eNote 14

Similaritet og diagonalisering

I denne note forklares, hvordan visse kvadratiske matricer kan diagonaliseres ved hjælp af egenvektorer. Det forudsættes derfor, at man ved, hvordan egenværdier og egenvektorer til en kvadratisk matrix bestemmes og desuden er bekendt med tilhørende begreber, såsom algebraisk og geometrisk multiplicitet.

Version 21.08.15.

14.1 Introduktion til afbildningsmatricer som diagonalmatricer

Hvis vi betragter en lineær afbildning $f : V \to V$ af et n-dimensionalt vektorrum V ind i sig selv, så vil afbildningsmatricen for f med hensyn til en vilkårlig basis for f være en kvadratisk $(n \times n)$-matrix. Er der givet to baser a og b for V, er relationen mellem de tilsvarende afbildningsmatricer ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$ henholdsvis ${}_{\mathrm{b}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}$ givet ved

$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = ({}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}})^{-1}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,, \tag{14-1} $$

hvor ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_1 & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_2 & \cdots & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ er basisskiftematricen der skifter fra b til a koordinater.

Af særlig interesse er det, hvis der findes en basis v bestående af egenvektorer for f. Lad nemlig a være en vilkårlig basis for V og ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$ den hertil hørende afbildningsmatrix for f. Lad endvidere v være en egenvektorbasis for V til f. Af sætning 13.14 fremgår det, at afbildningsmatricen for f med hensyn til basis v er en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$, hvori diagonalelementerne er egenværdierne for f . Hvis $\mathbf{V}$ betegner basisskiftematricen, som skifter fra v-koordinater til a-koordinater, vil $\mathbf{\Lambda}$ ifølge (14.1.1) fremkomme således:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,\mathbf{V}\,. \tag{14-2}$$

(14.1.1) og (14.1.2) inspirerer naturligt til sprgsmål, der tager udgangspunkt i kvadratiske matricer: Hvilke betingelser skal vre opfyldt for, at to givne kvadratiske matricer kan fortolkes som afbildningsmatricer for den samme linæere afbildning med hensyn til to forskellige baser? Og hvilke betingelser skal en kvadratisk matrix opfylde for, at den er afbildningsmatrix for en liner afbildning, som i en anden basis har en diagonalmatrix som afbildningsmatrix? Vi studerer først disse spørgsmål i en ren matrixalgebraopsætning, og vender i sidste underafsnit tilbage til afbildningssynsvinklen. Til dette formål indføres nu begrebet *similære matricer*.

14.2 Similære matricer

|||| Definition 14.1 Similære matricer

Givet $(n \times n)$-matricerne $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Man siger, at $\mathbf{A}$ er *similær med* $\mathbf{B}$, hvis der findes en regulær matrix $\mathbf{M}$ således, at

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{M}\,. \tag{14-3}$$

|||| Eksempel 14.2 Similære matricer

Givet matricerne $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$.

Matricen $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ er regulær og har den inverse matrix $\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Udregningen

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$$

viser, at $\mathbf{A}$ er similær med $\mathbf{B}$.

Hvis $\mathbf{A}$ er similær med $\mathbf{B}$, så er $\mathbf{B}$ også similær med $\mathbf{A}$. Hvis vi nemlig sætter $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}$, så er $\mathbf{N}$ regulær, og

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}\,\mathbf{B}\,\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{N}^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{N}\,.$$

Derfor bruger man også talemåden: $\mathbf{A}$ *og* $\mathbf{B}$ *er similære matricer* .

|||| Sætning 14.3 Similaritet er transitivt

Lad $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ være $(n \times n)$-matricer. Hvis $\mathbf{A}$ er similær med $\mathbf{B}$, og $\mathbf{B}$ er similær med $\mathbf{C}$, så er $\mathbf{A}$ similær med $\mathbf{C}$.

|||| Opgave 14.4

Bevis sætning 14.3.

