eNote 6

Lineære ligningssystemer

Denne eNote handler om lineære ligningssystemer, om metoder til at beskrive dem og løse dem, og om hvordan man kan få overblik over løsningsmængdernes struktur. Noten kan læses uden særlige forudsætninger, dog bør man kende til talrummene $\mathbb{R}^n$ *og* $\mathbb{C}^n$*, se eNote 5.*

Version 09.08.15.

6.1 Lineære ligninger

Bemærkning 6.1 Fællesbetegnelsen $\mathbb{L}$

Definitioner og regler i denne eNote gælder både for de reelle tal $\mathbb{R}$ og de komplekse tal $\mathbb{C}$. Mængden af reelle tal og mængden af komplekse tal er eksempler på *tallegemer*. Tallegemer har fælles regneregler, hvad angår de elementære regneoperationer. Når vi i det følgende benytter symbolet $\mathbb{L}$, betyder det, at det, der beskrives, gælder for mængden af både komplekse såvel som reelle tal.

En *lineær ligning* med n ubekendte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er en ligning af formen

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b\,. \tag{6-1}$$

Tallene $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kaldes *koefficienter*, og tallet b kaldes *højresiden*. Koefficienterne og højresiden betragtes som kendte tal i modsætning til de ubekendte. Ligningen kaldes *homogen*, hvis $b = 0$, ellers *inhomogen*.

|||| Definition 6.2 Løsning til en lineær ligning

Ved en *løsning* til ligningen

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b\,. \tag{6-2}$$

forstås et talsæt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{L}^n$, der ved indsættelse i ligningen får den til at passe, det vil sige, at venstresiden ved indsættelse bliver lig med højresiden.

Ved *den fuldstændige løsning* eller blot *løsningsmængden* forstås mængden af alle løsninger til ligningen.

|||| Eksempel 6.3 Ligning for en ret linje i planen

Et eksempel på en lineær ligning er ligningen for en ret linje i (x, y)-planen

$$y = 2\,x + 5\,. \tag{6-3}$$

Her fremstår y isoleret på venstresiden, og koefficienterne 2 og 5 har velkendte geometriske fortolkninger. Men ligningen kunne også skrives som

$$-2\,x_1 + 1\,x_2 = 5\,, \tag{6-4}$$

hvor x og y er erstattet af de mere generelle navne for ubekendte x_1 og x_2, og hvor ligningen er opskrevet på formen (6-1).

Løsningsmængden for (6-3) og (6-4) er selvfølgelig koordinatsættene for samtlige punkter på linjen — ved indsættelse vil de netop opfylde ligningen, mens ingen andre punkter gør det!

|||| Eksempel 6.4 Trivielle og inkonsistente ligninger

Den lineære ligning

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 0 \tag{6-5}$$

hvor alle koefficienterne samt højresiden er 0, er et eksempel på en triviel ligning. Ligningens løsningsmængde består af alle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{L}^4$.

Hvis alle ligningens koefficienter er 0, men højresiden er forskellig fra 0, opstår en inkonsistent ligning; det vil sige en ligning, som ingen løsninger har. Det gælder fx ligningen

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \;\Leftrightarrow\; 0 = 1\,. \tag{6-6}$$

Til at undersøge lineære ligninger, husker vi på de sædvanlige omformningsregler:

- Man ændrer ikke ved løsningsmængden for ligningen, hvis man lægger den samme størrelse til på begge sider af lighedstegnet, og
- man ændrer heller ikke ved løsningsmængden, hvis man ganger på begge sider af lighedstegnet med en konstant, som er forskellig fra 0.

Alle lineære ligninger, som ikke er inkonsistente, og som indeholder mere end én ubekendt, har uendeligt mange løsninger. Det følgende eksempel viser, hvordan man i så fald kan opskrive løsningsmængden.

|||| Eksempel 6.5 Uendeligt mange løsninger på standard-parameterform

Find alle løsninger til den følgende inhomogene lineære ligning med tre ubekendte:

$$2\,x_1 - x_2 + 4\,x_3 = 5\,. \tag{6-7}$$

Ved indsættelse af $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ og $x_3 = 1$ i (6.1.7) ses, at $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ er en løsning. Men hermed har vi ikke fundet den fuldstændige løsning, da vi for eksempel kan konstatere, at $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}, 0, 1)$ også er en løsning. Hvordan kan vi angive hele løsningsmængden?

Lad os starte med at isolere x_1,

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\,x_2 - 2\,x_3\,. \tag{6-8}$$

Til ethvert valg af talværdier for x_2 og x_3 svarer der netop én ny værdi af x_1. Lad os fx sætte $x_2 = 1$ og $x_3 = 4$, og så får vi $x_1 = -5$. Det betyder, at talsættet $(-5, 1, 4)$ er en løsning. Vi kan derfor betragte x_2 og x_3 som *frie parametre*, der fastlægger værdien af x_1. Vi *omdøber* derfor x_2 og x_3 til de mere passende parameter-navne s henholdsvis t sådan, at $s = x_2$ og $t = x_3$. Herefter kan x_1 udtrykkes således (sammenlign med (6.1.8)):

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\,s - 2\,t\,. \tag{6-9}$$

Vi kan nu opskrive den fuldstændige løsning for (6.1.7) på følgende *standard-parameterform*:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } s, t \in \mathbb{L}\,. \tag{6-10}$$

Bemærk, at parameterfremstillingens midterste ligning $x_2 = 0 + s \cdot 1 + t \cdot 0$ sådan set blot udtrykker navneskiftet fra x_2 til s. Tilsvarende udtrykker nederste ligning blot navneskiftet fra x_3 til t.

Hvis vi opfatter (6.1.7) som *ligningen* for en plan i rummet, s angiver (6.1.10) en *parameterfremstilling* for den samme plan. Første søjlevektor på højresiden (den, der ikke ganges med en fri parameter) angiver *begyndelsespunktet* i planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer* for planen. Dette er beskrevet nærmere i eNote 6 om "'Geometriske vektorer"'.

