eNote 13

Egenværdier og egenvektorer

Denne note indfører begreberne egenværdier og egenvektorer for lineære afbildninger i vilkårlige generelle vektorrum og går derefter i dybden med egenværdier og egenvektorer til kvadratiske matricer. Noten bygger derfor på viden omkring generelle vektorrum, se eNote 11, på viden om algebra med matricer, se eNote 7 og eNote 8, og på viden om lineære afbildninger se eNote 12.

Version 21.08.15.

13.1 Egenværdiproblemet for lineære afbildninger

13.1.1 Indledning

I denne eNote betragter vi lineære afbildninger af typen

$$f : V \to V\,. \tag{13-1}$$

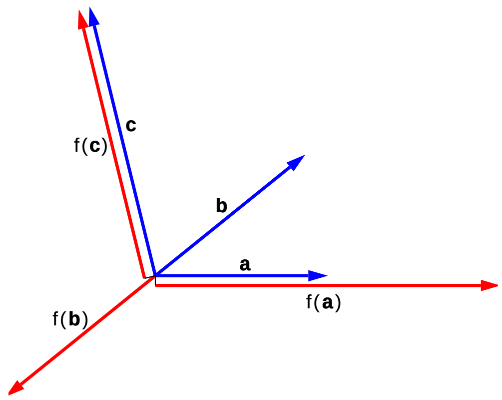
det vil sige lineære afbildninger, hvor *definitionsrummet* og *dispositionsrummet* er det samme vektorrum. Dette åbner op for et særligt fænomen, nemlig at en vektor kan være *identisk* med sin billedvektor:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\,. \tag{13-2}$$

Vektorer af denne type kaldes *fiksvektorer* for f. Mere generelt er vi på jagt efter *egenvektorer*, det vil sige vektorer, som er *proportionale* med deres billedvektorer. Man taler i denne forbindelse om *egenværdiproblemet*: at finde en skalar, typisk betegnet λ , og en egentlig vektor $\mathbf{v}$, som opfylder vektorligningen

$$f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\,. \tag{13-3}$$

Hvis λ er en skalar og $\mathbf{v}$ en egentlig vektor, som opfylder (13.1.3), s kaldes proportionalitetsfaktoren λ en *egenvæørdi* for f og $\mathbf{v}$ en til λ hørende *egenvektor*. Lad os som eksempel tage en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, det vil sige en lineær afbildning af mængden af rumvektorer ind i sig selv. På figur 9.1 afbildes de tre vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$.



Figur 9.1: Tre egenvektorer i rummet og deres billedvektorer

- Som antydet på figur 9.1 er $f(\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}$. Derfor er 2 en egenværdi for f med tilhørende egenvektor $\mathbf{a}$,
$$\lambda_1 = 2 \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}.$$
- Da endvidere $f(\mathbf{b}) = -\mathbf{b}$, er også -1 en egenværdi for f med tilhørende egenvektor $\mathbf{b}$,
$$\lambda_2 = -1 \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{b}.$$
- Og da endelig $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$, er 1 en egenværdi for f med tilhørende egenvektor $\mathbf{c}$,
$$\lambda_3 = 1 \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{c}.$$
Specielt er $\mathbf{c}$ dermed også en *fiksvektor* for f.

At løse egenværdiproblemer for lineære afbildninger er en af de mest afgørende problemstillinger i ingeniørmæssige anvendelser af lineær algebra. Dette hænger snævert sammen med, at en lineær afbildning, hvis afbildningsmatrix med hensyn til en given basis er en *diagonalmatrix*, er særligt enkel at overskue og arbejde med. Og her gælder

der den komfortable regel, at hvis man vælger en basis bestående af egenvektorer for afbildningen, så bliver afbildningsmatricen automatisk en diagonalmatrix.

I det følgende eksempel illustrerer vi disse pointer ved hjælp af lineære afbildninger i planen.

|||| Eksempel 13.1 Egenværdier og egenvektorer i planen

Lad $G_2(\mathbb{R})$ betegne vektorrummet af vektorer i planen. Vi betragter en lineær afbildning

$$f : G_2(\mathbb{R}) \to G_2(\mathbb{R}) \tag{13-4}$$

af mængden af plane vektorer ind i sig selv, som med hensyn til en given basis $a = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ har følgende diagonalmatrix som afbildningsmatrix:

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{13-5}$$

Ved afbildning af basisvektorerne fra basis a fås følgende:

$$_{\mathrm{a}}f(\mathbf{a}_1) = {_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}}\, {_{\mathrm{a}}\mathbf{a}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{a}_1$$

og

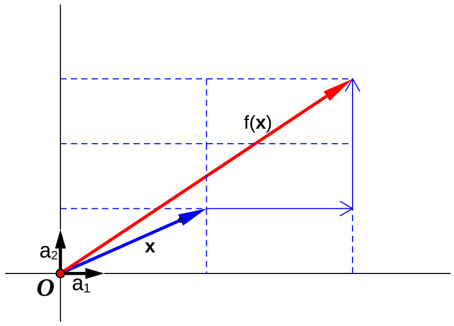
$$_{\mathrm{a}}f(\mathbf{a}_2) = {_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}}\, {_{\mathrm{a}}\mathbf{a}_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{a}_2\,,$$

hvor basisvektorerne *mht. deres egen basis* naturligvis blot er $_{\mathbf{a}}\mathbf{a}_1 = (1,0)$ og $_{\mathbf{a}}\mathbf{a}_2 = (0,1)$. Vi har altså, at $f(\mathbf{a}_1) = 2\mathbf{a}_1$ og $f(\mathbf{a}_2) = 3\mathbf{a}_2$. Begge basisvektorer er egenvektorer for f, og $\mathbf{a}_1$ tilhører egenværdien 2, mens $\mathbf{a}_2$ tilhører egenværdien 3. Egenværdierne er diagonalelementerne i $_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$.

Vi betragter nu en vilkårlig vektor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$ og finder dens billedvektor:

$$_{\mathrm{a}}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ved afbildningen bliver x_1-koordinaten ganget med egenværdien 2, mens x_2-koordinaten bliver ganget med egenværdien 3. Geometrisk betyder dette, at hele planen ved afbildningen "´strækkes"', først med faktoren 2 i retningen $\mathbf{a}_1$ og dernæst med faktoren 3 i retningen $\mathbf{a}_2$. Virkningen på en vilkårligt vektor $\mathbf{x}$ illustreres på figur 9.2.

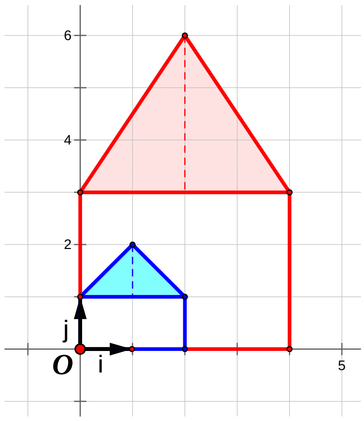


Figur 9.2: Vektoren $\mathbf{x}$ strækkes vandret med faktor 2 og lodret med faktor 3

På figur 9.3 har vi valgt standardbasen $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ og illustrerer, hvordan den lineære afbildning g, som har afbildningsmatricen

$$
{}_{\mathrm{e}}\mathbf{G}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},
$$

afbilder det "'blå hus"' over i det "'røde hus"' ved, at alle stedvektorer til punkter i det "'blå hus"' strækkes med faktoren 2 i vandret retning og med faktoren 3 i lodret retning.

