eNote 16

Lineære differentialligningers karakter og lineære 1. ordens differentialligninger

I denne note introduceres lineære differentialligninger, som er en speciel (og bekvem) form for differentialligninger. Endvidere ses på en type af lineære differentialligninger, hvor den ukendte funktion og dens første afledede indgår, såkaldte 1. ordens lineære differentialligninger.

Noten bygger på kendskab til lineære afbildninger. Noten er udgangspunkt for de to følgende noter, eNote 17 og eNote 18.

Version 21.08.15.

16.1 Hvad er en differentialligning?

En *differentialligning* er en ligning, hvori en *funktion* er den ukendte. Det er altså en *funktion*, vi vil finde. Differentialligninger optræder naturligt bl.a. i mange fysiske, mekaniske, kemiske og elektromagnetiske problemer, hvorfor det er et vigtigt emne.

Forklaring 16.1 Hvad er en differentialligning?

Et eksempel på en (lineær) differentialligning er

$$x'(t) + 2x(t) = 30 + 8t\,. \tag{16-1}$$

Den ukendte funktion $x(t)$ kan optræde sammen med nogle af dens differentialkvotienter af vilkårlige ordner — fx $x'(t)$ eller $x'''(t)$ — som også er funktioner. Altså har vi en ligning med flere ubekendte; både funktionen selv og dens differentialkvotienter. På trods af, at der er flere end én ubekendt i ligningen, *er* den dog mulig at løse, da der selvfølgelig er en sammenhæng mellem disse ubekendte, altså funktionen og dens differentialkvotienter. Løsningen til (16.1.1) er

$$x(t) = 13 + 4t + ce^{-2t}\,. \tag{16-2}$$

At løsningen har denne form, og hvordan vi er kommet frem til resultatet, handler denne note om.

Differentialligninger kan ofte løses på forskellige måder. Fx kan nogle differentialligninger løses på samme måde, som man normalt løser "'*én ligning med én ukendt*"' (fx $2y + 3 = -1$). Her bytter man om på led i ligningen. Andre gange opstilles en løsningsformel, hvor forarbejdet allerede er gjort (fx ved andengradsligninger).

Løsningen til en differentialligning fungerer på samme måde som en løsning til en normal ligning, og man kan derfor "'gøre prøve"'. Løsningen skal nemlig passe ind i differentialligningen. I eksemplet i forklaring 16.1 kan man differentiere løsningen for at f differentialkvotienten $x'(t) = 4 - 2ce^{-2t}$. Indsættes denne sammen med udtrykket for $x(t)$ i den oprindelige differentialligning, er det muligt at se, om løsningen passer. Prøv selv.

Lineære differentialligninger har ikke kun én løsning. De har faktisk uendeligt mange. Løsningerne kan dog opskrives på en måde, så man i ét udtryk har den såkaldte *fuldstændige løsningsmængde* eller blot den *fuldstændige løsning*. Den fuldstændige løsningsmængde er derfor ikke nogen funktion, men en *samling* af uendeligt mange funktioner — det er derfor ikke muligt at tegne grafen for den fuldstændige løsning; man kan højst tegne grafen for *nogle* af løsningerne, som den fuldstændige løsning indeholder.

Nogle gange kan det være hensigtsmæssigt at bruge komplekse tal i differentialligningers løsningsproces, hvilket leder til komplekse løsninger. Disse løsninger kan imidlertid ikke bruges konkret – hvorfor løsningerne transformeres til reelle løsninger. De komplekse tal bliver derfor kun brugt som et værktøj, hvilket behandles i en senere eNote.

16.2 Linearitet og løsningsstruktur

Inden vi skal i gang med at behandle de enkelte typer af lineære differentialligninger, betragtes de generelt under ét. Dette gøres for at vise, hvad det vil sige, at en differentialligning er lineær, og hvilken form løsninger til sådanne differentialligninger har.

En vilkårlig lineær differentialligning kan skrives på formen

$$f(x(t)) = q(t), \quad t \in I, \tag{16-3}$$

hvor $q : I \to \mathbb{R}$ er en funktion af t og kaldes *højresiden*, og $x : I \to \mathbb{R}$ er den ukendte funktion, man ønsker at bestemme. $f : C^n(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ er en lineær afbildning med definitionsrummet $C^n(\mathbb{R})$ og dispositionsrummet $C^0(\mathbb{R})$. Netop når f er en lineær afbildning, er differentialligningen lineær. Værdien af tallet $n \geq 0$ er bestemt af differentialligningens *orden*. Højresiden indeholder alle led i ligningen, hvor funktionen $x(t)$ eller dens afledede ikke indgår.