6.2 System af lineære ligninger

Et lineært ligningssystem bestående af m lineære ligninger med n ubekendte skrives på formen

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + \; a_{12} \cdot x_2 + \ldots + \; a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \; a_{22} \cdot x_2 + \ldots + \; a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \; . \end{aligned} \tag{6-11}$$

Ligningssystemet har m *rækker* med hver én ligning. De n ubekendte, som betegnes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, optræder i hver af de m ligninger, med mindre nogle led har koefficienten 0 og er udeladt. Koefficienten til x_j i ligningens række nummer i betegnes a_{ij}. Ligningssystemet kaldes *homogent*, hvis alle de m højresiders b_i er lig med 0; i modsat fald *inhomogent*.

|||| Definition 6.6 Løsning for et lineært ligningssystem

Ved en *løsning* til det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{c} a_{11} \cdot x_1 + \ a_{12} \cdot x_2 + \ldots + \ a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \ a_{22} \cdot x_2 + \ldots + \ a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \tag{6-12}$$

forstås et talsæt $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{L}^n$, der ved indsættelse får alle de m lineære ligninger i systemet til at passe — det vil sige, at venstresiden er lig højresiden i hver ligning.

Ved *den fuldstændige løsning* eller blot *løsningsmængden* forstås mængden af alle løsninger til ligningssystemet. En enkelt løsning betegnes ofte som en *partikulær løsning*.

|||| Eksempel 6.7 Homogent lineært ligningssystem

Der er givet et homogent lineært ligningssystem bestående af to ligninger med fire ubekendte:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 &= 0 \\ 2\,x_1 - x_2 - \quad x_3 + x_4 &= 0\,. \end{aligned} \tag{6-13}$$

Er talsættene $\mathbf{x} = (1,1,2,-6)$ og $\mathbf{y} = (3,0,1,-5)$ partikulære løsninger til ligningerne?

Ved indsættelse af $\mathbf{x}$ i systemets venstreside får vi

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 2 \cdot 2 - 6 &= 0 \\ 2 \cdot 1 - 1 - 2 - 6 &= -7\,. \end{aligned}$$

Da venstresiden kun i det første tilfælde er lig højresiden 0, er $\mathbf{x}$ kun en løsning til den første af de to ligninger. Derfor er $\mathbf{x}$ ikke en løsning til hele ligningssystemet.

Ved indsættelse af $\mathbf{y}$ får vi

$$\begin{aligned} 3 + 0 + 2 \cdot 1 - 5 &= 0 \\ 2 \cdot 3 - 0 - 1 - 5 &= 0\,. \end{aligned}$$

Da venstresiden i begge tilfælde er lig højresiden 0, er $\mathbf{y}$ en løsning til begge de to ligninger. Derfor er $\mathbf{y}$ en partikulær løsning til ligningssystemet.

Løsningsmængden til et lineært ligningssystem er *fællesmængden* af løsningsmængderne til hver af de ligninger, som indgår i systemet — dvs. kun de løsninger, ligningerne har til fælles.

6.3 Koefficientmatrix og totalmatrix

Når man skal undersøge et lineært ligningssystem, er det ofte bekvemt at benytte sig af *matricer*. En *matrix* er et rektangulært talskema, som består af et vist antal rækker og søjler. For eksempel har den matrix **M**, som er givet ved

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \tag{6-14}$$

to rækker og tre søjler. De seks tal kaldes matricens *elementer*. Matricens *diagonal* består af de elementer, hvis rækkenummer er lig med søjlenummer. I **M** består diagonalen således af elementerne 1 og 3.

Ved *koefficientmatricen* **A** til det lineære ligningssystem (6.2.11) forstås den matrix, hvis første række består af koefficienterne til den første ligning, hvis anden række består af koefficienterne til den anden ligning og så videre. Kort sagt den følgende matrix med m rækker og n søjler:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{6-15}$$

Ligningssystemets *totalmatrix* **T** fremkommer ved, at man i koefficientmatricens højre side tilføjer en ny søjle, som består af ligningssystemets højresider b_i. **T** har dermed m rækker og $n+1$ søjler, hvor n var antal ubekendte. Hvis vi samler højresiderne b_i i en søjlevektor **b**, som vi kalder *ligningssystemets højreside*, er **T** sammensat således, hvor den lodrette hjælpelinje symboliserer systemets lighedstegn:

$$\mathbf{T} = \left[\, \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{b} \,\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{6-16}$$

Den lodrette hjælpelinje før sidste søjle i (6.3.16) har blot den pædagogiske funktion at skabe klarere overblik. Man kan vælge at udelade linjen, hvis det i sammenhængen ikke kan føre til misforståelser.

|||| Eksempel 6.8 Koefficientmatrix, højresider og totalmatrix

For det lineære ligningssystem bestående af 3 ligninger med 3 ubekendte

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned} \tag{6-17}$$

har vi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right]. \tag{6-18}$$

Bemærk, at det 0, som er placeret øverst til venstre i **A** og **T**, angiver, at koefficienten til x_1 i ligningssystemets øverste række er 0.

Det smarte ved en koefficientmatrix (og en totalmatrix) er, at vi ikke behøver at skrive de ubekendte op. Koefficienternes entydige placering i matricen gør, at vi ikke er i tvivl om, hvilken af de ubekendte hver af dem hører til. Vi har fjernet overflødige symboler! En matrix er simpelthen en kompakt og simplere måde at opskrive mange ligninger på.

6.4 Reduktion af lineære ligningssystemer

Lineære ligningssystemer kan reduceres, det vil sige gøres enklere, ved hjælp af en metode, der kaldes *Gauss-elimination*. Metoden har flere forskellige varianter, og den særlige variant der, benyttes i disse eNoter, går under navnet *GaussJordan-elimination*. Det algebraiske grundlag for alle varianterne er, at man kan omforme et lineært ligningssystem ved såkaldte *rækkeoperationer*, uden at man derved ændrer på ligningssystemets løsningsmængde. Når ligningssystemet er reduceret mest muligt, er det som regel nemt at aflæse og opskrive dets løsningsmængde.

|||| Sætning 6.9 Rækkeoperationer

Man ændrer ikke på et lineært ligningssystems løsningsmængde hvis man omformer ligningssystemet ved en af de følgende tre rækkeoperationer:

ro_1: Lad to af ligningerne bytte række.

ro_2: Gang en af ligningerne med en konstant, som ikke er 0.

ro_3: Læg til en ligning en af de øvrige ligninger ganget med en konstant.