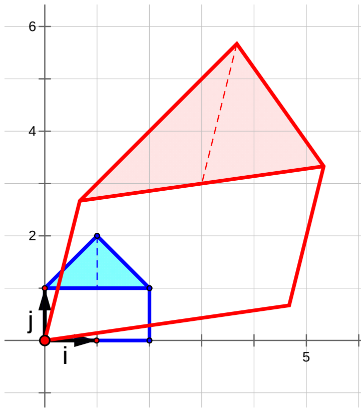


Figur 9.3: Det blå hus strækkes vandret med faktor 2 og lodret med faktor 3

Vi undersøger nu en anden lineær afbildning h, hvis afbildningsmatrix med hensyn til standardbasen ikke er en diagonalmatrix:

$$
{}_{\mathrm{e}}\mathbf{H}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{bmatrix}.
$$

Her kan man ikke straks afgøre om afbildningen er sammensat af to strækninger i to givne retninger. Og man får ikke umiddelbart hints ved at afbilde det blå hus ved hjælp af h som vist på figur 9.4.



Figur 9.4: Hus

Men faktisk er det også i tilfældet h muligt at vælge en basis, som består af to lineært uafhængige egenvektorer for h. Lad nemlig $\mathbf{b}_1$ være givet ved e-koordinaterne $(2, -1)$ og $\mathbf{b}_2$ ved e-koordinaterne $(1, 1)$. Så gælder der:

$$ {}_{\mathrm{e}}h(\mathbf{b}_1) = {}_{\mathrm{e}}\mathbf{H}_{\mathrm{e}}\, {}_{\mathrm{e}}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} $$

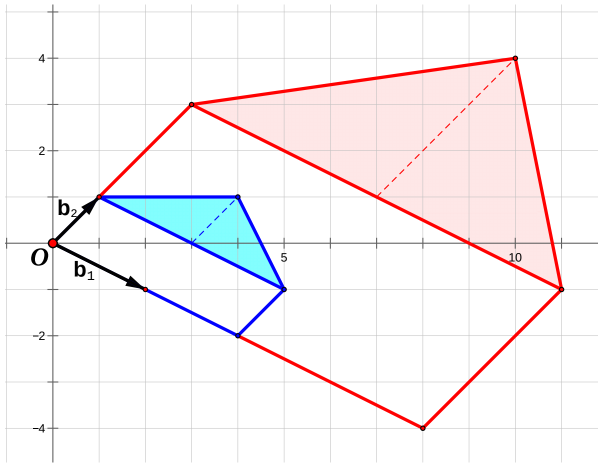
og

$$ {}_{\mathrm{e}}h(\mathbf{b}_2) = {}_{\mathrm{e}}\mathbf{H}_{\mathrm{e}}\, {}_{\mathrm{e}}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. $$

Resultatet er $h(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_1$ og $h(\mathbf{b}_2) = 3\mathbf{b}_2$. Det viser sig altså, at $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ faktisk *er* egenvektorer for h. Ved at vælge $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ som basis får afbildningsmatricen for h med hensyn til denne basis formen:

$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{G}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. $$

Det viser sig dermed overraskende nok, at afbildningsmatricen for h også kan skrives på formen (13.1.5). Afbildningen h er ogs sammensat af to strækninger med faktorerne 2 og 3. Blot er de to strækningsretninger nu bestemt ved egenvektorerne $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$. Dette ses tydeligere, hvis vi afbilder et nyt blåt hus, hvis hovedlinjer er parallelle med b-basisvektorerne, se figur 9.5.



Figur 9.5: Det blå hus strækkes med faktor 2 hhv. faktor 3 i egenvektorernes retning

Vi har hermed eksemplificeret, at hvis man kan finde to lineært uafhængige egenvektorer for en lineær afbildning i planen, så er det muligt at

1. skrive dens afbildningsmatrix på diagonalform ved at vælge egenvektorerne som basis samt at
2. beskrive afbildningen som strækninger i egenvektorernes retninger med deres tilhørende egenværdier som strækningsfaktorer.

13.1.2 Egenværdier og deres tilhørende egenvektorer

Egenværdiproblemet for en lineær afbildning går i korthed ud på at besvare spørgsmålet: *Findes der egentlige vektorer, hvor billedvektoren er proportional med vektoren selv*? Det korte svar er, at det kan man ikke svare generelt på! Det afhænger af den enkelte afbildning. I det følgende forsøger vi at indkredse, hvad vi faktisk kan sige generelt om egenværdiproblemet.

|||| Definition 13.2 Egenværdi og egenvektor

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af vektorrummet V ind i sig selv. Hvis der findes en egentlig vektor $\mathbf{v} \in V$ og en skalar λ således, at

$$f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\,, \tag{13-6}$$

så kaldes proportionalitetsfaktoren λ en *egenværdi* for f, mens $\mathbf{v}$ kaldes en *egenvektor*, som hører til λ.

Hvis det IKKE i definition 13.2 var krvet, at der skulle findes en *egentlig* vektor som opfylder $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, ville enhver skalar λ vre en egenværdi, idet der jo for enhver skalar λ glder $f(\mathbf{0}) = \lambda\,\mathbf{0}$. Men bemrk, at *hvis* λ er en egenværdi, s *er* nul-vektoren en egenvektor hørende til λ.

Tallet 0 kan godt være en egenværdi. Det kræver blot, at der findes en egentlig vektor $\mathbf{v}$, som opfylder $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, da vi så har $f(\mathbf{v}) = 0\mathbf{v}$.

Hvis en lineær afbildning f har blot én egenvektor $\mathbf{v}$, så har den uendeligt mange egenvektorer. Dette er en simpel konsekvens af den følgende sætning.

|||| Sætning 13.3 Underrum af egenvektorer

Hvis λ er en egenværdi for en lineær afbildning $f : V \to V$, så er mængden af egenvektorer, som hører til λ, et underrum i V.

|||| Bevis

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af vektorrummet V ind i sig selv, og antag, at λ er en egenværdi for f. Vi skal vise, at mængden af egenvektorer, som hører til λ, opfylder de to stabilitetskrav for underrum, se sætning 11.48. Lad k være en vilkårlig skalar, og lad $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være to vilkårlige egenvektorer, som hører til λ. Så gælder der under anvendelse af L_1:

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})\,.$$

Sumvektoren $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ er dermed en egenvektor hørende til λ, og vi har hermed vist, at egenvektorerne hørende til λ opfylder stabilitetskravet vedrørende addition. Endvidere gælder der under anvendelse af L_2:

$$f(k\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u}) = k(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(k\mathbf{u})\,.$$

Hermed er det vist, at egenvektorerne hørende til λ også opfylder stabilitetskravet vedrørende multiplikation med skalar. Samlet er det vist, at mængden af egenvektorer, som hører til en given egenværdi λ, er et underrum i definitionsrummet.

■

Sætning 13.3 giver anledning til den følgende definition.

|||| Definition 13.4 Egenvektorrum

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af vektorrummet V ind i sig selv, og lad λ være en egenværdi for f.

Ved *egenvektorrummet* (eller kort *egenrummet*) E_λ hørende til λ forstås underrummet af egenvektorer, som hører til λ,

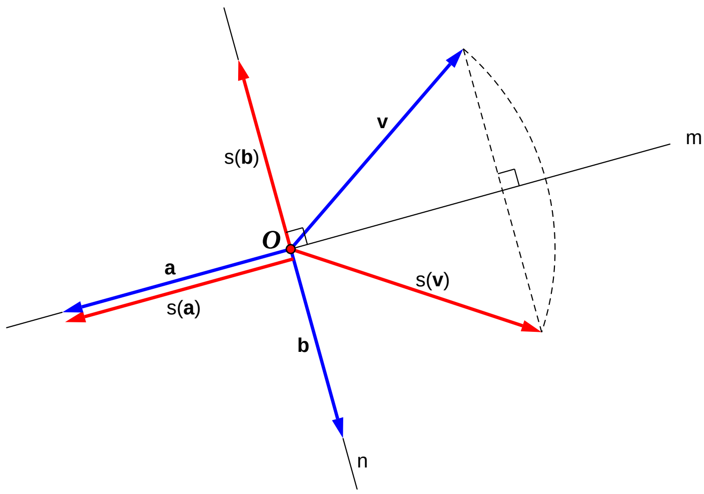
$$E_\lambda = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}\ .$$

Hvis E_λ er endeligt-dimensionalt, kaldes $\dim(E_\lambda)$ for den *geometriske multiplicitet* af λ, betegnet $\mathrm{gm}(\lambda)$.