Følgende definition er en gentagelse af en allerede kendt definition om lineære afbildninger (se definition 12.5). Med den er det muligt at afgøre, om f er en lineær afbildning, og derfor om differentialligningen $f(x(t)) = q(t)$ er lineær.

|||| Definition 16.2 Lineære differentialligninger

En differentialligning $f(x(t)) = q(t)$ er lineær, hvis ligningens venstreside $f(x(t))$ opfylder begge linearitetsbetingelser:

1. $f(x_1(t) + x_2(t)) = f(x_1(t)) + f(x_2(t))$
2. $f(k \cdot x(t)) = k \cdot f(x(t))$,

altså hvis $f : C^n(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ er en lineær afbildning hvor n angiver differentialligningens *orden* (det højeste antal gange $x(t)$ forekommer differentieret i ligningen). $x(t), x_1(t), x_2(t)$ er løsninger til differentialligningen, og $k \in \mathbb{C}$ er en konstant.

|||| Eksempel 16.3 Lineære differentialligninger?

Givet er de to differentialligninger

$$x''(t) + x^2(t) = -4t \quad \text{og} \tag{16-4}$$
$$(t-1)x'(t) - t^2 x(t) + 3 = 0\,. \tag{16-5}$$

Undersøg, om de to differentialligninger er lineære.

Vi benytter definition 16.2. På grund af overskueligheden skrives $x(t)$ blot som x i dette eksempel.

Først undersøges det, om $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ er opfyldt, altså om $f(x_1 + x_2) - (f(x_1) + f(x_2))$ er lig nul, og derefter om $f(k \cdot x(t)) = k \cdot f(x(t))$ er opfyldt, altså om $f(k \cdot x) - k \cdot f(x)$ er lig nul.

Den første ligning
For (16.2.4) er højresiden $q(t) = -4t$ og $f(x) = x'' + x^2$. Betingelse 1 i sætning 16.2 testes:

$$\begin{aligned} & f(x_1 + x_2) - (f(x_1) + f(x_2)) \\ =& (x_1 + x_2)'' + (x_1 + x_2)^2 - (x_1'' + x_1^2 + x_2'' + x_2^2) \\ =& x_1'' + x_2'' + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1'' - x_1^2 - x_2'' - x_2^2 \\ =& 2x_1x_2 \neq 0 \end{aligned} \tag{16-6}$$

Vi stopper allerede nu, da det første krav ikke er opfyldt. $x''(t) + x^2(t) = -4t$ er altså en ikke-lineær differentialligning.

Den anden ligning
(16.2.4) omskrives først til formen $f(x(t)) = q(t)$, og vi fr da, at venstresiden er $f(x) = (t-1)x' - t^2x$, og at højresiden er $q(t) = -3$. f afprøves nu med betingelse 1 i sætning 16.2:

$$\begin{aligned} & f(x_1 + x_2) - (f(x_1) + f(x_2)) \\ =& (t-1)(x_1 + x_2)' - t^2(x_1 + x_2) - (t-1)x_1' + t^2x_1 - (t-1)x_2' + t^2x_2 \\ =& (t-1)x_1' + (t-1)x_2' - t^2x_1 - t^2x_2 - (t-1)x_1' + t^2x_1 - (t-1)x_2' + t^2x_2 \\ =& 0 \end{aligned} \tag{16-7}$$

Den første betingelse er opfyldt. Hvad med den anden?

$$\begin{aligned} f(k \cdot x) - k \cdot f(x) =& (t-1)(kx)' - t^2(kx) - k((t-1)x' - t^2x) \\ =& (t-1)(kx)' - t^2(kx) - (t-1)kx' + t^2kx = 0 \end{aligned} \tag{16-8}$$

Andet kriterium er ligeså opfyldt, og differentialligningen $(t-1)x'(t) - t^2x(t) + 3 = 0$ er derfor lineær.

Ved at kigge på en differentialligning, er det med lidt øvelse muligt at se, om den er lineær eller ej: For eksempel hvis der optræder potenser, logaritmer eller opløftninger af $x(t)$, er differentialligningen *ikke* lineær.