Vi fastlægger her en kort notation for hver af de tre rækkeoperationer:

ro_1: $R_i \leftrightarrow R_j$: Ligningen i række i ombyttes med ligningen i række j.

ro_2: $k \cdot R_i$: Ligningen i række i ganges med k.

ro_3: $R_j + k \cdot R_i$: Til ligningen i række j lægges ligningen i række i ganget med k.

I det følgende eksempel afprøver vi de tre rækkeoperationer.

|||| Eksempel 6.10 Rækkeoperationerne

Vi eksemplificerer $\mathbf{ro}_1$

Betragt ligningssystemet nedenfor til venstre. Vi bytter om på de to ligninger, hvorved vi har udført $R_1 \leftrightarrow R_2$,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= -3\,. \end{aligned} \tag{6-19}$$

Systemet til højre har samme løsningsmængde som systemet til venstre.

Vi eksemplificerer $\mathbf{ro}_2$

Betragt ligningssystemet nedenfor til venstre. Vi ganger ligningen i anden række med 5, hvorved vi har udført $5 \cdot R_2$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ 5\,x_1 + 5\,x_2 &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{6-20}$$

Systemet til højre har samme løsningsmængde som systemet til venstre.

Vi eksemplificerer $\mathbf{ro}_3$

Betragt ligningssystemet nedenfor til venstre. Til ligningen i anden række lægger vi ligningen i første række ganget med 2. Vi har dermed udført $R_2 + 2 \cdot R_1$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_1 + \;\; x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= -6\,. \end{aligned} \tag{6-21}$$

Systemet til højre har samme løsningsmængde som systemet til venstre.

Pilen $\rightarrow$, som er brugt i de tre eksempler, indikerer, at en (eller flere) rækkeoperation(er) har fundet sted.

|||| Bevis

Bevis for ro$_1$
Første del af beviset for sætning 6.9 er enkel. Da lsningsmængden for et ligningssystem er identisk med *fællesmngden* F af løsningsmængderne til hver af de ligninger, der indgår i systemet, ændres F naturligvis ikke ved, at ligningernes rækkefølge ændres. Derfor er ro$_1$ tilladt.

Bevis for ro$_2$
Da én lignings løsningsmængde ikke ændres, ved at den ganges med en konstant $k \neq 0$, vil F ikke kunne påvirkes af, at en af ligningerne i et ligningssystem erstattes af ligningen selv ganget med en konstant forskellig fra 0. Derfor er ro$_2$ tilladt.

Bevis for ro$_3$
Betragt endelig et lineært ligningssystem A med n ubekendte $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$. Venstresiden af en ligning i A opskriver vi som $L(\mathbf{x})$ og højresiden som b . Vi udfører nu en vilkårlig rækkeoperation af typen ro$_3$ på følgende måde: En vilkårlig ligning $L_1(\mathbf{x}) = b_1$ ganges med et vilkårligt tal k og lægges dernæst til en vilkårlig anden ligning $L_2(\mathbf{x}) = b_2$. Herved dannes en ny ligning $L_3(\mathbf{x}) = b_3$, hvor

$$L_3(\mathbf{x}) = L_2(\mathbf{x}) + k\,L_1(\mathbf{x}) \;\text{ og }\; b_3 = b_2 + k\,b_1\,.$$

Vi viser nu, at det ligningssystem B, som opstår, ved at $L_2(\mathbf{x}) = b_2$ i A erstattes af $L_3(\mathbf{x}) = b_3$, har samme løsningsmængde som A, og at ro$_3$ dermed er tilladt. Antag først, at $\mathbf{x}_0$ er en vilkårlig løsning til A . Så gælder ifølge omformningsregler for én ligning, at

$$k\,L_1(\mathbf{x}_0) = k\,b_1$$

og videre, at

$$L_2(\mathbf{x}_0) + k\,L_1(\mathbf{x}_0) = b_2 + k\,b_1\,.$$

Heraf følger, at $L_3(\mathbf{x}_0) = b_3$ og dermed, at $\mathbf{x}_0$ også er en løsning til B. Antag nu omvendt, at $\mathbf{x}_1$ er en vilkårlig løsning til B . Så følger på samme måde, at

$$-k\,L_1(\mathbf{x}_1) = -k\,b_1$$

og videre, at

$$L_3(\mathbf{x}_1) - k\,L_1(\mathbf{x}_1) = b_3 - k\,b_1\,.$$

Venstresiden svarer til $L_2(\mathbf{x}_1)$ og højresiden til b_2, så derfor er $L_2(\mathbf{x}_1) = b_2$, og $\mathbf{x}_1$ er også en løsning til A. Samlet er det som ønsket vist, at ro_3 er tilladt.

■

Af sætning 6.9 får vi umiddelbart:

|||| Følgesætning 6.11

Man ændrer ikke på et lineært ligningssystems løsningsmængde, hvis man omformer det et vilkårligt antal gange og i en vilkårlig rækkefølge ved hjælp af de tre rækkeoperationer.

Vi er nu rede til at benytte de tre rækkeoperationer til at reducere et lineært ligningssystem. Vi følger i det følgende eksempel principperne i *GaussJordan-elimination*, og vil senere i afsnit 6.5 give en præcis karakteristik af denne metode.

|||| Eksempel 6.12 GaussJordan-elimination

Vi betragter nedenfor til venstre et lineært ligningssystem, som består af tre ligninger, hvori der indgår de tre ubekendte x_1, x_2 og x_3. Til højre er ligningssystemets *totalmatrix* opskrevet:

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad \mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right]. \tag{6-22}$$

Ideen i reduktionen er gennem rækkeoperationerne at opnå følgende situation:

- x_1 skal være det eneste tilbageværende led på venstresiden af den øverste ligning,
- x_2 det eneste på venstresiden af den midterste ligning og
- x_3 det eneste på venstresiden af den nederste ligning.