I det følgende eksempel betragtes en lineær afbildning, som har to egenværdier, begge med geometrisk multiplicitet 1.

|||| Eksempel 13.5 Egenrum for spejling

I planen er der tegnet en ret linje m gennem origo. Med s betegnes den lineære afbildning, der afbilder en vektor $\mathbf{v}$ afsat ud fra origo i dens spejling $s(\mathbf{v})$ i m, se figuren:



Lad $\mathbf{a}$ være en vilkårlig egentlig vektor, som ligger på m. Ved afbildning spejles vektoren i linjen m, og der sker derfor ingen ændring. Der gælder:

$$s(\mathbf{a}) = \mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a}\,,$$

og derfor er 1 en egenværdi for s. Egenrummet E_1 indeholder mængden af samtlige vektorer, der ikke ændres ved spejlingen; dvs. mængden af vektorer, som ligger på m.

Vi tegner nu en ret linje n gennem origo vinkelret på m. Lad $\mathbf{b}$ være en vilkårlig egentlig vektor, som ligger på n. Da der gælder:

$$s(\mathbf{b}) = -\mathbf{b} = (-1) \cdot \mathbf{b}\,,$$

er -1 en egenværdi for s. Egenrummet E_{-1} er mængden af vektorer som ligger på n.

At ikke alle lineære afbildninger har egenværdier og dermed egenvektorer, fremgår af det følgende eksempel.

|||| Eksempel 13.6

Lad $G_2(\mathbb{R})$ betegne vektorrummet af vektorer i planen. Lad os undersøge egenværdiproblemet for den lineære afbildning $f : G_2 \rightarrow G_2$, som til en egentlig vektor $\mathbf{v}$ i planen knytter dens tværvektor:

$$f(\mathbf{v}) = \widehat{\mathbf{v}}\,.$$

Da en egentlig vektor $\mathbf{v}$ aldrig kan være proportional (parallel) med sin tværvektor, må der for ethvert valg af en skalar λ nødvendigvis gælde, at

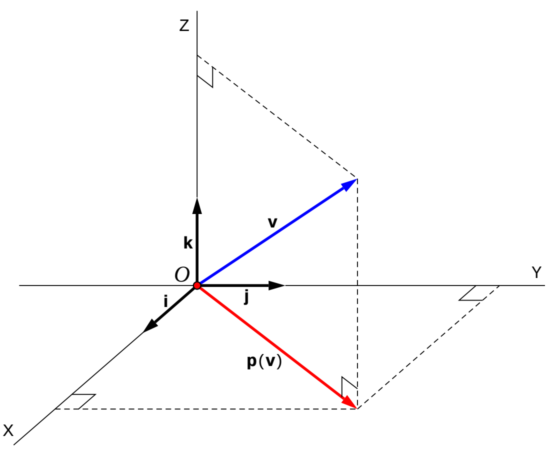
$$\widehat{\mathbf{v}} \neq \lambda \mathbf{v}\,.$$

Derfor findes der ikke egenværdier og dermed heller ikke egenvektorer for f .

Af den følgende opgave fremgår det blandt andet, at dimensionen af et egenvektorrum meget vel kan være større end 1.

|||| Opgave 13.7

I rummet er der givet et standard $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$-koordinatsystem. Alle vektorer tænkes afsat ud fra origo. Afbildningen p projicerer vektorer ned i (x, y)-planen i rummet, se figur 9.6.



Figur 9.6: Egenværdiproblemet for projektion ned i (x, y)-planen.

Det er vist i opgave 12.26, at p er lineær. Bestem samtlige egenværdier og de egenrum, der hører til egenværdierne, udelukkende ved hovedregning (grubling).

|||| Eksempel 13.8 Egenværdiproblem for differentiation

Lad $C^{\infty}(\mathbb{R})$ betegne mængden af differentiable reelle funktioner. Vi betragter den lineære afbildning $f : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$, som er givet ved

$$f(x(t)) = x'(t)\,.$$

Lad λ være en vilkårlig skalar. Da der gælder:

$$f(\mathrm{e}^{\lambda t}) = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda t}\,,$$

er λ en egenværdi for f , og $\mathrm{e}^{\lambda t}$ er en egenvektor, som hører til λ .

Dette var blot én løsning. *Samtlige* løsninger til differentialligningen

$$x'(t) = \lambda x(t)$$

er givet ved $k \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$, hvor k er et vilkårligt reelt tal, er egenrummet hørende til λ bestemt ved

$$E_{\lambda} = \left\{ \, k \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \;\middle|\; k \in \mathbb{R} \, \right\}\,.$$

13.1.3 Teoretiske pointer

Den følgende hjælpesætning giver et vigtigt resultat for lineære afbildninger af vektorrum ind i sig selv. Den gælder uanset, om det betragtede vektorrum har endelig dimension eller ej.

|||| Hjælpesætning 13.9

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af et vektorrum V ind i sig selv, og antag,

1. at f har en række egenværdier med tilhørende egenrum,
2. at der udvælges nogle af egenrummmene, og inden for hvert af de udvalgte egenrum udvælges nogle lineært uafhængige vektorer,
3. og at alle de således udvalgte vektorer sættes sammen til ét vektorsæt v .

Så er v et lineært uafhængigt vektorsæt.

|||| Bevis

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning, og lad v være et vektorsæt, der er sammensat i overensstemmelse med punkt 1. til 3. i hjælpesætning 13.9. Vi skal vise, at v er lineært uafhængigt. Den røde tråd i beviset er, at vi antager det modsatte; det vil sige, at vi antager, at v er lineært afhængigt men viser, at dette fører til en modstrid.

Vi udtynder først v til en basis for $\text{span}\{v\}$. Da sættet er lineært afhængigt, må der da være mindst én vektor i v, som ikke er med i basen. Vi vælger en af dem (en af de vektorer, der er afhængig af de andre); lad os kalde den $\mathbf{x}$. Nu skriver vi $\mathbf{x}$ som en linearkombination af basisvektorerne, idet vi udelader de trivielle led, det vil sige dem, som har koefficienten 0:

$$\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + k_m\mathbf{v}_m \,. \tag{13-7}$$

Vi kalder egenværdien, der hører til $\mathbf{x}$, for λ, og egenværdierne hørende til $\mathbf{v}_i$ for λ_i. Vi kan ud fra (13.1.7) opn et udtryk for $\lambda\mathbf{x}$ p to forskellige mder — dels ved at gange (13.1.7) med λ og dels ved at finde billedet ved f af hjre- og venstresiden i (13.1.7). Vi benytter begge fremgangsmåder:

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{x} &= \lambda k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda k_m\mathbf{v}_m \\ \lambda\mathbf{x} &= \lambda_1 k_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m k_m\mathbf{v}_m \,.\end{aligned}$$

Ved subtraktion af den nederste ligning fra den øverste medfører dette:

$$\mathbf{0} = k_1(\lambda - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + k_m(\lambda - \lambda_m)\mathbf{v}_m \,. \tag{13-8}$$

Hvis alle koefficienterne til vektorerne på højresiden af (13.1.8) er lig med nul, m $\lambda = \lambda_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, m$. Men s har $\mathbf{x}$ og alle basisvektorerne $\mathbf{v}_i$ samme egenvrdi og m vre valgt ud fra det samme egenvektorrum. De skulle derfor være lineært uafhængige, da en forudsætningen i hjælpesætning 13.9 for, at de blev valgt ud som et sæt, netop var, at de indenfor samme egenvektorrum var lineært uafhængige. Dette strider mod at $\mathbf{x}$ er en linearkombination af basisvektorerne, da det ikke er muligt, hvis den er en del af et lineært uafhængigt sæt.

Derfor må mindst én koefficienterne i (13.1.8) være forskellig fra 0. Men så er nul-vektoren opskrevet som en egentlig linearkombination af basisvektorerne. Dette strider mod kravet om, at en basis er lineært uafhængig.