Om egenværdierne for similære matricer gælder følgende sætning.

|||| Sætning 14.5 Similaritet og egenværdier

Hvis $\mathbf{A}$ er similær med $\mathbf{B}$, har de to matricer identiske egenværdier med de samme tilhørende algebraiske og geometriske multipliciteter.

|||| Bevis

Lad $\mathbf{M}$ være en regulær matrix, der opfylder $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$, og lad $\mathbf{E}$ betegne enhedsmatricen af samme kvadratiske form som de tre nævnte matricer. Så gælder:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) &= \det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} - \lambda\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{M}) \\
&= \det(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{M}) \\
&= \det(\mathbf{M}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \det(\mathbf{M}) \\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \cdot \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \det(\mathbf{M}) \\
&= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,.
\end{aligned} \tag{14-4}$$

Hermed vist, at de to matricer har samme karakteristiske polynomium og dermed de samme egenværdier med de samme tilhørende algebraiske multipliciteter. At de har samme egenværdier fremgår i øvrigt af sætning 14.13 nedenfor:

Når $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ kan repræsentere den samme lineære afbildning f med hensyn til to forskellige baser, har de identiske egenværdier, nemlig egenværdierne for f.

Men egenværdierne har også de samme dimensioner, dvs. geometriske multipliciteter. Dette følger af, at egenrummene for $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ med hensyn til enhver af egenværdierne kan fortolkes som to forskellige koordinatfremstillinger for dette samme egenrum, nemlig egenrummet for f med hensyn til den pågældende egenværdi.

■

Læg mærke, til at sætning 14.5 siger, at to similære matricer har samme egenværdier, men ikke omvendt: at to matricer, som har samme egenværdier, er similære. Der er en forskel, og kun det første udsagn er sandt.

To similære matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ har samme egenværdier, men en egenvektor for den ene er i almindelighed ikke egenvektor for den anden. Der gælder dog, at hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ tilhørende egenværdien λ, så er $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}$ en egenvektor for $\mathbf{B}$ tilhørende egenværdien λ, hvor $\mathbf{M}$ er den regulære matrix, der opfylder $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{M}\,\mathbf{B}\,\mathbf{M}^{-1}$. Der gælder nemlig:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} &\Leftrightarrow \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}\lambda\mathbf{v}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{M}\,\mathbf{B}\,\mathbf{M}^{-1})\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}\lambda\mathbf{v}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v})\,.\end{aligned}$$

|||| Opgave 14.6

Gør rede for, at to kvadratiske $(n \times n)$-matricer er similære, hvis de har identiske egenværdier med samme tilhørende geometriske multipliciteter, og at summen af de geometriske multipliciteter er n.

14.3 Diagonalisering af matricer

Betragt en matrix $\mathbf{A}$ og en regulær matrix $\mathbf{V}$, som er givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{14-5}$$

Da der gælder, at

$$\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

besidder $\mathbf{A}$ en særlig egenskab: den er similær med en diagonalmatrix, nemlig diagonalmatricen

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Man siger da, at $\mathbf{A}$ er blevet *diagonaliseret ved similartransformation*.

Vi vil nu for en vilkårlig given kvadratisk matrix $\mathbf{A}$ stille spørgsmålet, om den kan diagonaliseres ved similartransformation eller ej. Vi opstiller derfor ligningen

$$\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda},$$

hvor $\mathbf{V}$ er en regulær matrix og $\mathbf{\Lambda}$ en diagonalmatrix. Vi beviser nedenfor, at ligningen har en løsning netop, hvis søjlerne i $\mathbf{V}$ er lineært uafhængige egenvektorer for $\mathbf{A}$, og diagonalelementerne i $\mathbf{\Lambda}$ er egenværdierne for $\mathbf{A}$ opført således, at den i-te søjle i $\mathbf{V}$ er egenvektor hørende til egenværdien i den i-te søjle i $\mathbf{\Lambda}$.

Vi bemærker, at dette er i overensstemmelse med eksempel-matricerne i (14.3.5) ovenfor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14-6}$$

og

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{14-7}$$

Vi ser i (14.3.6), at frste sjle i $\mathbf{V}$ som forventet er egenvektor for $\mathbf{A}$ hrende til det frste diagonalelement i $\mathbf{\Lambda}$, og vi ser i (14.3.7), at den anden søjle i $\mathbf{V}$ er egenvektor hørende til det andet diagonalelement i $\mathbf{\Lambda}$.

|||| Sætning 14.7 Diagonalisering ved similartransformation

Hvis en kvadratisk matrix $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ har n lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ respektivt tilhørende de n (ikke nødvendigvis forskellige) egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, kan den diagonaliseres ved similartransformationen

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}, \tag{14-8}$$

hvor

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,. \tag{14-9}$$

Hvis $\mathbf{A}$ ikke har n lineært uafhængige egenvektorer, kan den ikke diagonaliseres ved similartransformation.