Hvis dette er muligt, er ligningssystemet ikke blot reduceret men også løst!

Vi går herunder frem efter en række trin, som følger GaussJordan-algoritmen, mens vi samtidig ser på rækkeoperationernes indvirkning på totalmatricen.

For at opfylde ønsket, at x_1 er eneste led i første lignings venstreside, skal vi først og fremmest sørge for, at den øverste ligning, altså række et, i det hele taget *indeholder* x_1 og med koefficienten 1. Det kan vi i denne opgave opnå i to trin. Vi ombytter de to øverste ligninger (ved ro_1) og ganger derefter den ligning, som nu står i række et, med $\frac{1}{2}$ (ved ro_2). Kort sagt

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \text{og} \quad \frac{1}{2} \cdot R_1 \; :$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right]. \tag{6-23}$$

Nu fjerner vi alle andre forekomster af x_1. Der er her kun én forekomst, der skal fjernes, nemlig i række tre. Vi ganger derfor ligningen i række et med tallet -3 og lægger dette produkt til ligningen i række tre (ved re_3) — sagt på en anden måde, "‘*vi lægger række et til række tre* -3 *gange*"’, eller "‘*vi trækker række et fra række tre* 3 *gange*"’. Dvs.

$$R_3 - 3 \cdot R_1 \; :$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right]. \tag{6-24}$$

Husk, at brugen af ro_3 *kun* påvirker én række — i dette tilfælde påvirkes *kun* række 3, *ikke* række 1.

Vi har nu opnået, at x_1 kun optræder i række et. Der skal den blive! Arbejdet med x_1 er afsluttet, hvilket svarer til, at der øverst i totalmatricens første søjle er et 1-tal og under 1-tallet kun 0-er. Arbejdet med første søjle er færdiggjort!

De næste omformninger skal forsøge at sikre, at den ubekendte x_2 kun er repræsenteret i række to. Først sørger vi lige for, at x_2 i række to får koefficienten 1 fremfor -1, hvilket gøres med operationen ro_2

$$(-1) \cdot R_2 \; :$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= -2 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right]. \tag{6-25}$$

Nu kan vi fjerne forekomsterne af x_2 fra række et og række tre ved to gange at benytte ro$_3$

$$R_1 - 2 \cdot R_2 \quad \text{og} \quad R_3 + 2 \cdot R_2 :$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &= -2 \\ 2x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]. \tag{6-26}$$

Herefter er arbejdet med x_2 afsluttet, hvilket svarer til, at der i række to i totalmatricens anden søjle er et 1-tal med 0 ovenfor og nedenunder. Ligesom med den første søjle vil vi undgå at ændre på denne søjle to senere rækkeoperationer.

Til sidst ønsker vi, at den ubekendte x_3 er repræsenteret alene i række tre med koefficienten 1, hvorfor x_3 skal fjernes fra række et og række to. Det kan vi opnå i to trin. Først fås korrekt koefficient (ved ro$_2$)

$$\frac{1}{2} \cdot R_3 :$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 5 \\ x_2 - x_3 &= -2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]. \tag{6-27}$$

Derefter ro$_3$ to gange

$$R_1 - R_3 \quad \text{og} \quad R_2 + R_3 :$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]. \tag{6-28}$$

Nu optræder x_3 kun i række tre. Det svarer til, at der i række tre i totalmatricens tredje søjle er et 1-tal, mens der er rene 0-er i resten af denne søjle. Vi har nu gennemført en *fuldstændig reduktion* af ligningssystemet og kan konkludere, at der findes netop én løsning til det ligningssystem, vi har arbejdet med, nemlig

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (4, -1, 1). \tag{6-29}$$

Lad os huske på, hvad en løsning er: Det er et talsæt, der får alle ligningerne i ligningssystemet til at passe! Lad os derfor eftervise, at (6.4.29) faktisk er en løsning til ligningssystemet (6.4.22):

$$
\begin{aligned}
-(-1)+1 &= 2 \\
2\cdot 4+4\cdot(-1)-2\cdot 1 &= 2 \\
3\cdot 4+4\cdot(-1)+1 &= 9\,.
\end{aligned}
$$

Som forventet passer alle tre ligninger!

I (6-28) har ligningssystemets totalmatrix efter rækkeoperationerne opnået en særlig smuk form med tre såkaldt *ledende* 1-taller i diagonalen og 0-er alle andre steder. Man siger, at den omformede matrix er en *trappematrix*, idet de ledende 1-taller danner en "'trappe"', man kan gå ned ad fra venstre mod højre! Det er dog ikke altid muligt at få trappens 1-taller til at følge en ret linje, men mindre kan også gøre det! Ofte må man flytte sig mere end én søjle mod højre for at finde næste trin. Den generelle lidt kringlede definition følger herunder.

|||| Definition 6.13 Trappematrix

Et lineært ligningssystem kaldes et *fuldstændigt reduceret* ligningssystem, hvis dets tilhørende totalmatrix er en *trappematrix*. En matrix er en trappematrix, hvis den opfylder de følgende fire betingelser:

1. Det første tal i en række, som ikke er et 0, skal være et 1-tal. Det kaldes for rækkens *ledende* 1-tal.
2. I to på hinanden følgende rækker, som begge har et ledende 1-tal, står den øverste rækkes ledende 1-tal længere til venstre end den følgende rækkes ledende 1-tal (trappen går nedad fra venstre mod højre).
3. I en søjle, hvori der optræder et ledende 1-tal, består de øvrige elementer i søjlen udelukkende af 0-er.
4. Eventuelle rækker, som udelukkende består af 0-er, er placeret i bunden af matricen.