Konklusionen er, at antagelsen om, at v er et lineært afhængigt vektorsæt, nødvendigvis fører til en modstrid. Derfor er v lineært uafhængigt.

■

|||| Eksempel 13.10 Egenvektorers lineære uafhængighed

En lineær afbildning $f : V \to V$ har tre egenværdier λ_1, λ_2 og λ_3, som har de geometriske multipliciteter 2, henholdsvis 1 og 3. Hvis vektorsættet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ er en basis for E_{λ_1}, $(\mathbf{b})$ en basis for E_{λ_2} og $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ en basis for E_{λ_3}, så følger det af hjælpesætning 13.9, at ethvert udvalg af de seks basisvektorer er et lineært uafhængigt vektorsæt.

Værdien af hjælpesætning 13.9 viser sig ved, at den direkte fører til de følgende vigtige resultater.

|||| Sætning 13.11 Generelle egenskaber

Lad V være et vektorrum med $\dim(V) = n$, og lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af V ind i sig selv. Der gælder:

1. Egentlige egenvektorer, som hører til forskellige egenværdier for f, er lineært uafhængige.

2. f kan højst have n forskellige egenværdier.

3. Hvis f har n forskellige egenværdier, findes der en basis for V bestående af egenvektorer for f.

4. Summen af de geometriske multipliciteter af egenværdierne for f kan højst være n.

5. Hvis og kun hvis summen af de geometriske multipliciteter af egenværdierne for f er lig med n, findes der en basis for V bestående af egenvektorer for f.

|||| Opgave 13.12

Det første punkt i sætning 13.11 er et simpelt specialtilflde af hjælpesætning 13.9 og følger derfor umiddelbart af hjælpesætningen. Det andet punkt kan bevises således:

Antag at en lineær afbildning har k forskellige egenværdier. Vi vælger en egentlig vektor fra hvert af de k egenrum. Sættet af de k valgte vektorer er da ifølge hjælpesætning 13.9 linert uafhngigt, og k m derfor være mindre end eller lig med vektorrummets dimension (se hjælpesætning **??***).*

Gør på tilsvarende vis rede for, hvordan de tre sidste punkter i sætning 13.11 flger af hjælpesætning 13.9.

Motiveret af sætning 13.11 indfører vi begrebet egenbasis.

|||| Definition 13.13 Egenvektorbasis

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af et endeligt-dimensionalt vektorrum V ind i sig selv.

Ved en *egenvektorbasis*, eller kort *egenbasis*, for V med hensyn til f forstås en basis bestående af egenvektorer for f .

Herefter kan vi præsentere dette afsnits hovedresultat.

|||| Sætning 13.14 Hovedsætning

Lad $f : V \to V$ være en lineær afbildning af et n-dimensionalt vektorrum V ind i sig selv, og lad $v = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ være en basis for V . Der gælder da:

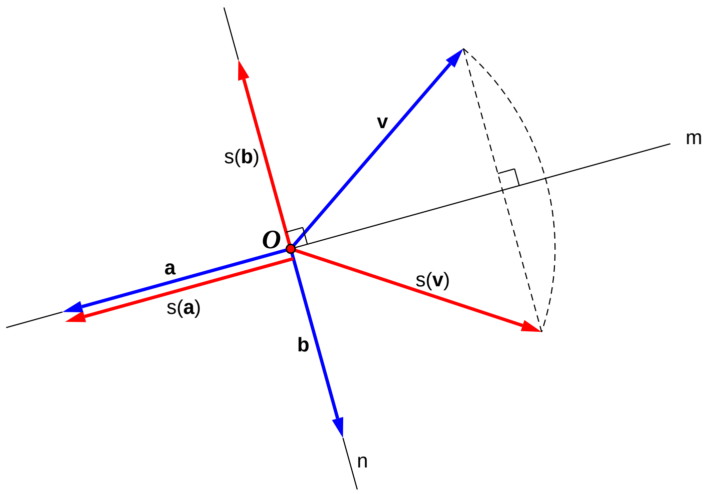
1. Afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{v}}\mathbf{F}_{\mathrm{v}}$ for f med hensyn til v er en *diagonalmatrix*, hvis og kun hvis v er en egenbasis for V med hensyn til f .

2. Antag, at v er en egenbasis for V med hensyn til f . Lad $\mathbf{\Lambda}$ betegne den diagonalmatrix, som er afbildningsmatrix for f med hensyn til v . Rækkefølgen af diagonalelementerne i $\mathbf{\Lambda}$ er da bestemt ud fra den valgte basis således: Basisvektoren $\mathbf{v}_i$ hører til den egenværdi λ_i, som står i den i'te søjle i $\mathbf{\Lambda}$.

Vi udskyder beviset for denne sætning til eNote 10 om diagonalisering.

|||| Eksempel 13.15 Diagonalmatrix for spejling

Lad os igen betragte situationen i eksempel 13.5, hvor vi betragtede afbildningen s, som spejler vektorer afsat ud fra origo i linjen m:



Vi fandt, at $\mathbf{a}$ er en egenvektor, som hører til egenværdien 1, og at $\mathbf{b}$ er en egenvektor, som hører til egenværdien -1. Da planen har dimensionen 2, følger det af sætning 13.14, at hvis vi vælger basen $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, så har f den følgende afbildningsmatrix med hensyn til denne basis:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

|||| Eksempel 13.16 Lineær afbildning uden egenværdier

I eksempel 13.6 fandt vi, at den afbildning, som til en vektor i planen lader svare dens tværvektor, ingen egenværdier har. Der findes derfor ingen egenbasis for afbildningen, og der kan for denne afbildning derfor ikke opstilles en afbildningsmatrix, som er en diagonalmatrix.

|||| Eksempel 13.17 Diagonalisering af kompleks afbildning

Lad $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ være en lineær afbildning, som opfylder

$$f(z_1, z_2) = (-z_2, z_1)\,.$$

Da der gælder:

$$f(i,1) = (-1,i) = i\,(i,1) \quad \text{og} \quad f(-i,1) = (-1,-i) = (-i)(-i,1)\,,$$

ses det, at i er en egenværdi for f med en tilhørende egenvektor $(i,1)$, og at $-i$ er en egenværdi for f med en tilhørende egenvektor $(-i,1)$.

Da $(i,1)$ og $(-i,1)$ er lineært uafhængige, er $\big((i,1),(-i,1)\big)$ en egenbasis for $\mathbb{C}^2$. Afbildningsmatricen for f med hensyn til denne basis er ifølge sætning 13.14

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

|||| Opgave 13.18

Betragt igen situationen i eksempel 13.7. Vælg to forskellige egenbaser (baser bestående af egenvektorer for p), og bestem i hvert af de to tilfælde den diagonalmatrix, som bliver afbildningsmatrix for p med hensyn til den valgte basis.

13.2 Egenværdiproblemet for kvadratiske matricer

Når en lineær afbildning $f : V \to V$ afbilder et n-dimensionalt vektorrum V ind i vektorrummet selv, bliver afbildningsmatricen for f med hensyn til en vilkårligt valgt basis a en *kvadratisk* matrix. Egenværdiproblemet $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ er da ækvivalent med matrixligningen

$$_{\mathrm{a}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = \lambda\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}\,. \tag{13-9}$$

Dette giver os anledning til at formulere et egenværdiproblem for kvadratiske matricer generelt, det vil sige uden, at vi nødvendigvis behøver at tænke på den kvadratiske matrix som en afbildningsmatrix. Vi vil standardisere måden at gå frem på, når egenværdier og egenvektorer for kvadratiske matricer søges bestemt. Dermed fås samtidigt i kraft af (13.2.9) metoder til at finde egenvrdier og egenvektorer for *alle* endeligtdimensionelle lineære afbildninger af vektorrum ind i sig selv, der kan beskrives ved hjælp af afbildningsmatricer.