Løsningen til en lineær *differential*ligning er opbygget på samme måde som løsningen til en lineær ligning. Løsningen er en sum af ligningens kerne (den fuldstændige løsningsmængde til den tilsvarende homogene ligning) og en partikulær løsning til den inhomogene ligning. I lineære ligninger er kernen *enten* nulvektoren eller flerdimensional. I lineære differentialligninger har kernen *altid* flere dimensioner. Det vil sige, at differentialligningens løsningsmængde er entydig og flerdimensional men udspænder uendeligt mange funktioner, og derfor samlet set ikke er en entydig *funktion*.

Herunder er en sætning, der ligesom definitionen ovenfor gentager, hvad vi allerede ved om sådanne lineære afbildninger og lineære ligninger, men som er specificeret til differentialligninger. Den skal dels give et overblik over, hvordan vi kan gribe en differentialligning an og løse den, og dels sætte nogle enkelte begreber på plads.

|||| Sætning 16.4 Løsningsstruktur

Den lineære differentialligning

$$f(x(t)) = q(t), \quad t \in I \tag{16-9}$$

kaldes *inhomogen*, når højresiden $q(t) \neq 0$. Den tilsvarende differentialligning

$$f(x(t)) = 0, \quad t \in I \tag{16-10}$$

kaldes homogen.

Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} til den inhomogene differentialligning har formen

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom}, \tag{16-11}$$

hvor

- $x_0(t)$ er en *partikulær løsning* til den *inhomogene* differentialligning, og
- L_{hom} er den *fuldstændige løsningsmængde* til den tilsvarende *homogene* differentialligning.

Additionen i ligning (16-11) betyder, at den fuldstændige løsningsmængde til den inhomogene ligning er lig den partikulære løsning til den inhomogene ligning adderet med samtlige funktioner udspændt af den fuldstændige løsningsmængde til den homogene ligning.

Sætningen er en følge af, at f er en lineær afbildning og behøver derfor ikke et bevis i denne sammenhæng.

Læg mærke til at $x_0(t)$ er en funktion, hvorimod L_{hom} og L_{inhom} er mængder af funktioner.

For at give et overblik over, hvordan notationen er omkring sammenspillet mellem løsninger i form af funktioner og mængder, gives herunder et eksempel. Det er vigtigt at forstå denne notation, der bliver brugt i resten af eNoten.

|||| Eksempel 16.5 Løsningsstruktur

Givet er den lineære inhomogene differentialligning

$$x'(t) + 2x(t) = 30 + 8t, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{16-12}$$

Tilsvarende findes den homogene differentialligning

$$x'(t) + 2x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{16-13}$$

som har den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} bestående af følgende funktioner for alle $c \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = ce^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{16-14}$$

Hvordan vi er kommet frem til løsningen, er ikke relevant i denne sammenhæng (gør eventuelt selv prøve). En anden måde at skrive præcis det samme er som

$$L_{hom} = \left\{ ce^{-2t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{16-15}$$

Det læses sådan: *Den fuldstændige homogene løsningsmængde L_{hom} er lig mængden af alle funktionerne ce^{-2t}, hvorom der gælder, at $t \in \mathbb{R}$ og $c \in \mathbb{R}$.* Begge skrivemåder vil blive brugt fremover.

En partikulær løsning til den inhomogene differentialligning er

$$x_0(t) = 13 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{16-16}$$

Læg mærke til, at den partikulære løsning er en funktion og ikke en mængde af funktioner – heraf kommer navnet "‘partikulær"’. Det er nu muligt at opstille den fuldstændige løsningsmængde til den inhomogene differentialligning ved hjælp af sætning 16.2.11evn-count.16.4:

$$\begin{aligned} L_{inhom} &= x_0(t) + L_{hom} = 13 + 4t + \left\{ ce^{-2t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ 13 + 4t + ce^{-2t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned} \tag{16-17}$$

Det læses således: *L_{inhom} er mængden af funktioner $13 + 4t + ce^{-2t}$, hvorom der gælder, at $t \in \mathbb{R}$ og $c \in \mathbb{R}$.*
Tilsvarende kan man skrive følgende: Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} til den inhomogene differentialligning er lig mængden af følgende funktioner for alle $c \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = 13 + 4t + ce^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{16-18}$$

16.3 1.-ordens lineære differentialligninger

Vi betragter nu den generelle 1. ordens lineære differentialligning, der kan udtrykkes ved

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{16-19}$$

hvor $p : I \to \mathbb{R}$ og $q : I \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner. Det overlades til læseren at vise, at differentialligningen er lineær. Hvis højresiden $q(t)$ er forskellig fra nul, er differentialligningen inhomogen; i modsat fald er den homogen. Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom}, hvilket gøres generelt i nedenstående løsningsformel, som populært kaldes Panserformlen.

|||| Sætning 16.6 Panserformlen

Den 1. ordens lineære differentialligning, som har formen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{16-20}$$

hvor $p : I \to \mathbb{R}$ og $q : I \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner, har den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} bestående af følgende funktioner for alle de arbitrære konstanter $c \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \left(\int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt + c \right), \quad t \in I, \tag{16-21}$$

hvor $P(t) = \int p(t)dt$.