Definitionen på en trappematrix fra definition 6.13 betegnes i den internationale litteratur som matricens *reduced row echelon form*.

|||| Eksempel 6.14 Trappematricer

Betragt de følgende tre matricer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6-30}$$

De tre viste matricer er alle trappematricer. De ledende 1-taller (markeret med **fed**) betragtes som trappens "‘trin"’. I **A** er trinene smukt placeret i *diagonalen*. **B** har kun to ledende 1-taller, og man må gå to søjler mod højre for at komme fra første til andet trin. I **C** har trappen kun ét trin.

|||| Eksempel 6.15

Ingen af de følgende fire matricer er trappematricer, idet hver af dem strider mod netop én af reglerne i definition 6.13. Det overlades til læseren at afgøre hvilken!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6-31}$$

Der gælder nu følgende vigtige sætning om forholdet mellem en matrix og den trappematrix, som den kan omformes til ved hjælp af rækkeoperationer.

|||| Sætning 6.16 Trappeform

Hvis en given matrix **M** ved to forskellige serier af rækkeoperationer kan omformes til trappematricer, så er disse to fremkomne trappematricer identiske.

Den unikke trappematrix, som en given matrix **M** kan omformes til ved hjælp af rækkeoperationer, kaldes matricens *trappeform* og har symbolet $\text{trap}(\mathbf{M})$.

|||| Bevis

Vi benytter følgende model for de seks matricer, som introduceres i løbet af beviset:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \xleftarrow{f_1} & \mathbf{M} & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{B} \\ & & \downarrow & & \\ \mathbf{A}_1 & \xleftarrow{f_1} & \mathbf{M}_1 & \xrightarrow{f_2} & \mathbf{B}_1 \end{array} \tag{6-32}$$

Antag, at en matrix $\mathbf{M}$ ved to forskellige serier af rækkeoperationer f_1 og f_2 er blevet omformet til to forskellige trappematricer $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$. Lad søjle nummer k være den første søjle i $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$, hvor de to matricer afviger fra hinanden. Vi danner nu en ny matrix $\mathbf{M}_1$ ud fra $\mathbf{M}$ på følgende måde. Først fjerner vi alle de søjler i $\mathbf{M}$, hvis søjlenummer er større end k . Dernæst fjerner vi netop de søjler i $\mathbf{M}$, hvis søjlenummer er mindre end k , og som har samme søjlenummer som en søjle i $\mathbf{A}$ (og dermed $\mathbf{B}$, da søjlerne i $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er ens før søjle k), der ikke indeholder et ledende 1-tal.

Nu omformer vi $\mathbf{M}_1$ ved rækkeoperationsfølgerne f_1 og f_2, og de matricer, der dannes herved, kalder vi for $\mathbf{A}_1$ henholdsvis $\mathbf{B}_1$. Da vil $\mathbf{A}_1$ nødvendigvis være den samme matrix, som vil fremkomme, hvis vi fra $\mathbf{A}$ fjerner alle de søjler, der svarer til dem, vi fjernede fra $\mathbf{M}$ for at opnå $\mathbf{M}_1$. Og det samme forhold er der mellem $\mathbf{B}_1$ og $\mathbf{B}$. $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{B}_1$ vil derfor have ledende 1-taller i diagonalen i alle søjler pånær den sidste, da den sidste søjle er den første, hvor de to matricer er forskellige fra hinanden. I denne sidste søjle er der to muligheder: Enten har én af matricerne et ledende 1-tal eller også har ingen af dem det. Et eksempel på, hvordan situationen i det første tilfælde kunne være, er:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6-33}$$

Vi fortolker nu $\mathbf{M}_1$ som totalmatrix for et lineært ligningssystem $\mathcal{L}$ (dvs., at den tredje søjle i $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{B}_1$ er højresiden). Både $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{B}_1$ vil da repræsentere et fuldstændigt reduceret ligningssystem, der skal have samme løsningsmængde som $\mathcal{L}$. Men dette fører til en modstrid, da det ene, $\mathbf{A}_1$, af de fuldstændigt reducerede systemer indeholder en inkonsistent ligning, mens det andet, $\mathbf{B}_1$, vil have netop én løsning. Vi kan derfor udelukke, at én af $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{B}_1$ indeholder et ledende 1-tal i sidste søjle.

Vi undersøger nu den anden mulighed: at ingen af $\mathbf{A}_1$ og $\mathbf{B}_1$ indeholder et ledende 1-tal i sidste søjle. Situationen kunne da fx være således:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6-34}$$

Både det fuldstændigt reducerede ligningssystem, som repræsenteres af $\mathbf{A}_1$, og det, der repræsenteres af $\mathbf{B}_1$, vil i dette tilfælde have netop én løsning. Men da den sidste søjle er forskellig i de to matricer, vil løsningen for $\mathbf{A}_1$'s ligningssystem være forskellig fra løsningen for $\mathbf{B}_1$'s ligningssystem, hvorved vi igen er havnet i en modstrid.

Vi kan herefter konkludere, at antagelsen om at $\mathbf{M}$ kan omformes til to forskellige trappematricer, ikke kan være rigtig. Ergo hører der til $\mathbf{M}$ en unik trappematrix: trap($\mathbf{M}$).

■

Fra sætning 6.16 får vi relativt nemt det næste resultat om matricer, som ved hjælp af rækkeoperationer kan omformes til hinanden:

|||| Følgesætning 6.17

Hvis en matrix $\mathbf{M}$ ved en vilkårlig serie af rækkeoperationer er blevet omformet til matricen $\mathbf{N}$, så gælder der, at

$$\operatorname{trap}(\mathbf{N}) = \operatorname{trap}(\mathbf{M}). \tag{6-35}$$

|||| Bevis

Lad s være en serie af rækkeoperationer, der omformer matricen $\mathbf{M}$ til matricen $\mathbf{N}$, og lad t være en serie af rækkeoperationer, der omformer $\mathbf{N}$ til $\operatorname{trap}(\mathbf{N})$. Så vil den serie rækkeoperationer, der består af s efterfulgt af t, omforme $\mathbf{M}$ til $\operatorname{trap}(\mathbf{N})$. Men da $\mathbf{M}$ ifølge sætning 6.16 har en unik trappeform, må $\operatorname{trap}(\mathbf{M})$ være lig med $\operatorname{trap}(\mathbf{N})$.