Først præciserer vi, hvad der forstås ved *egenværdiproblemet for en kvadratisk matrix*.

|||| Definition 13.19 Egenværdiproblemet for matricer

At løse *egenværdiproblemet* for en kvadratisk reel $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ vil sige at finde skalarer λ med tilhørende egentlige vektorer $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, som opfylder ligningen

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\,. \tag{13-10}$$

Opfyldes denne ligning for et par bestående af λ og $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, kaldes λ en *egenværdi* for $\mathbf{A}$ og $\mathbf{v}$ en til λ hørende *egenvektor* for $\mathbf{A}$.

|||| Eksempel 13.20 Egenværdiproblem for kvadratisk matrix

Det ønskes undersøgt, om $\mathbf{v}_1 = (2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (4,4)$ og $\mathbf{v}_3 = (2,-1)$ er egenvektorer for en matrix $\mathbf{A}$ givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}. \tag{13-11}$$

Til dette opstilles egenværdiproblemet, som beskrevet i definition 13.19:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{A}\mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 2 \cdot \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{A}\mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} \neq \lambda \cdot \mathbf{v}_3 \;\text{ for ethvert }\; \lambda\,.
\end{aligned} \tag{13-12}$$

Af dette ses, at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer for $\mathbf{A}$. $\mathbf{v}_1$ hører til egenværdien 1, og $\mathbf{v}_2$ hører til egenværdien 2. Endvidere ses det, at $\mathbf{v}_3$ ikke er en egenvektor for $\mathbf{A}$.

|||| Eksempel 13.21 Egenværdiproblem for kvadratisk matrix

Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
er 0 en egenværdi for $\mathbf{A}$, og $(1,1)$ er en til egenværdien 0 hørende egenvektor for $\mathbf{A}$.

|||| Eksempel 13.22 Egenværdiproblem for kvadratisk matrix

Givet matricen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Da
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix},$$
er i en kompleks egenværdi for $\mathbf{A}$, og $(-i,1)$ er en til egenværdien i hørende kompleks egenvektor for $\mathbf{A}$.

Til brug for de følgende undersøgelser knytter vi nogle vigtige kommentarer til definition 13.19.

Først bemærker vi, at selv om den kvadratiske matrix $\mathbf{A}$ i definition 13.19 er reel, er man ofte interesseret i ikke kun at finde reelle løsninger til ligningen (13.2.10) men generelt komplekse løsninger. Der søges med andre ord en skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ og en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, der opfylder (13.2.10).

Det kan derfor være hensigtsmæssigt at opfatte venstresiden i (13.2.10) som en afbildning $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ givet ved
$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\,\mathbf{v}\,.$$
Denne afbildning er lineær. Lad nemlig $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ og $k \in \mathbb{C}$. Der gælder da ifølge sædvanlige regneregler for matricer, at
$$\begin{aligned} L_1 : \quad & f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}\,\mathbf{u} + \mathbf{A}\,\mathbf{v} \\ L_2 : \quad & f(k\,\mathbf{u}) = \mathbf{A}(k\,\mathbf{u}) = k(\mathbf{A}\,\mathbf{u})\,. \end{aligned}$$
Hermed er lineariteten vist. Da egenværdiproblemet $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ i dette tilfælde er *identisk* med egenværdiproblemet $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$, kan det sluttes at resultaterne opnået i afsnit 9.1 for egenværdiproblemet i almindelighed, umiddelbart kan overføres til egenværdiproblemet for matricer. Lad os således straks karakterisere mængden af egenvektorer, der hører til en given egenværdi for en kvadratisk, reel matrix (sammenlign med sætning 13.3).

|||| Sætning 13.23 Underrum af egenvektorer

Lad λ være en reel eller kompleks egenværdi for en reel $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$. Der gælder da, at mængden af komplekse egenvektorer for $\mathbf{A}$ hørende til λ er et underrum i $\mathbb{C}^n$.

Hvis man kun er interesseret i reelle løsninger på egenværdiproblemet for reelle kvadratiske matricer, kan man alternativt opfatte venstresiden i (13.2.10) som en reel afbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ givet ved:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\,\mathbf{v}\,.$$

Denne afbildning er naturligvis også lineær. Vi opnår herved den følgende variant af sætning 13.23.

|||| Sætning 13.24 Underrum af egenvektorer

Lad λ være en reel egenværdi for en reel $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$. Der gælder da, at mængden af reelle egenvektorer for $\mathbf{A}$ hørende til λ, er et underrum i $\mathbb{R}^n$.

I lyset af sætning 13.23 og sætning 13.24 indfører vi begrebet *egenvektorrum* (sammenlign med definition 13.4).

|||| Definition 13.25 Egenvektorrum

Lad $\mathbf{A}$ være en kvadratisk, reel matrix, og lad λ være en egenværdi for $\mathbf{A}$.

Underrummet af alle de til λ hørende egenvektorer kaldes *egenvektorrummet* (eller kort *egenrummet*) hørende til λ og betegnes E_λ .

Efter at vi nu har opridset de grundlæggende strukturelle rammer for egenværdiproblemet for kvadratiske matricer, vil vi i de to følgende delafsnit helt elementært undersøge, hvordan man overhovedet kan gå i gang med at finde egenværdier og egenvektorer for kvadratiske matricer.

13.2.1 At finde egenværdierne for en kvadratisk matrix

Vi ønsker at bestemme de egenværdier, som hører til en reel $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$. Udgangspunktet er som nævnt ligningen

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\,. \tag{13-13}$$

I første omgang sætter vi $\lambda\mathbf{v}$ over på venstresiden af lighedstegnet, hvorefter $\mathbf{v}$ "'tages uden for parentes"'. Det kan gøres, fordi $\mathbf{v} = \mathbf{E}\,\mathbf{v}$, hvor $\mathbf{E}$ er enhedsmatricen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \;\Leftrightarrow \\ \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} &= \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda(\mathbf{E}\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} - (\lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} &= \mathbf{0}\,. \end{aligned} \tag{13-14}$$

Den sidste ligning i (13.2.14) svarer til et homogent linæert ligningssystem bestående af n ligninger med de n ubekendte $v_1, \ldots, v_n$, som er elementerne i $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Det er dog ikke muligt straks at lse ligningssystemet, netop fordi vi ikke kender λ. Vi er ndt til at arbejde videre med ligningssystemets koefficientmatrix, som tildeles det særlige symbol

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$$

og kaldes *den karakteristiske matrix* for $\mathbf{A}$.

Da det er et homogent lineært ligningssystem, som skal løses, er der som udgangspunkt to muligheder for løsningsstrukturen: Enten er den karakteristiske matrix *regulær*, og så er den eneste løsning $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Eller også er matricen *singulær*, og der vil findes uendeligt mange løsninger $\mathbf{v}$. Men da definition 13.19 kræver, at $\mathbf{v}$ skal være en egentlig vektor, altså en vektor forskellig for nulvektoren, må den karakteristiske matrix være singulær. For at undersøge, om dette gælder, tages determinanten af den karakteristiske matrix. Den er nul netop, når matricen er singulær, som vist i en tidligere eNote,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0\,. \tag{13-15}$$

Bemærk, at venstresiden i (13-15) er et polynomium med λ som variabel, hvis det skrives ud. Polynomiet tildeles det særlige symbol

$$K_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda))$$

og kaldes *det karakteristiske polynomium* for $\mathbf{A}$.

Den ligning, der fremkommer, når det karakteristiske polynomium sættes lig nul

$$K_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)) = 0\,,$$

kaldes *karakterligningen* for $\mathbf{A}$.