Bemærk specielt at den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den tilsvarende homogene differentialligning (hvor $q(t) = 0$) består af følgende funktioner for alle de arbitrære konstanter $c \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-P(t)}, \quad t \in I. \tag{16-22}$$

|||| Bevis

I den inhomogene differentialligning (16-20) indgår funktionen $p(t)$, og vi indfører en vilkårlig stamfunktion til denne, så $P(t) = \int p(t)dt$. Man får den idé at gange ligningen igennem med $\mathrm{e}^{P(t)}$ og betragter derefter venstresiden:

$$\mathrm{e}^{P(t)} x'(t) + \mathrm{e}^{P(t)} p(t)x(t) = \mathrm{e}^{P(t)} q(t)\,. \tag{16-23}$$

Med et vågent øje lægger man mærke til, at venstresiden er en differentialkvotient til et produkt af to bestemte funktioner, nemlig $\mathrm{e}^{P(t)}x(t)$, fordi man ved hjælp af produktreglen får følgende:

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{P(t)}x(t))' &= \mathrm{e}^{P(t)}x'(t) + (\mathrm{e}^{P(t)})'x(t) \\ &= \mathrm{e}^{P(t)}x'(t) + \mathrm{e}^{P(t)}p(t)x(t)\,.\end{aligned} \tag{16-24}$$

Det er altså muligt at erstatte venstresiden af (16-23) med $(\mathrm{e}^{P(t)}x(t))'$, hvilket giver

$$(\mathrm{e}^{P(t)}x(t))' = \mathrm{e}^{P(t)}q(t). \tag{16-25}$$

Integreres begge sider med hensyn til t fås:

$$\mathrm{e}^{P(t)}x(t) = \int \mathrm{e}^{P(t)}q(t)dt + c, \tag{16-26}$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ er en arbitrær konstant. Ganges på begge sider med $\mathrm{e}^{-P(t)}$ fås løsningsformlen, som vi kalder *Panserformlen*:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)}\left(\int \mathrm{e}^{P(t)}q(t)dt + c\right), \quad t \in I. \tag{16-27}$$

Den fuldstændige løsningsmængde består af ovenstående funktioner for alle $c \in \mathbb{R}$.

■

|||| Eksempel 16.7 Løsning med Panserformlen

Givet er differentialligningen

$$x'(t) + \frac{2}{t}x(t) = 8t - \frac{10}{t}, \quad t > 0\,. \tag{16-28}$$

Med Panserformlen, sætning 16.3.20evncount.16.6, er det muligt at finde den fuldstændige løsningsmngde L_{inhom}. Vi har $p(t) = \frac{2}{t}$ og $q(t) = 8t - \frac{10}{t}$. Først bestemmes $P(t)$:

$$P(t) = \int p(t)dt = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln t\,. \tag{16-29}$$

Vi har da

$$\mathrm{e}^{-P(t)} = \mathrm{e}^{-2\ln t} = \mathrm{e}^{\ln(t^{-2})} = t^{-2} = \frac{1}{t^2}\,. \tag{16-30}$$

Af dette følger, at $e^{P(t)} = t^2$. Nu bruges Panserformlen:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-P(t)} \left(\int e^{P(t)} q(t) dt + c \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \left(\int t^2 \left(8t - \frac{10}{t} \right) dt + c \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \left(\int (8t^3 - 10t) dt + c \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \left(2t^4 - 5t^2 + c \right) \\ x(t) &= 2t^2 - 5 + \frac{c}{t^2}, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{16-31}$$

Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} består af de ovenstående funktioner, hvor alle $c \in \mathbb{R}$. Man kan ligeså skrive det sådan:

$$L_{inhom} = \left\{ 2t^2 - 5 + \frac{c}{t^2} \;\middle|\; t > 0, c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{16-32}$$