■

Hvis vi i den foregående følgesætning opfatter $\mathbf{M}$ og $\mathbf{N}$ som totalmatricer for to lineære ligningssystemer, så følger umiddelbart af definition (6.13):

|||| Følgesætning 6.18

Hvis to lineære ligningssystemer kan omformes til hinanden ved hjælp af rækkeoperationer, så er de på fuldstændigt reduceret form (efter udeladelse af eventuelle trivielle ligninger) identiske.

6.5 GaussJordan-elimination

Vi er nu i stand til præcist at indføre den eliminationsmetode, der benyttes i disse eNoter.

|||| Definition 6.19 GaussJordan-elimination

Et lineært ligningssystem er reduceret fuldstændigt ved *GaussJordan-elimination*, når dets tilhørende totalmatrix efter brug af de tre rækkeoperationer (se sætning 6.9) er bragt p trappeform (se sætning 6.16) efter følgende fremgangsmåde:

> Vi går frem fra venstre mod højre: Først ordnes totalmatricens første søjle, så den ikke strider mod trappeformen. Dernæst ordnes den anden søjle, så den ikke strider mod trappeformen og så videre indtil og med den sidste søjle i totalmatricen.

Dette er altid muligt!

> Når man skal reducere lineære ligningssystemer, er man fri til at afvige fra GaussJordan-metoden, hvis det i situationen skønnes nemmere. Hvis man ved andre følger af rækkeoperationer har nået fuldstændigt reduceret form (trappeform), er det jo den samme form, som man ville have opnået ved strikst at have fulgt GaussJordan-metoden. Dette fremgår af følgesætning 6.18.

I eksempel 6.12 var det muligt direkte at aflse lsningen ud fra det fuldstndigt reducerede linere ligningssystem. I det efterflgende hovedeksempel er situationen lidt mere kompliceret, hvilket hænger sammen med, at ligningssystemet har *uendeligt* mange løsninger.

|||| Eksempel 6.20 GaussJordan-elimination

Reducer dette system af fire lineære ligninger med fem ubekendte:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 9 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 3 \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 6x_5 &= 5 \\ 4x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 22x_5 &= 32\,. \end{aligned} \tag{6-36}$$

Vi opskriver ligningssystemets totalmatrix,

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 14 & 8 & 10 & 22 & 32 \end{array}\right]. \tag{6-37}$$

I det følgende reducerer vi ligningssystemet ved hjælp af de tre rækkeoperationer.

I det følgende viser vi kun omformningen ved ligningssystemets totalmatrix og undlader at vise selve ligningssystemet. Først til sidst skriver vi igen ligningssystemet op på fuldstændig reduceret form.

$$R_2 - 2\cdot R_1\,, \quad R_3 - 3\cdot R_1 \quad \text{og} \quad R_4 - 4\cdot R_1:$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -9 & -22 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 2 & -4 \end{array}\right]. \tag{6-38}$$

Herefter er vi færdige med behandlingen af første søjle, da vi har et ledende 1-tal i første række og lutter 0-er på de andre pladser i søjlen.

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \text{og} \quad (-1)\cdot R_2:$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 2 & -4 \end{array}\right]. \tag{6-39}$$

$$R_1 - 3\cdot R_2 \quad \text{og} \quad R_4 - 2\cdot R_2:$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -11 & -22 & -57 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -16 & -48 \end{array}\right]. \tag{6-40}$$

Arbejdet med anden søjle er nu afsluttet.

Herefter følger en afvigelse fra det, vi så i det forrige eksempel, hvor vi skaffede 1-taller i diagonalen. Det er nemlig ikke muligt at skaffe et ledende 1-tal som tredje element i den tredje række. Vi kan *ikke* bytte række et og række tre, for så ændrer vi jo den første søjle, som er færdigbehandlet. Dermed er vi også færdige med søjle tre (2-tallet i øverste række kan ikke fjernes). For at fortsætte reduktionen går vi videre til det fjerde element i række tre, hvor det *er* muligt at skaffe et ledende 1-tal.

$$-\tfrac{1}{5}\cdot R_3:$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -11 & -22 & -57 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -16 & -48 \end{array}\right]. \tag{6-41}$$

$$R_1 + 11\cdot R_3\,,\quad R_2 - 5\cdot R_3 \quad \text{og} \quad R_4 + 16\cdot R_3:$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -11 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{6-42}$$

Herefter er GaussJordan-eliminationen afsluttet. og vi kan opskrive det fuldstændigt reducerede ligningssystem:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 - 11x_5 &= -24 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 4x_5 &= 7 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 &= 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 0\,. \end{aligned} \tag{6-43}$$

I første omgang kan vi konstatere, at det oprindelige ligningssystem faktisk *er* blevet reduceret (gjort mere enkelt) ved, at mange af ligningssystemets koefficienter er udskiftet med 0-er.

Men derudover kan systemet med fire ligninger nu erstattes af et system bestående af 3. Den sidste række er nemlig en *triviel* ligning, der har hele $\mathbb{L}^5$ som sin løsningsmængde. Det ændrer derfor ikke på ligningssystemets løsningsmængde, at den sidste ligning udelades af det reducerede system (idet fællesmængden af løsningsmængderne for hver af de fire ligninger er lig med fællesmængderne af løsningsmængderne for de første tre). Helt enkelt kan vi derfor opskrive det fuldstændigt reducerede ligningssystem således:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - 11x_5 &= -24 \\ x_2 + 4x_5 &= 7 \\ x_4 + x_5 &= 3\,. \end{aligned} \tag{6-44}$$

Hermed er ligningssystemet reduceret mest muligt, og opgaven er løst.

Men hvordan kommer vi videre fra det reducerede ligningssystem til at indse, hvad løsningsmængden er, og til at kunne angive den på en overskuelig form? Vi fortsætter ovenstående eksempel senere (i eksempel 6.30) for at tilføje denne løsning. Men først har vi brug for at indføre begrebet *rang*.