|||| Bevis

Antag, at $\mathbf{A}$ har n lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, og at $\mathbf{v}_i$ for $i = 1, \ldots, n$ hører til egenværdien λ_i. Så gælder de følgende n ligninger:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \quad , \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n\,. \tag{14-10}$$

De n ligninger kan samles i et ligningssystem:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1\lambda_1 & \mathbf{v}_2\lambda_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\lambda_n \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda} \end{aligned} \tag{14-11}$$

Nu er alle egenvektorerne indsat (lodret efter hinanden) i matricen $\mathbf{V}$ i samme rækkefølge som egenværdierne er i diagonalen af matricen $\mathbf{\Lambda}$, som uden for diagonalen kun indeholder nuller. Da egenvektorerne er lineært uafhængige, er matricen $\mathbf{V}$ regulær. Derfor findes den inverse $\mathbf{V}^{-1}$, og den ganges på fra venstre på begge sider af lighedstegnet:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}\,. \tag{14-12}$$

Hermed er første del af af sætningen vist.

Antag omvendt, at $\mathbf{A}$ kan diagonaliseres ved en similartransformation. Så findes der en regulær matrix $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$ og en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ således, at

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}\,. \tag{14-13}$$

Hvis vi nu gentager omformningerne i første del af beviset blot i modsat rækkefølge, ses det, at (14.3.13) er ensbetydende med de følgende n ligninger:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad , \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n \,, \tag{14-14}$$

hvoraf det fremgår, at $\mathbf{v}_i$ for $i = 1, \ldots, n$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ tilhørende egenværdien λ_i.

Diagonalisering ved similartransformation kan derfor kun opnås på den måde, der er omtalt i sætningens første del.

■

Den følgende sætning kan være til stor hjælp, når man i forskellige sammenhænge undersøger, om matricer kan diagonaliseres ved similartransformation. Hovedresultatet har vi allerede givet i sætning 14.7, men her forfines betingelserne, idet vi trækker på tidligere viste sætninger om egenværdiproblemet for lineære afbildninger og matricer.

|||| Sætning 14.8 Matricers diagonaliserbarhed

For en given $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ gælder:

$\mathbf{A}$ kan diagonaliseres ved similartransformation,

1. hvis der findes n forskellige egenværdier for $\mathbf{A}$, eller
2. hvis summen af egenværdiernes geometriske multipliciteter er n.

$\mathbf{A}$ kan *ikke* diagonaliseres ved similartransformation,

3. hvis summen af egenværdiernes geometriske multipliciteter er mindre end n, eller
4. hvis der findes blot én egenværdi λ med $\mathrm{gm}(\lambda) < \mathrm{am}(\lambda)$.

|||| Bevis

Ad. 1
Hvis der vælges en egentlig egenvektor fra hvert af de n egenrum, følger det af hjælpesætning 13.9, at det samlede sæt af n egenvektorer er lineært uafhængigt. Derfor kan $\mathbf{A}$ ifølge sætning 14.7 i så fald diagonaliseres ved similartransformation.

Ad. 2
Hvis der vælges en basis for hvert af egenrummene, så er det samlede sæt af de valgte n egenvektorer ifølge hjælpesætning 13.9 lineært uafhængigt. Derfor kan $\mathbf{A}$ ifølge sætning 14.7 i så fald diagonaliseres ved similartransformation.

Ad. 3
Hvis summen af de geometriske multipliciteter er mindre end n, findes der ikke n lineært uafhængige egenvektorer for $\mathbf{A}$. Derfor kan $\mathbf{A}$ ifølge sætning 14.7 i så fald ikke diagonaliseres ved similartransformation.

Ad. 4
Da der ifølge sætning 13.39 pkt. 2 gælder, at summen af de algebraiske multipliciteter er n, og da der ifølge samme sætning pkt. 3 for enhver egenvrdi λ gælder, at $\operatorname{gm}(\lambda) \leq \operatorname{am}(\lambda)$, kan summen af de geometriske multipliciteter ikke blive n, hvis blot én af egenværdiernes geometriske multiplicitet er mindre end dens algebraiske. I så fald kan $\mathbf{A}$ derfor ikke diagonaliseres ved similartransformation.

■

Et typisk særtilfælde er, når en kvadratisk $(n \times n)$-matrix har i alt n forskellige egenværdier. Sætning 14.8 pkt. 1 sikrer, at alle matricer af denne type kan diagonaliseres ved similartransformation.