Ved hjælp af udregningsmetoden for determinanter kan det indses, at det karakteristiske polynomium altid er et n'tegradspolynomium. Se også de efterfølgende eksempler. Hovedpointen er, at rødderne i det karakteristiske polynomium (løsningerne til karakterligningen) er egenværdierne for matricen, fordi egenværdierne netop opfylder, at den karakteristiske matrix er singulær.

|||| Eksempel 13.26 En karakteristisk matrix

Givet en (3×3)-matrix $\mathbf{A}$ ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{13-16}$$

så er den tilhørende *karakteristiske matrix*

$$\begin{aligned} \mathbf{K_A}(\lambda) &= \mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{13-17}$$

|||| Eksempel 13.27 Et karakteristisk polynomium

Vi fortsætter fra eksempel 13.26 og fr det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ (ved at opløse den karakteristiske matrix efter sidste søjle jf. metoderne i eNote 5):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (-1)^{3+3}(2-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)\,. \end{aligned} \tag{13-18}$$

Det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$ har altså rødderne 1, 2 og 3.

|||| Eksempel 13.28 Egenværdier for 2×2-matricer

Givet to matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{13-19}$$

Bestem egenværdierne for $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$.

Først betragtes $\mathbf{A}$. Dens karakteristiske matrix opskrives:

$$\mathbf{K_A}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}. \tag{13-20}$$

Nu bestemmes det karakteristiske polynomium:

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{K_A}(\lambda)) = \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (4-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)\cdot 3 = \lambda^2 - 3\lambda + 2\,. \end{aligned} \tag{13-21}$$

Polynomiet har som forventet graden 2. Karakterligningen kan opskrives, og løsningerne til den kan bestemmes:

$$K_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1 \;\text{ eller }\; \lambda = 2\,. \tag{13-22}$$

Altså har $\mathbf{A}$ de to egenværdier $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$.

Den samme teknik bruges for at bestemme eventuelle egenværdier til $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K_B}(\lambda) &= \mathbf{B} - \lambda\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ K_{\mathbf{B}}(\lambda) &= \det(\mathbf{K_B}(\lambda)) = \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (-1-\lambda)(3-\lambda) - 4\cdot(-2) = \lambda^2 - 2\lambda + 5\,. \end{aligned} \tag{13-23}$$

Der er i dette tilfælde ingen reelle løsninger til $K_{\mathbf{B}}(\lambda) = 0$, fordi diskriminanten $d = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -16 < 0$, og derfor har $\mathbf{B}$ ingen *reelle* egenværdier. Men den har to *komplekse* egenværdier. Vi tager den komplekse "'værktøjskasse"' frem: Diskriminanten kan omskrives til $d = (4i)^2$, hvilket giver de to komplekse løsninger

$$\lambda = \frac{2 \pm 4i}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1 + 2i \;\text{ og }\; \lambda = 1 - 2i\,. \tag{13-24}$$

Altså har $\mathbf{B}$ de to komplekse egenværdier $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Bemærk, at de to komplekse egenværdier, der blev fundet sidst i eksemplet herover, viser sig at være hinanden *konjugerede*, $\lambda_1 = 1+2i$ og $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1-2i$. Dette er nemlig en generel regel, som vi ser nærmere på senere i afsnit 13.2.4.

I den følgende sætning opsummeres konklusionerne i dette delafsnit.

|||| Sætning 13.29 Karakteristisk matrix og polynomium samt karakterligning

For den kvadratiske reelle $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ haves

1. *den karakteristiske matrix* $\mathbf{K_A}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$,
2. *det karakteristiske polynomium* $K_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{K_A}(\lambda)) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ og
3. *karakterligningen* $K_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

Der gælder:

1. Det karakteristiske polynomium er et n'tegradspolynomium med den variable λ, og karakterligningen er tilsvarende en n'tegradsligning med den ubekendte λ.
2. Rødderne i det karakteristiske polynomium (løsningerne for karakterligningen) er *samtlige* egenværdier for $\mathbf{A}$.

|||| Opgave 13.30 Graden af det karakteristiske polynomium

Argumentér for, at det karakteristiske polynomium $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ for en $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ er et polynomium i λ af graden n.

|||| Opgave 13.31 Nogle karakteristiske polynomier og deres rødder

Bestem de karakteristiske polynomier for følgende matricer, og find alle reelle rødder i hvert af polynomierne:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_2 = \mathbf{diag}(a_1, a_2, a_3), \ \mathbf{A}_3 = \mathbf{bidiag}(b_1, b_2, b_3). \tag{13-25}$$

|||| **Opgave 13.32 Find matricer med givne karakter-egenskaber**

Konstruér to (4×4)-matricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ sådan, at den ene har lutter reelle rødder i sit karakteristiske polynomium, og sådan at den anden ikke har nogen som helst reelle rødder i sit karakteristiske polynomium.

13.2.2 At finde egenvektorerne for en kvadratisk matrix

Efter at egenværdierne til en reel $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ er bestemt, er det muligt at bestemme de tilhørende egenvektorer. Proceduren tager udgangspunkt i ligningen

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \tag{13-26}$$

som vi nåede frem til i (13-14). Når egenværdierne er kendte, kan det til (13.2.26) svarende homogene lineære ligningssystem løses med hensyn til de n ubekendte $v_1, \ldots, v_n$, som er elementer i $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Vi skal blot indsætte egenværdierne efter tur og løse ligningssystemet for hver af dem. Som allerede nævnt er den karakteristiske matrix singulær, når den indsatte λ er en egenværdi. Derfor findes der uendeligt mange løsninger til ligningssystemet. At finde disse svarer til at finde samtlige egenvektorer $\mathbf{v}$, der hører til λ.

I den følgende metode sammenfattes opgaven med at bestemme egenværdier og tilhørende egenvektorer for en kvadratisk matrix.

|||| **Metode 13.33 Bestemmelse af egenvektorer**

Samtlige (reelle eller komplekse) egenværdier λ for den kvadratiske matrix $\mathbf{A}$ findes som løsningerne til karakterligningen for $\mathbf{A}$,

$$K_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0\,. \tag{13-27}$$

Derefter kan egenvektorerne $\mathbf{v}$ tilhørende hver enkelt egenværdi λ bestemmes. De er løsningerne til det følgende lineære ligningssystem

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}\,, \tag{13-28}$$

når egenværdien λ er indsat. $\mathbf{E}$ er enhedsmatricen.

Metode 13.33 udfoldes i de fløgende tre eksempler, der også giver os anledning til, i forlængelse af sætning 13.23 og sætning 13.24, at beskrive *mængden* af egenvektorer, der tilhører en given egenværdi.

|||| Eksempel 13.34 Egenværdiers tilhørende egenvektorer

Givet den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{13-29}$$

Bestem egenværdier og egenvektorer til **A**.

Vi bruger metode 13.33. Først findes den karakteristiske matrix,

$$\mathbf{K_A}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}. \tag{13-30}$$

Dernæst opstilles det karakteristiske polynomium,

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1\cdot 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3\,. \end{aligned} \tag{13-31}$$

Karakterligningen, som er $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, har løsningerne $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 3$, der er samtlige reelle egenværdier til **A**.

For at bestemme de til λ_1 hørende egenvektorer indsættes λ_1 i $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hvorefter vi løser dette lineære ligningssystem, som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = [\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E} \,|\, \mathbf{0}\,] = \left[\begin{array}{cc|c} 2-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \end{array}\right]. \tag{13-32}$$

Ved GaussJordan-elimination fås

$$\mathrm{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{13-33}$$

Der er altså uendeligt mange løsninger $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, da der kun er én ikke-triviel ligning, $v_1 + v_2 = 0$. v_2 svarer til en fri parameter og betegnes t, og vi opskriver samtlige reelle egenvektorer hørende til λ_1 ved

$$\mathbf{v} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}\,. \tag{13-34}$$

Vektoren $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$ er et eksempel på en egenvektor. Da t kan gennemløbe alle reelle tal, kan man blot vælge et vilkårligt t og deraf få en ny egenvektor. Der findes således uendeligt mange egenvektorer til egenværdien. Løsningen er et 1-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^2$, og det er nemlig egenrummet, som hører til egenværdien 1 , hvilket vi kan angive således:

$$E_1 = \text{span}\{(-1,1)\}\,. \tag{13-35}$$

Egenvektorerne til den anden egenværdi λ_2 skal også findes. λ_2 indsættes i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hvorefter vi løser det hertil svarende lineære ligningssystem, som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = [\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E}\,|\,\mathbf{0}\,] = \left[\begin{array}{cc|c} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \end{array}\right]. \tag{13-36}$$

Ved GaussJordan-elimination fås

$$\text{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{13-37}$$

Heraf ses, at $\mathbf{v}_2 = (1,1)$ er en egenvektor tilhørende egenværdien λ_2. Samtlige reelle egenvektorer hørende til λ_2 kan opskrives som

$$\mathbf{v} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}\,. \tag{13-38}$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^2$, som vi også kan angive ved

$$E_3 = \text{span}\{(1,1)\}\,. \tag{13-39}$$

Der vil nu blive ført kontrol: Når $\mathbf{v}_1 = (-1,1)$ afbildes med $\mathbf{A}$, vil billedvektoren da udelukkende være en skalering (længdeændring) af $\mathbf{v}_1$?