6.6 Begrebet rang

I eksempel 6.20 er et lineært ligningssystem bestående af 4 ligninger med 5 ubekendte blevet reduceret fuldstændigt til (6.5.44). Der resterer her kun 3 ligninger, idet den trivielle ligning $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$ er udeladt, da den blot udtrykker, at $0 = 0$. At et reduceret lineært ligningssystem indeholder en triviel ligning, er ensbetydende med, at trappeformen af dens totalmatrix indeholder en 0-*række* som i (6.5.42). Dette giver anledning til de følgende definitioner.

|||| Definition 6.21 Rang

Ved *rangen* ρ af en matrix forstås antallet af rækker i matricens trappeform, som ikke er 0-rækker. Rangen svarer dermed til antallet af ledende 1-taller i matricens trappeform.

Af definition 6.21 og følgesætning 6.18 samt følgesætning 6.17 får vi direkte:

|||| Sætning 6.22 Rang og rækkeoperationer

To matricer, som kan omformes til hinanden ved hjælp af rækkeoperationer, har samme rang.

Rangen angiver det mindst mulige antal ikke-trivielle ligninger, som et ligningssystem kan omformes til ved hjælp af rækkeoperationer. Man kan altså aldrig med rækkeoperationer omforme et lineært ligningssystem, så det indeholder færre ikke-trivielle ligninger, end det gør, når det er fuldstændigt reduceret. Dette er en konsekvens af sætning 6.22.

|||| Eksempel 6.23 Matricers rang

En matrix $\mathbf{M}$ med 3 rækker og 4 søjler er bragt på trappeform således:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 & -2 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \operatorname{trap}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6-45}$$

Da $\operatorname{trap}(\mathbf{M})$ ikke indeholder 0-rækker, er $\rho(\mathbf{M}) = 3$.

En matrix $\mathbf{N}$ med 5 rækker og 3 søjler er bragt på trappeform således:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \operatorname{trap}(\mathbf{N}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6-46}$$

Da $\operatorname{trap}(\mathbf{N})$ indeholder tre rækker, som ikke er 0-rækker, er $\rho(\mathbf{N}) = 3$.

Hvis vi fortolker $\mathbf{M}$ og $\mathbf{N}$ som totalmatricer for lineære ligningssystemer (hvor sidste søjle da vil være højresiden), ser vi i begge tilfælde, at rangen af de tilsvarende koefficientmatricer er 2, altså mindre end rangen af totalmatricerne.

Vi vil nu undersøge relationen mellem rang og antallet af rækker og søjler. Først bemærker vi, at det direkte af definition 6.21 følger, at rangen af en matrix aldrig kan være større end antallet af matricens rækker.

I eksempel 6.23 er rangen af $\mathbf{M}$ lig med antallet af rækker i $\mathbf{M}$, mens rangen af $\mathbf{N}$ er mindre end antallet af rækker i $\mathbf{N}$.

Men rangen af en matrix kan heller ikke være større end antallet af søjler. Rangen er jo lig med antallet af ledende 1-taller i matricens trappeform, og hvis trappeformen af matricen indeholder flere ledende 1-taller, end der er søjler, så må der være mindst én søjle, der indeholder mere end ét ledende 1-tal. Men dette strider mod betingelse nr. 3 i definition 6.13.

I eksempel 6.23 er rangen af $\mathbf{M}$ mindre end antallet af søjler i $\mathbf{M}$, mens rangen $\mathbf{N}$ er lig med antallet af søjler i $\mathbf{N}$.

Vi opsummerer de ovenstående iagttagelser i følgende sætning:

|||| **Sætning 6.24 Rang, rækker og søjler**

For en matrix $\mathbf{M}$ med m rækker og n søjler gælder der, at

$$\rho(\mathbf{M}) \leq \min\{m, n\}\,. \tag{6-47}$$

6.7 Fra trappeform til løsningsmængde

I visse tilfælde kan man umiddelbart aflæse løsningsmængden for et lineært ligningssystem, når dets totalmatrix er bragt på trappeform. Det gælder, når ligningssystemet ingen løsninger har, eller når det har netop én løsning. Hvis ligningssystemet har *uendeligt* mange løsninger, er der stadig et arbejde, der skal gøres, før man klart kan karakterisere løsningsmængden. En klart karakteriseret løsningsmængde kan med fordel opnås ved at bringe den på standard-parameterform.

Begrebet rang viser sig velegnet til at give et overblik over forskellige former for løsningsmængder. De næste tre underafsnit beskriver de tre særlige situationer.

6.7.1 Når $\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{T})$

Totalmatricen $\mathbf{T}$ for et lineært ligningssystem har det samme antal rækker som ligningssystemets koefficientmatrix $\mathbf{A}$, men den har én ekstra søjle, som indeholder ligningernes højresider. Der foreligger derfor to muligheder. Enten har vi $\rho(\mathbf{T}) = \rho(\mathbf{A})$, eller også er $\rho(\mathbf{T}) = \rho(\mathbf{A}) + 1$, dvs. $\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{T})$, hvilket svarer til, at sidste søjle i $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ indeholder et ledende 1-tal. Konsekvensen af den sidste mulighed undersøges i eksempel 6.25.

|||| **Eksempel 6.25 Inkonsistent ligning (ingen løsning)**

Totalmatricen $\mathbf{T}$ for et lineært ligningssystem bestående af tre ligninger med to ubekendte er bragt på trappeformen

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{6-48}$$

Ligningssystemet er altså blevet reduceret til

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{6-49}$$

Bemærk her, at ligningen i anden række er *inkonsistent* (svarer til $0 = 1$), og at den derfor ingen løsninger har. Da ligningssystemets løsningsmængde er fællesmængden af de enkelte ligningers løsningsmængder, har ligningssystemet ingen løsninger overhovedet.

Lad os betragte trappeformen af ligningssystemets koefficientmatrix $\mathbf{A}$ ved at se bort fra højresiden,

$$\operatorname{trap}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6-50}$$

Vi bemærker, at $\rho(\mathbf{A}) = 1$. Rangen af $\mathbf{A}$ er altså mindre end rangen af $\mathbf{T}$, da $\rho(\mathbf{T}) = 2$. Dette skyldes lige præcis det reducerede ligningssystems inkonsistente ligning. Derfor er situationen $\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{T})$ et signal om, at ligningssystemet indeholder inkonsistente ligninger.

