområdet $[a,b]\times[c,d]\times[h,l]$ i $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}(u_1,v_1,w_1) &= (a,c,h),\\ &\;\;....\\ (u_n,v_m,w_q) &= (a+(n-1)\delta_u, c+(m-1)\delta_v, h+(q-1)\delta_w)\quad .\end{aligned} \tag{23-53}$$

Lad nu $\mathrm{III}(f,n,m,q,[a,b]\times[c,d]\times[h,l])$ betegne følgende :

$$\begin{aligned}&\mathrm{III}(f,n,m,q,[a,b]\times[c,d]\times[h,l])\\ &= \sum_{k=1}^{k=q}\left(\sum_{j=1}^{j=m}\left(\sum_{i=1}^{i=n} f\left(u_i,\; v_j,\; w_k\right)\delta_u\right)\delta_v\right)\delta_w \quad .\end{aligned} \tag{23-54}$$

Så gælder

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{q\to\infty}\mathrm{III}(f,n,m,q,[a,b]\times[c,d]\times[h,l])\right)\right)\\ &= \int_h^l\left(\int_c^d\left(\int_a^b f(u,v,w)\,du\right)dv\right)dw \quad .\end{aligned} \tag{23-55}$$

Summer af typen $\mathrm{III}(f,n,m,q,[a,b]\times[c,d]\times[h,l])$ vil vi naturligvis kalde *tredobbelte integralsummer* og grænseværdien $\int_h^l\left(\int_c^d\left(\int_a^b f(u,v,w)\,du\right)dv\right)dw$ kaldes *Riemann-integralet* af $f(u,v,w)$ over $[a,b]\times[c,d]\times[h,l]$.

23.9 Fundamental-sætningen for tredobbelte integralsummer

De Riemann'ske tredobbelte integraler beregnes således:

|||| Sætning 23.23

Lad $f(u,v,w)$ betegne en kontinuert funktion på $[a,b] \times [c,d] \times [h,l]$.
Antag, at $F(u,v,w)$ er en (vilkårlig) stamfunktion for $f(u,v,w)$ (betragtet som en funktion af den ene variabel u) for vilkårligt givne $v \in [c,d]$ og $w \in [h,l]$.

- Lad $G(a,v,w)$ være en vilkårlig stamfunktion til $F(a,v,w)$ (betragtet som en funktion af den ene variabel v) for vilkårligt givet $w \in [h,l]$.

- Lad $G(b,v,w)$ være en vilkårlig stamfunktion til $F(b,v,w)$ (igen betragtet som en funktion af den ene variabel v) for vilkårligt givet $w \in [h,l]$.

- Lad endelig $H(a,c,w)$ være en vilkårlig stamfunktion til $G(a,c,w)$, og tilsvarende $H(b,c,w)$, $H(a,d,w)$, og $H(b,d,w)$ stamfunktioner for $G(b,c,w)$, $G(a,d,w)$, og $G(b,d,w)$.

Så gælder :

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{q\to\infty}\mathrm{III}(f,n,m,q,[a,b]\times[c,d]\times[h,l])\right)\right)\\
&= \int_h^l\left(\int_c^d\left(\int_a^b f(u,v,w)\,du\right)dv\right)dw \\
&= H(b,d,l)-H(b,d,h)-(H(b,c,l)-H(b,c,h))\\
&\quad -((H(a,d,l)-H(a,d,h))-(H(a,c,l)-H(a,c,h))) \quad .
\end{aligned}
\tag{23-56}
$$

Vi illustrerer med et par simple beregninger:

|||| Eksempel 23.24 Tredobbelt integration

Lad $f(u,v,w) = u\,v\,\sin(w)$ for $u \in [0,1]$, $v \in [0,2]$ og $w \in [0,\pi/2]$. Så er

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2\left(\int_0^1 u\,v\,\sin(w)\,du\right)dv\right)dw &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2 v\,\sin(w)\,[\,u^2/2\,]_{u=0}^{u=1}\,dv\right)dw \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2 v\,\sin(w)\,dv\right)dw \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(w)\,[\,v^2/2\,]_{v=0}^{v=2}\,dw \\
&= \int_0^{\pi/2}\sin(w)\,dw \\
&= [-\cos(w)]_{w=0}^{w=\pi/2} \\
&= 1 \quad .
\end{aligned}
$$

|||| Eksempel 23.25 Et tre-dobbeltintegral med symmetri

Lad $f(u,v,w) = u \cdot v \cdot w$ for $u \in [-1,1]$ og $v \in [-1,1]$, og $w \in [-1,1]$. Så er

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} w\, v\, u\, du \right) dv \right) dw = 0 \quad , \tag{23-57}$$

mens

$$\int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1} w\, v\, u\, du \right) dv \right) dw = \frac{1}{8} \quad , \tag{23-58}$$

|||| Eksempel 23.26 Enhedskuglens rumfang

Som gennemgået i eNoten om integration over rumlige områder beregnes volumenet af den massive enhedskugle ved følgende tredobbelte Riemann-integral (som vil blive motiveret i den eNote). Dermed verificeres Archimedes' resultat:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\text{Enhedskuglen}) &= \int_{0}^{1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{0}^{\pi} w^2 \sin(u)\, du \right) dv \right) dw \\
&= \int_{0}^{1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} w^2 \left[-\cos(u) \right]_{u=0}^{u=\pi} \, dv \right) dw \\
&= 2 \int_{0}^{1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} w^2\, dv \right) dw \\
&= 2 \int_{0}^{1} w^2 \left[v \right]_{v=-\pi}^{v=\pi} \, dw \\
&= 4\pi \int_{0}^{1} w^2\, dw \\
&= 4\pi \left[w^3/3 \right]_{w=0}^{w=1} \\
&= \frac{4\pi}{3} \quad .
\end{aligned} \tag{23-59}$$

23.10 Opsummering

I denne eNote har vi beskæftiget os med basis for de metoder og resultater, der er helt uomgåelige hjælpemidler for at kunne finde længder, arealer, rumfang, massemidtpunkter, inertimomenter etc. af henholdsvis kurver, og områder i plan og rum.

- For enhver given kontinuert funktion $f(u)$ af én variabel u på et interval $[a, b]$ opstiller vi de integralsummer $\mathrm{I}(f, n, [a, b])$, der i grænsen for $n \to \infty$ definerer Riemann-integralet af funktionen over intervallet. Disse Riemann-integraler kan derefter selv beregnes (via fundamentalsætningen) ved hjælp af en stamfunktion $F(u)$ for $f(u)$ således:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(f, n, [a, b]) &= \sum_{i=1}^{i=n} f\,(u_i)\;\delta_u \\ \sum_{i=1}^{i=n} f\,(u_i)\;\delta_u &\to \int_a^b f(u)\,du \quad \text{for} \quad \mathrm{n} \to \infty \\ \int_a^b f(u)\,du &= [F(u)]_{u=a}^{u=b} \;= F(b) - F(a) \quad , \end{aligned} \tag{23-60}$$

  hvor

$$u_i = a + (i-1)\cdot\delta_u \quad \text{og} \quad \delta_u = \frac{b-a)}{n} \quad . \tag{23-61}$$

- Helt tilsvarende grænseværdier for tilsvarende summer for kontinuerte funktioner af to og tre variable er opstillet og eksemplificeret.