I de følgende eksempler skal vi se, hvordan man konkret kan undersøge, om diagonalisering ved similartransformation er mulig og i givet fald gennemføre den.

|||| Eksempel 14.9

Den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{14-15}$$

har egenværdierne $\lambda_1 = 4$ og $\lambda_2 = 15$. Vektorerne $\mathbf{v}_1 = (-2, 0, 1)$ og $\mathbf{v}_2 = (-3, 1, 0)$ er to lineært uafhængige vektorer, der hører til λ_1, og vektoren $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 2)$ er en egentlig egenvektor, der hører til λ_2. Det samlede sæt af de tre nævnte egenvektorer er lineært uafhængigt ifølge hjælpesætning 13.9. Det er derfor ifølge sætning 14.7 muligt at diagonalisere $\mathbf{A}$, fordi der findes $n = 3$ lineært uafhængige egenvektorer. Man kan derfor skrive, at $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$, hvor

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{14-16}$$

14.4 Kompleks diagonalisering

Hvad vi indtil nu har sagt om similære matricer gælder generelt for kvadratiske, *komplekse* matricer. Grundligningen for diagonalisering ved similartransformation

$$\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} \tag{14-17}$$

skal derfor forstås i bredest mulig forstand, hvor matricerne $\mathbf{A}$, $\mathbf{V}$ og $\mathbf{\Lambda}$ er komplekse $(n \times n)$-matricer. Indtil nu har vi indskrænket os til reelle eksempler, det vil sige eksempler, hvor det har været muligt at opfylde grundligningen (14.4.17) med reelle matricer. Vi vil i det følgende beskæftige os med en særlig situation, som er typisk i tekniske anvendelser af diagonalisering: Til en given *reel* $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ søges en regulær matrix $\mathbf{M}$ og en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$, som opfylder grundligningen i bred ramme, hvor $\mathbf{M}$ og $\mathbf{\Lambda}$ muligvis er komplekse (ikke-reelle) $(n \times n)$-matricer.

Det følgende eksempel viser en reel (3×3)-matrix, som ikke kan diagonaliseres reelt, fordi dens karakteristiske polynomium kun har én reel rod. Til gengæld kan den diagonaliseres komplekst.

|||| Eksempel 14.10 Kompleks diagonalisering af reel matrix

Den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{14-18}$$

har egenværdierne $\lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = -i$ og $\lambda_3 = i\,.$ $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$ er en egentlig egenvektor, der hører til $\lambda_1\,,\ \mathbf{v}_2 = (-2+i, i, 1)$ en egentlig egenvektor, der hører til $\lambda_2\,,$ og $\mathbf{v}_3 = (-2-i, -i, 1)$ en egentlig egenvektor, der hører til $\lambda_3\,.$ Det samlede sæt af de tre nævnte egenvektorer er lineært uafhængigt ifølge hjælpesætning 13.9. Det er derfor ifølge sætning 14.7 muligt at diagonalisere $\mathbf{A}$. Man kan derfor skrive $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$, hvor

$$\begin{gathered} \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \quad \text{og} \\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2+i & -2-i \\ 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{14-19}$$

Det næste eksempel viser en reel, kvadratisk matrix, som ikke kan diagonaliseres, hverken reelt eller komplekst.

|||| Eksempel 14.11 Ikke-diagonaliserbar kvadratisk matrix

Givet den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \tag{14-20}$$

hvor $\mathbf{A}$ har egenværdierne $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_3 = 5$. Egenværdien 3 har den algebraiske multiplicitet 2, men der kan kun vælges én lineært uafhængig egenvektor til denne egenværdi, for eksempel $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$. Egenværdien har altså geometrisk multiplicitet 1, og $\mathrm{gm}(3) < \mathrm{am}(3)$. Derfor er det ifølge sætning 14.7 ikke muligt at diagonalisere $\mathbf{A}$ ved similartransformation.

|||| Opgave 14.12

Til matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \tag{14-21}$$

ønskes følgende:

1. Bestem alle egenværdier og deres algebraiske multipliciteter.
2. Bestem samtlige tilhørende lineært uafhængige egenvektorer og derved egenværdiernes geometriske multipliciteter.
3. Hvis det er muligt, skal $\mathbf{A}$ diagonaliseres: Bestem en diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ og en regulær matrix $\mathbf{V}$, hvorom der gælder, at $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}$. Hvilke krav er der for at diagonaliseringen kan lade sig gøre? Hvilke tal og vektorer indgår i $\mathbf{\Lambda}$ og $\mathbf{V}$?