16.3.1 Eksistens og entydighed

Vi ser på den 1. ordens lineære differentialligning, som har formen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{16-33}$$

og som kan løses med sætning 16.3.20evncount.16.6. I sætningen indgår den arbitrære konstant c, som angiver, at der er uendeligt mange funktioner, som er løsninger til differentialligningen, og de udspænder en løsningsmængde. Ofte er man kun interesseret i netop én løsning — altså én funktion — som opfylder nogle betingelser. En sådan betingelse kaldes en *begyndelsesvrdibetingelse*. En begyndelsesværdibetingelse kan for eksempel være, at man kender funktionsværdien i $t = 0$. Af de uendeligt mange funktioner, som en lineær differentiallignings løsningsmængde indeholder, er der måske kun få — måske endda kun én — som opfylder netop den betingelse. Dette beskrives i sætning 16.9 nedenfor om *eksistens* og *entydighed*.

|||| **Forklaring 16.8 Hvad er eksistens og entydighed?**

Eksistens og *entydighed* handler om, hvorvidt der findes løsninger til differentialligninger og om disse er entydige.

Eksistens er forholdsvis ligetil: Findes der en løsning til ligningen? Hvis ja, *eksisterer* løsningen. Nogle gange finder man ud af, at løsningen eksisterer ved at bestemme den. Andre gange er det muligt at finde ud af, at løsningen eksisterer *uden* at kunne bestemme den. At udføre sådanne eksistensbeviser er ikke en del af denne eNote.

Entydighed er en smule mere komplekst. Vi har før lært, at når man løser lineære ligninger, vil løsningen nogle gange indeholde frihedsgrader (frie variable). Det betyder i så fald, at der ikke kun er en enkelt løsning, men uendeligt mange. Med lineære differentialligninger udspænder de fuldstændige løsningsmængder altid uendeligt mange løsningsfunktioner. Vi har altså *ikke en entydig funktion*, selvom vi har den fuldstændige løsningsmængde.

En ikke-entydig løsning er i mange praktiske tilfælde ikke brugbar — det er ikke muligt at få entydige funktionsværdier, og man kan ikke tegne grafen for funktionen.

I dette afsnit har vi set på løsningen til 1. ordens differentialligninger, der ved hjælp af sætning 16.3.20evncount.16.6 ser således ud:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \left(\int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt + c \right) . \tag{16-34}$$

For alle $c \in \mathbb{R}$ udgør disse funktioner den fuldstændige løsningsmængde og altså ikke en entydig funktion. Konstanten c udtrykker graden af frihed, som funktioner, der er løsninger til differentialligningen, må have. c bliver derfor kaldt en *arbitrær konstant*. Funktionsværdien $x(t)$ er ikke entydig, før vi har bestemt c.

"‘Arbitrær"’ betyder vilkårlig.

Man gør løsningen entydig ved hjælp af såkaldte *begyndelsesværdibetingelser* eller *randværdibetingelser*. En begyndelsesværdibetingelse er i denne sammenhæng et sæt af to tal, der kæder én værdi af t (kaldet t_0) sammen med den tilsvarende funktionsværdi x (kaldet x_0). Man skal kende begge værdier. Med dem er det muligt at opstille en ligning og bestemme c. Man får derved en løsning, kaldet en *betinget løsning*, som er en entydig funktion. Det er nu muligt at beregne funktionsværdier og tegne grafen for funktionen.

I andre sammenhænge kan der optræde flere tal i et *sæt* af begyndelsesværdibetingelser for at få entydige, betingede løsningsfunktioner.

|||| Sætning 16.9 Eksistens og entydighed

Til ethvert talsæt (t_0, x_0) findes der netop én (betinget) løsning $x_{bet}(t)$ til differentialligningen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{16-35}$$

hvor $p : I \to \mathbb{R}$ og $q : I \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner, således, at

$$x_{bet}(t_0) = x_0 \,. \tag{16-36}$$

(t_0, x_0) kaldes en enkelt *begyndelsesværdibetingelse*.

|||| Bevis

Vi har fra sætning 16.3.20evncount.16.6, at løsningen til differentialligningen (16-35) er af formen

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \left(\int \mathrm{e}^{P(t)} q(t) dt + c \right) , \tag{16-37}$$

hvor integralet er ubestemt. Det ubestemte integral indeholder samtlige bestemte integraler, og derfor må følgende bestemte integral også være en løsning til differentialligningen:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-P(t)} \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{P(u)} q(u) du + c \right) . \tag{16-38}$$

Integrationsvariablen må ikke være den samme som variablen i grænserne, så derfor er integrationsvariablen skiftet til u.