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1\,. \tag{13-40}$$

Det passer! Man kan oven i købet se, at egenværdien er 1 .

Nu kontrolleres $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \mathbf{v}_2\,. \tag{13-41}$$

$\mathbf{v}_2$ er altså som forventet også en egenvektor, og egenværdien er 3.

|||| Eksempel 13.35 Komplekse egenværdier og egenvektorer

I eksempel 13.28 er der givet en matrix $\mathbf{B}$ med

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \tag{13-42}$$

som ingen reelle egenværdier har. Men vi fandt to komplekse egenværdier, $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Vi indsætter λ_1 i $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hvorefter vi løser det hertil svarende lineære ligningssystem, som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = [\mathbf{B} - \lambda_1\mathbf{E} \,|\, \mathbf{0}\,] = \left[\begin{array}{cc|c} -1-(1+2i) & 4 & 0 \\ -2 & 3-(1+2i) & 0 \end{array}\right]. \tag{13-43}$$

Ved GaussJordan-elimination fås

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{13-44}$$

Dette svarer til én ikke-triviel ligning $v_1 + (-1+i)v_2 = 0$. Sættes den frie parameter til $v_2 = s$, ser vi, at samtlige komplekse egenvektorer hørende til λ_1 er givet ved

$$\mathbf{v} = s \cdot \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}, \; s \in \mathbb{C}. \tag{13-45}$$

Dette er et 1-dimensionalt underrum i $\mathbb{C}^2$, nemlig egenrummet hørende til egenværdien $1 + 2i$, som vi også kan angive ved

$$E_{1+2i} = \operatorname{span}\{(1-i, 1)\}. \tag{13-46}$$

Tilsvarende kan samtlige komplekse løsninger hørende til λ_2 findes til

$$\mathbf{v} = s \cdot \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}, \; s \in \mathbb{C}. \tag{13-47}$$

Dette er ligeledes et 1-dimensionalt underrum i $\mathbb{C}^2$, som vi i samme stil kan angive ved

$$E_{1-2i} = \operatorname{span}\{(1+i, 1)\}. \tag{13-48}$$

I det følgende eksempel finder vi egenværdier og tilhørende egenrum for en (3×3)-

matrix. Det viser sig, at der i dette tilfælde hører et *to*-dimensionalt egenrum til en af egenværdierne.

|||| Eksempel 13.36 Egenværdi med multiplicitet 2

Givet matricen $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & -1 & -10 \end{bmatrix} \tag{13-49}$$

Bestem egenværdierne til $\mathbf{A}$.

Vi bruger metode 13.33:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{K}_\mathbf{A}(\lambda)) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 & 12 \\ 4 & -5-\lambda & 4 \\ -4 & -1 & -10-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ = -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = -(\lambda-3)(\lambda+6)^2 = 0 \end{aligned} \tag{13-50}$$

Af den sidste faktorisering ses, at $\mathbf{A}$ har to forskellige egenværdier. Egenværdien $\lambda_1 = -6$ er en dobbeltrod i karakterligningen, mens egenværdien $\lambda_2 = 3$ er en enkeltrod.

Nu bestemmes egenvektorrummet tilhørende $\lambda_1 = -6$, se sætning 13.23:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 6-(-6) & 3 & 12 & 0 \\ 4 & -5-(-6) & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -10-(-6) & 0 \end{array}\right] \rightarrow \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 3 & 12 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{13-51}$$

Her er kun én ikke-triviel ligning: $4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$. Sættes x_1 og x_3 til de to frie parametre s og t, fås samtlige reelle egenvektorer til egenværdien -6 ved

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s,t \in \mathbb{R}\,. \tag{13-52}$$

Dette er et 2-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^3$, som vi også kan angive ved

$$E_{-6} = \operatorname{span}\{(1,-4,0),(0,-4,1)\}\,. \tag{13-53}$$

Det er dermed muligt at finde to lineært uafhængige egenvektorer til λ_1 fx de to, der her er opskrevet som udspændingen af egenrummet. Hvad med antallet af lineært uafhængige egenvektorer for $\lambda_2 = 3$?

$$\begin{gathered}\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 6-3 & 3 & 12 & 0 \\ 4 & -5-3 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -10-3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 12 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -13 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].\end{gathered} \tag{13-54}$$

Her er to ikke-trivielle ligninger, $x_1 + 3x_3 = 0$ og $x_2 + x_3 = 0$. Sættes $x_3 = s$ som den frie parameter, fås samtlige reelle egenvektorer til egenværdien 3 ved

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ s \in \mathbb{R}. \tag{13-55}$$

Dette er et 1-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^3$, som vi også kan angive ved

$$E_3 = \mathrm{span}\{(-3, -1, 1)\}. \tag{13-56}$$

Det er altså kun muligt at finde én lineært uafhængig egenvektor til λ_2.

|||| Opgave 13.37

Givet den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \tag{13-57}$$

1. Bestem samtlige egenværdier til **A**.
2. Bestem for hver af egenværdierne det tilhørende egenrum.
3. Opskriv mindst 3 egenvektorer tilhørende hver egenværdi. De må gerne være lineært afhængige.

13.2.3 Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Som det fremgår af eksempel 13.36 er det både vigtigt at være opmærksom på, om en egenværdi er enkeltrod eller flerdobbeltrod i karakterligningen for en kvadratisk, reel matrix, og på dimensionen af det tilhørende egenrum. I dette delafsnit undersøges relationen mellem de to fænomener. Det giver anledning til de følgende definitioner.

|||| Definition 13.38 Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Lad $\mathbf{A}$ være en kvadratisk, reel matrix, og lad λ være en egenværdi for $\mathbf{A}$.

1. λ siges at have *den algebraiske multiplicitet* n, når λ er en n-dobbeltrod i karakterligningen til den kvadratiske matrix $\mathbf{A}$. Dette betegnes $\operatorname{am}(\lambda) = n$.

2. λ siges at have *den geometriske multiplicitet* m, når dimensionen af det til λ hørende egenvektorrum er m. Dette betegnes $\operatorname{gm}(\lambda) = m$. Der gælder med andre ord, at $\dim(E_\lambda) = \operatorname{gm}(\lambda)$.

Det er ikke altid, at $\operatorname{am}(\lambda) = \operatorname{gm}(\lambda)$. Dette tages op i sætning 13.39.

Vi kan betragte den algebraiske multiplicitet som antallet af forekomster af egenværdien λ og den geometriske multiplicitet som antallet af lineært uafhængige egenvektorer til egenværdien λ.

Den følgende sætning viser nogle vigtige egenskaber vedrørende algebraisk og geometrisk multiplicitet for egenværdier for kvadratiske matricer (sammenlign med sætning 13.11).

|||| Sætning 13.39 Egenskaber for multipliciteter

Givet en reel $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$.

1. $\mathbf{A}$ har højst n forskellige reelle egenværdier, og også summen af de reelle egenværdiers algebraiske multipliciteter er højst n .

2. $\mathbf{A}$ har højst n forskellige komplekse egenværdier, og summen af de komplekse egenværdiers algebraiske multipliciteter er lig med n .