14.5 Diagonalisering af lineære afbildninger

I indledningen til denne eNote stillede vi spørgsmålet: Hvilke betingelser skal være opfyldt for at to givne kvadratiske matricer kan fortolkes som afbildningsmatricer for den samme lineære afbildning med hensyn til to forskellige baser? Svaret er enkelt, som næste sætningen siger.

|||| Sætning 14.13 Similære matricer som afbildningsmatricer

Der er givet et n-dimensionalt vektorrum V. To $(n \times n)$-matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er afbildningsmatricer for den samme lineære afbildning $f : V \to V$ med hensyn til to forskellige baser for V, hvis og kun hvis $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er similære.

|||| Opgave 14.14

Bevis sætning 14.13.

I indledningen spurgte vi også: Hvilke betingelser skal en kvadratisk matrix opfylde for, at den er afbildningsmatrix for en lineær afbildning, som i en anden basis har en diagonalmatrix som afbildningsmatrix? Svaret fremgår af sætning 14.7 kombineret med sætning 14.13, nemlig at *matricen skal have n linæert uafhængige egenvektorer*.

Vi slutter eNoten af med et eksempel på diagonalisering af en *lineær afbildning* — det vil sige, vi finder en passende basis med hensyn til hvilken en afbildningsmatrix er en diagonalmatrix.

|||| Eksempel 14.15 Diagonalisering af lineær afbildning

En lineær afbildning $f : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ er givet med følgende afbildningsmatrix med hensyn til standard monomiebasis m:

$$ {}_{\mathrm{m}}\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} -17 & -21 \\ 14 & 18 \end{bmatrix}. \tag{14-22} $$

Undersøg, om der findes en (reel) egenbasis for f. Undersøg i bekræftende fald derudover, hvordan afbildningsmatricen ser ud med hensyn til denne basis, og bestemt basisvektorerne.

Søjlerne i ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ betyder, at $f(1) = -17 + 14x$ og $f(x) = -21 + 18x$.

Egenværdierne til matricen ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{F}_{\mathrm{m}}$ bestemmes:

$$\begin{aligned}\det({}_{\mathrm{m}}\mathbf{F}_{\mathrm{m}} - \lambda\mathbf{E}) &= \det\left(\begin{bmatrix} -17-\lambda & -21 \\ 14 & 18-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda^2 - \lambda - 12 = (\lambda+3)(\lambda-4) = 0\,.\end{aligned} \tag{14-23}$$

Det er allerede nu muligt at bekræfte, at der findes en reel egenbasis til f, da der findes $2 = \dim(P_1(\mathbb{R}))$ egenværdier, nemlig $\lambda_1 = -3$ og $\lambda_2 = 4$, som hver har algebraisk multiplicitet 1. Egenvektorer til λ_1 bestemmes:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -17+3 & -21 & 0 \\ 14 & 18+3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{14-24}$$

Det giver en egenvektor ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{v}_1 = (-3, 2)$, hvis den frie parameter sættes til 2. Tilsvarende fås den anden egenvektor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -17-4 & -21 & 0 \\ 14 & 18-4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{14-25}$$

Det giver en egenvektor ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{v}_2 = (-1, 1)$, hvis den frie parameter sættes til 1.

Der findes altså en reel egenbasis v til f, der er givet ved basisvektorerne ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{v}_1$ og ${}_{\mathrm{m}}\mathbf{v}_2$. Vi har da, at

$${}_{\mathrm{m}}\mathbf{M}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad {}_{\mathrm{v}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{14-26}$$

Den nye v-basis udgøres af basisvektorerne $\mathbf{v}_1 = -3 + 2x$ og $\mathbf{v}_2 = -1 + x$, og afbildningen er "'simplere"' med hensyn til denne nye basis. Grundligningen ser da naturligvis således ud:

$${}_{\mathrm{v}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}} = ({}_{\mathrm{m}}\mathbf{M}_{\mathrm{v}})^{-1}\,{}_{\mathrm{m}}\mathbf{F}_{\mathrm{m}}\,{}_{\mathrm{m}}\mathbf{M}_{\mathrm{v}}$$

Man kan gøre prøve ved fx at afbilde $\mathbf{v}_1$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= f(-3+2x) = -3\cdot f(1) + 2\cdot f(x) \\ &= -3\cdot(-17+14x) + 2\cdot(-21+18x) \\ &= 9 - 6x = -3(-3+2x) = -3\mathbf{v}_1 \end{aligned} \tag{14-27}$$

Det passer!