Begyndelsesværdibetingelsen $x_{bet}(t_0) = x_0$ er givet, og denne indsættes i ligningen:

$$x_0 = \mathrm{e}^{-P(t_0)} \left(\int_{t_0}^{t_0} \mathrm{e}^{P(u)} q(u) du + c \right) = \mathrm{e}^{-P(t_0)} (0 + c) \,. \tag{16-39}$$

Med en hurtig omskrivning finder vi ud af, at der kun er én løsning for c.

$$c = \mathrm{e}^{P(t_0)} x_0 \tag{16-40}$$

Derfor er der netop kun én løsning $x_{bet}(t)$, der opfylder kravene, og sætningen er vist.

■

|||| Eksempel 16.10 Entydig, betinget løsning

I eksempel 16.7 fandt vi den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningen

$$x'(t) + \frac{2}{t}x(t) = 8t - \frac{10}{t}, \quad t > 0, \tag{16-41}$$

nemlig $L_{inhom} = \{2t^2 - 5 + c/t^2 \mid t > 0, c \in \mathbb{R}\}$.

Med sætning 16.9 og begyndelsesvrdibetingelsen $(t_0, x_0) = (1, 2)$ kan man bestemme en entydig løsning, her kaldet $x_{bet}(t)$, med $x_{bet}(1) = 2$. $x_{bet}(t)$ udtrækkes af den fuldstændige løsningsmængde, og begyndelsesværdibetingelsen indsættes for at bestemme c.

$$x_0 = 2t_0^2 - 5 + \frac{c}{t_0^2} \;\Leftrightarrow\; 2 = 2 \cdot 1^2 - 5 + \frac{c}{1^2} \;\Leftrightarrow\; c = 5\,. \tag{16-42}$$

Derfor er den entydige og betingede løsningsfunktion til differentialligningen givet ved

$$x_{bet}(t) = 2t^2 - 5 + \frac{5}{t^2}, \quad t > 0\,. \tag{16-43}$$

16.3.2 Løsningsstrukturen til 1. ordens differentialligninger

I nogle tilfælde kan det være svært at bruge sætning 16.3.20evncount.16.6 til at lse en 1. ordens differentialligning, fordi den indeholder integralet $\int e^{P(t)}q(t)dt$, som kan være "‘grimt"’ og svært at bestemme. Hvis differentialligningen derimod har et "‘pænt"’ udseende, kan man *gætte* sig til en enkelt løsning til differentialligningen og samtidig bestemme samtlige løsninger til den tilsvarende homogene ligning ved hæjlp af ligning (16-22) i samme sætning. Det bygger på den grundlæggende struktursætning for løsninger til lineære differentialligninger fra sætning 16.2.11evncount.16.4 og munder ud i følgende metode omhandlende *løsningsstrukturen* af den lineære 1. ordens differentialligning.

|||| Metode 16.11 1. ordens løsningsstruktur

Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} til den lineære 1. ordens differentiallign-ing

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{16-44}$$

kan ved hjælp af sætning 16.2.11evncount.16.4 opdeles i to:

1. Den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den tilsvarende homogene ligning, for eksempel bestemt ved hjælp af sætning 16.3.20evncount.16.6.

2. En partikulær løsning til den inhomogene ligning $x_0(t)$, for eksempel bestemt med et gæt.

Strukturen af løsningen er da

$$\begin{aligned} L_{inhom} &= x_0(t) + L_{hom} \\ &= \left\{ x_0(t) + ce^{-P(t)} \;\middle|\; t \in I, c \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned} \tag{16-45}$$

hvor $P(t) = \int p(t)dt$.

|||| Eksempel 16.12 Løsningen opdeles

Den lineære 1. ordens differentialligning

$$x'(t) + 2x(t) = 30 + 8t, \quad t \in \mathbb{R} \tag{16-46}$$

har den fuldstændige løsningsmængde

$$L_{inhom} = \left\{ 13 + 4t + ce^{-2t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{16-47}$$