3. Er λ en reel eller kompleks egenværdi for $\mathbf{A}$, gælder der:

$$1 \leq \mathrm{gm}(\lambda) \leq \mathrm{am}(\lambda) \leq n \qquad (13\text{-}58)$$

   Det vil sige, at den geometriske multiplicitet af en egenværdi mindst vil være 1, at den vil være mindre end eller lig med den algebraiske multiplicitet af egenværdien, som igen vil være mindre eller lig antallet af søjler og rækker i $\mathbf{A}$.

|||| Opgave 13.40

Kontroller, at alle tre punkter i sætning 13.39 er gældende for egenvrdierne og egenvektorerne i eksempel 13.36.

Lad os knytte nogle kommentarer til sætning 13.39.

Punkt 1 og 2 følger direkte af læren om polynomier. Det karakteristiske polynomium for en reel $(n \times n)$-matrix $\mathbf{A}$ er et n'tegradspolynomium, og det har højst n forskellige reelle såvel som komplekse rødder. Endvidere er summen af de reelle rødders multiplicitet højst n , mens summen af de komplekse rødders multiplicitet er lig med n .

Vi har tidligere vist, at der for enhver lineær afbildning af et n-dimensionalt vektorrum ind i sig selv gælder, at summen af de geometriske multipliciteter af egenværdierne højst kan være n , se sætning 13.11. Bemærk at dette direkte kan udledes af udsagnene om muliplicitet i sætning 13.39.

Som noget nyt og interessant påstås det i punkt 3, at den geometriske multiplicitet for en enkelt egenværdi kan være mindre end den algebraiske multiplicitet — det kommer der et eksempel på i det følgende opsamlende eksempel 13.41 — og videre at den geometriske multiplicitet af en enkelt egenværdi ikke kan være større end den algebraiske. Beviset for punkt 3 i sætning 13.39 udelades.

|||| Eksempel 13.41 Geometrisk multiplicitet mindre end algebraisk

Givet er matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}. \tag{13-59}$$

Egenværdierne til $\mathbf{A}$ bestemmes ved karakterligningen $\det(\mathbf{K_A}(\lambda)) = 0$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{K_A}(\lambda)) = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) &= \det\left(\begin{bmatrix} -9-\lambda & 10 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 5 \\ 1 & -4 & 6-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda - 4 = -(\lambda+4)(\lambda-1)^2 = 0\,. \end{aligned} \tag{13-60}$$

Af faktoriseringen før sidste lighedstegn fås, at $\mathbf{A}$ har to forskellige egenværdier, $\lambda_1 = -4$ og $\lambda_2 = 1$. Desuden er $\mathrm{am}(-4) = 1$ og $\mathrm{am}(1) = 2$, som det også fremgår af faktoriseringen.

Egenvektorrummet til $\lambda_1 = -4$ bestemmes ved at løse $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{gathered} \left[\begin{array}{ccc|c} -9-(-4) & 10 & 0 & 0 \\ -3 & 1-(-4) & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 6-(-4) & 0 \end{array}\right] \rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{gathered} \tag{13-61}$$

Der er to ikke-trivielle ligninger, $v_1 - 10v_3 = 0$ og $v_2 - 5v_3 = 0$. Sættes v_3 til den frie parameter, ses det, at samtlige til λ_1 hørende reelle egenvektorer kan angives ved

$$E_{-4} = \left\{\, s\cdot(10,5,1) \;\middle|\; s\in\mathbb{R} \,\right\} = \mathrm{span}\{(10,5,1)\}\,. \tag{13-62}$$

Man har, at $\mathrm{gm}(-4) = \dim(E_{-4}) = 1$, og at en egenvektor til λ_1 er $\mathbf{v}_1 = (10,5,1)$. Det ses, at $\mathrm{gm}(-4) = \mathrm{am}(-4)$ for denne egenværdi.

Det tilsvarende udføres for $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{gathered} \left[\begin{array}{ccc|c} -9-1 & 10 & 0 & 0 \\ -3 & 1-1 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 6-1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{gathered} \tag{13-63}$$

Her er der igen to ikke-trivielle ligninger, $v_1 - v_2 = 0$ og $3v_2 - 5v_3 = 0$. Sættes $v_3 = 3s$, ses det, at samtlige til λ_2 hørende reelle egenvektorer kan angives ved

$$E_1 = \left\{\, s \cdot (5,5,3) \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \,\right\} = \operatorname{span}\{(5,5,3)\}\,. \tag{13-64}$$

Det giver følgende resultater: $\operatorname{gm}(1) = \dim(E_1) = 1$, og at en egenvektor til λ_2 er $\mathbf{v}_2 = (5,5,3)$. Desuden ses det, at $\operatorname{gm}(1) = 1 < \operatorname{am}(1) = 2$.

Bemærk, at den frie parameter i eksemplet herover ikke blot er navngivet s men derimod $3s$. Derved undgås nemlig brøker i elementerne. Ender man nogensinde med brøker eller andre "‘grimme"’ tal som elementer i de udspændende vektorer, kan man ofte blot forlænge vektoren men en vilkårlig passende faktor. Det gør ingen forskel, da den frie parameter i forvejen gennemløber alle tal.

13.2.4 Mere om den komplekse problemstilling

Vi vil bruge matricen

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \tag{13-65}$$

fra eksempel 13.35 til at præcisere nogle særlige fænomener for kvadratiske, reelle matricer, når deres egenværdiproblem studeres i kompleks ramme.

Vi fandt, at $\mathbf{B}$ har egenværdierne $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$. Der gælder således, at egenværdierne er hinandens konjugerede. En anden bemærkelsesværdig ting i eksempel 13.35 er, at når

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for $\lambda_1 = 1 + 2i$, så er den konjugerede vektor

$$\overline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 + i \\ 1 \end{bmatrix}$$

en egenvektor for $\lambda_2 = 1 - 2i$. Begge dele er eksempler på generelle regler.

|||| Sætning 13.42 Konjugerede egenværdier og egenvektorer

For en kvadratisk, reel matrix $\mathbf{A}$ gælder:

1. Hvis λ er en kompleks egenværdi for $\mathbf{A}$ med rektangulær form $\lambda = a + ib$, så er også $\overline{\lambda} = a - ib$ en egenværdi for $\mathbf{A}$.

2. Hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til den komplekse egenværdi λ, så er den konjugerede vektor $\overline{\mathbf{v}}$ en egenvektor for $\mathbf{A}$ hørende til den konjugerede egenværdi $\overline{\lambda}$.

|||| Bevis

Første del af sætning 13.42 følger af læren om polynomier. Det karakteristiske polynomium for en kvadratisk, reel matrix er et polynomium med reelle koefficienter. Derom vides, at rødderne for polynomiet altid optræder i konjugerede par.

Anden del af beviset foretages således:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{A}\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}.$$

Hvis $\mathbf{v}$ er en egenvektor til egenværdien λ, så er $\overline{\mathbf{v}}$ altså samtidig en egenvektor til egenværdien $\overline{\lambda}$. Hermed er sætningen vist.

■

Ved *sporet* for en kvadratisk matrix forstås *summen af diagonalelementerne*. Sporet af $\mathbf{B}$ er dermed $-1+3=2$. Læg nu mærke til, at summen af egenværdierne for $\mathbf{B}$ er $(1-i)+(1+i)=2$, altså det samme som sporet af $\mathbf{B}$. Også dette er et generelt fænomen, som her anføres uden bevis.

|||| Sætning 13.43 Sporet

For en kvadratisk, reel matrix $\mathbf{A}$ gælder, at sporet af $\mathbf{A}$, det vil sige summen af diagonalelementerne i $\mathbf{A}$, er lig med summen af alle (reelle som komplekse) egenværdier for $\mathbf{A}$, idet hver egenværdi indgår i summen det antal gange, som svarer til egenværdiens algebraiske multiplicitet.

|||| Opgave 13.44

I eksempel 13.36 fandt vi, at det karakteristiske polynomium for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

har dobbeltroden -6 og enkeltroden 3. Eftervis, at sætning 13.43 gælder i dette tilfælde.