Ifølge metode 16.11 om strukturen (og sådan set også sætning 16.2.11evncount.16.4) kan løsningen deles op i den fuldstændige lsningsmængde L_{hom} til den homogene ligning og en partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene ligning. Dette er vel at mærke også gældende, selvom løsningen er fundet ved hjælp af sætning 16.3.20evncount.16.6. Man kan umiddelbart finde de to udtryk ud fra funktionsudtrykket ovenfor:

$$\begin{aligned} &L_{hom} = \left\{ ce^{-2t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{og} \\ &x_0(t) = 13 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{16-48}$$

|||| Eksempel 16.13 Løsning ved hjælp af gæt

Givet er differentialligningen

$$x'(t) + \frac{1}{2+2t}x(t) = \frac{12t-1}{1+t}, \quad t > -1\,. \tag{16-49}$$

Denne differentialligning har samme form som ligningen omtalt i metode 16.11, hvorfor vi bruger denne løsningsmetode. Man kunne lige vel have prøvet at bruge sætning 16.3.20evncount.16.6, men der er en idé i at bruge den anden metode, og det gøres der rede for her.

Ved brug af Panserformlen
Når sætning 16.3.20evncount.16.6 bruges, bestemmes $P(t)$ og $\mathrm{e}^{P(t)}$. $p(t)$ aflæses af differentialligningen, og vi har

$$P(t) = \int \frac{1}{2+2t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt = \frac{1}{2}\ln(1+t) \tag{16-50}$$

og

$$\mathrm{e}^{P(t)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(1+t)} = \sqrt{1+t}\,. \tag{16-51}$$

I Panserformlen indgår integralet $\int \mathrm{e}^{P(t)}q(t)dt$, som i dette tilfælde ser således ud:

$$\int \sqrt{1+t}\cdot\frac{12t-1}{1+t}dt = \int \frac{12t-1}{\sqrt{1+t}}dt\,. \tag{16-52}$$

Det er ikke nemt at bestemme dette integral. Derfor tyer vi til helt andre midler og bruger metode 16.11 i stedet.

Ved brug af et gæt
1) Først bestemmes en partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene ligning. For at gøre dette, ganges differentialligningen (16-49) igennem med $1+t$,

$$(1+t)x'(t) + \frac{1}{2}x(t) = 12t-1\,. \tag{16-53}$$

Ud fra differentialligningens form ses det, *at et førstegradspolynomium må være en partikulær løsning*! Dette kan konkluderes, fordi højresiden er et førstegradspolynomium, faktoren foran $x'(t)$ højst har graden én, og faktoren foran $x(t)$ har graden nul. Vi gætter altså på en løsning, der har form som et førstegradspolynomium, nemlig $x_0(t) = at+b$, og vi skal nu bestemme de to konstanter a og b, hvilket gøres ved indsættelse. Vi har desuden $x_0'(t) = a$.

$$\begin{gathered}(1+t)a + \frac{1}{2}(at+b) = 12t-1 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{3}{2}a-12\right)t + \left(a+\frac{1}{2}b+1\right) = 0\,.\end{gathered} \tag{16-54}$$

For at denne ligning kan være opfyldt for ethvert $t \in \mathbb{R}$, må der gælde, at $\frac{3}{2}a - 12 = 0$ og $a + \frac{1}{2}b + 1 = 0$. Ved at løse disse to ligninger fås $a = 8$ og $b = -18$. En partikulær løsning til den inhomogene differentialligning er derfor $x_0(t) = 8t - 18$. Det var altså muligt at bestemme en løsning ved hjælp af et "‘gæt"’.

2) Nu bestemmes den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den tilsvarende homogene ligning:

$$x'(t) + \frac{1}{2+2t}x(t) = 0\,. \tag{16-55}$$

Dette kan gøres ved brug af ligning (16-22) i sætning 16.3.20evncount.16.6. Vi skal bruge $\mathrm{e}^{-P(t)}$, men da vi allerede kender $\mathrm{e}^{P(t)}$ fra ligning (16-51), har vi nemt, at

$$\mathrm{e}^{-P(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,. \tag{16-56}$$

Den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den homogene differentialligning er

$$\begin{aligned} L_{hom} &= \left\{ c\mathrm{e}^{-P(t)} \;\middle|\; t > -1, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \frac{c}{\sqrt{1+t}} \;\middle|\; t > -1, c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned} \tag{16-57}$$

3) Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} til den inhomogene differentialligning (16-49) er så givet ved

$$\begin{aligned} L_{inhom} &= x_0(t) + L_{hom} \\ &= \left\{ 8t - 18 + \frac{c}{\sqrt{1+t}} \;\middle|\; t > -1, c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned} \tag{16-58}$$

I eksempel 16.12 benyttede vi, at uanset om vi bruger strukturmetoden, metode 16.11, eller Panserformlen, sætning 16.3.20evncount.16.6, er det altid muligt at dele løsningen op i to: løsningen til den homogene differentialligning og løsningen til den inhomogene differentialligning (den partikulære løsning). Kombineres dette med, hvad vi har lært om entydighed, kan vi komme frem til en generel fremgangsåmde for løsning af lineære differentialligninger, som står i nedenstående boks og er illustreret i figur 16.1.

Når man løser en lineær differentialligning (ikke nødvendigvis en af 1. orden), er det meget ofte således, at man er interesseret i en entydig og betinget løsning; altså en løsning, der opfylder et sæt af begyndelsesværdibetingelser. Man kan dog ikke gå den direkte vej til denne løsning, men er nødt til at gå over tre trin først:

1) den fuldstændige løsningsmængde til den homogene ligning,

2) en partikulær løsning til den inhomogene ligning (hvis $q(t) \neq 0$), hvilket giver

3) den fuldstændige løsningsmængde til den inhomogene ligning.

Med denne løsning og en "‘tilpas mængde"’ af begyndelsesværdibetingelser kan man endeligt bestemme den betingede løsning. Læg mærke til, at den partikulære løsning ikke nødvendigvis er den ønskede betingede løsning, selvom den er entydig. Der kræves blot en *vilkårlig* partikulær løsning. Løsningsfremgangsmåden er illustreret i figur 16.1.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & L_{hom} & & \text{Begyndelsesværdibetingelser} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \downarrow & & \\
f(x(t)) = q(t) & & & & L_{inhom} \quad \rightarrow & x_{bet}(t) & \\
 & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & x_0(t) & & & &
\end{array}
$$

Figure 16.1: Forløbet ved løsning af en lineær differentialligning

Herunder kommer et eksempel, der viser, hvordan det er muligt at "‘gå baglæns"’ i proceduren vist i figur 16.1. Løsningen til en 1. ordens differentialligning er givet, men hvordan ser differentialligningen egentlig ud?

|||| Eksempel 16.14 Fra løsning til differentialligning

Givet er den fuldstændige løsningsmængde til en lineær 1. ordens inhomogen differentialligning,

$$L_{inhom} = \left\{ t\mathrm{e}^{-5t} + ct \;\middle|\; t > 0, c \in \mathbb{R} \right\} . \tag{16-59}$$

Bestem den tilhørende differentialligning, som har formen

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t) . \tag{16-60}$$

(Altså bestem $p(t)$ og $q(t)$.)

Først betragtes den tilsvarende homogene differentialligning. Løsningen til denne kan spottes i ligning (16-59). Der gælder således, at $L_{hom} = \left\{ ct \;\middle|\; t > 0, c \in \mathbb{R} \right\}$. Endvidere vides, at den homogene differentialligning generelt ser således ud

$$x'(t) + p(t)x(t) = 0 . \tag{16-61}$$

$x(t) = ct$ er en løsning til denne differentialligning, og derfor kan $p(t)$ bestemmes. Vi har også at $x'(t) = c$.

$$c + p(t)ct = 0 \Leftrightarrow p(t) = -\frac{1}{t} . \tag{16-62}$$

Da vi nu kender $p(t)$, mangler vi kun at bestemme højresiden $q(t)$ i den oprindelige inhomogene differentialligning. $x(t) = t\mathrm{e}^{-5t} + ct$ er en løsning til denne differentialligning, hvilket ses af ligning (16-59). Vi har også, at $x'(t) = \mathrm{e}^{-5t} - 5t\mathrm{e}^{-5t} + c$. Udtrykkene for $x(t)$ og $x'(t)$ indsættes i den generelle differentialligning, hvor vi nu også ved, at $p(t) = -1/t$:

$$\mathrm{e}^{-5t} - 5t\mathrm{e}^{-5t} + c - \frac{1}{t} \cdot \left(t\mathrm{e}^{-5t} + ct \right) = q(t) \Leftrightarrow q(t) = -5t\mathrm{e}^{-5t} . \tag{16-63}$$

Da nu både $p(t)$ og $q(t)$ er bestemt, er hele differentialligningen bestemt:

$$x'(t) - \frac{1}{t}x(t) = -5t\mathrm{e}^{-5t} . \tag{16-64}$$