Overvejelserne i eksempel 6.25 kan generaliseres til følgende sætning.

|||| Sætning 6.26 Når $\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{T})$

Hvis det for et lineært ligningssystems koefficientmatrix $\mathbf{A}$ og totalmatrix $\mathbf{T}$ gælder, at

$$\rho(\mathbf{A}) < \rho(\mathbf{T})\,, \tag{6-51}$$

så indeholder det fuldstændigt reducerede ligningssystem en inkonsistent ligning. Ligningssystemet har derfor ingen løsninger.

Hvis $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ har en række af formen $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$, så har ligningssystemet ingen løsninger.

|||| Opgave 6.27

Bestem trappeformen af totalmatricen for det følgende lineære ligningssystem, og bestem ligningssystemets løsningsmængde:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 3\,. \end{aligned} \tag{6-52}$$

6.7.2 Når $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) =$ antal ubekendte

Lad os kalde antallet af ubekendte i et givet lineært ligningssystem for n. Så må der ud fra den måde, hvorpå koefficientmatricer dannes, være n søjler i en koefficientmatrix $\mathbf{A}$.

Vi antager endvidere, at der i et givent eksempel gælder $\rho(\mathbf{A}) = n$. I så fald indeholder $\text{trap}(\mathbf{A})$ præcis n ledende 1-taller. De ledende 1-taller må derfor være placeret i *diagonalen* i $\text{trap}(\mathbf{A})$, og der er lutter 0-er på de øvrige pladser.

Endelig antager vi, at der i det givne eksempel også gælder, at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T})$. Så kan løsningsmængden umiddelbart aflæses af $\text{trap}(\mathbf{T})$. Den første række i $\text{trap}(\mathbf{T})$ vil nemlig svare til en ligning hvor den første ubekendte har koefficienten 1, mens alle de andre har koefficienten 0. Den første ubekendtes værdi er derfor lig med det sidste element i første række (højresiden). Samme gælder med de øvrige rækker, så den i-te række svarer til en ligning, hvor den i-te ubekendte er den *eneste* ubekendte, så dens værdi er lig med det sidste element i den i-te række. Da der i så fald til hver ubekendt svarer én bestemt værdi, og da $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T})$ sikrer, at det fuldstændigt reducerede ligningssystem ingen inkonsistente ligninger indeholder, så har det givne ligningssystem netop én løsning.

|||| Eksempel 6.28 Netop én løsning

Totalmatricen for et lineært ligningssystem bestående af tre ligninger med to ubekendte er bragt på trappeformen

$$\text{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{6-53}$$

Vi betragter trappeformen af ligningssystemets koefficientmatrix

$$\operatorname{trap}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6-54}$$

som har et ledende 1-tal i hver søjle og 0-er på alle andre pladser. Vi bemærker endvidere, at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = 2$.

Ud fra $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ kan vi opskrive det fuldstændigt reducerede ligningssystem

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 &= -3 \\ 0x_1 + 1x_2 &= 5 \\ 0x_1 + 0x_2 &= 0\,, \end{aligned} \tag{6-55}$$

hvilket viser, at ligningssystemet har én løsning, nemlig $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (-3, 5)$.

Generelt kan man vise følgende sætning:

|||| Sætning 6.29 Når $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) =$ antal ubekendte

Hvis der for et lineært ligningssystems koefficientmatrix $\mathbf{A}$ og totalmatrix $\mathbf{T}$ gælder, at

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = \text{antal ubekendte}, \tag{6-56}$$

så har ligningssystemet netop én løsning, som umiddelbart kan aflæses af $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$.

6.7.3 Når $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) <$ antal ubekendte

Vi er nu rede til at genoptage diskussionen af vores hovedeksempel 6.20 om et lineært ligningssystem med 5 ubekendte, hvor vi fandt frem til, at det fuldstændigt reducerede ligningssystem består af 3 ikke-trivielle ligninger. Lad os nu finde løsningsmængden og undersøge dens struktur.

|||| Eksempel 6.30 Uendeligt mange løsninger

I eksempel 6.20 blev totalmatricen $\mathbf{T}$ for et lineært ligningssystem bestående af 4 ligninger med 5 ubekendte reduceret til

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & -11 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{6-57}$$

Det ses heraf, at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = 3$, det vil sige mindre end 5, som er antallet af ubekendte.

Ud fra $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ opskriver vi det fuldstændigt reducerede ligningssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - 11x_5 &= -24 \\ x_2 + 4x_5 &= 7 \\ x_4 + x_5 &= 3\,. \end{aligned} \tag{6-58}$$

Ligningssystemet har uendeligt mange løsninger. Til ethvert valg af talværdier for x_3 og x_5 kan man finde netop én ny værdi af de øvrige ubekendte x_1, x_2 og x_4. Det kan vi tydeliggøre ved at isolere x_1, x_2 og x_4:

$$\begin{aligned} x_1 &= -24 - 2x_3 + 11x_5 \\ x_2 &= 7 - 4x_5 \\ x_4 &= 3 - x_5\,. \end{aligned} \tag{6-59}$$

Hvis vi for eksempel vælger $x_3 = 1$ og $x_5 = 2$, kan vi se, at ligningssystemet har løsningen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-4, -1, 1, 1, 2)$. Vi kan derfor betragte x_3 og x_5 som *frie parametre*, der fastlægger betydningen af de tre øvrige ubekendte, og omdøber derfor på højresiden x_3 og x_5 til parameternavnene t_1 henholdsvis t_2. Herefter kan vi opskrive løsningsmængden således:

$$\begin{aligned} x_1 &= -24 - 2t_1 + 11t_2 \\ x_2 &= 7 - 4t_2 \\ x_3 &= t_1 \\ x_4 &= 3 - t_2 \\ x_5 &= t_2\,, \end{aligned} \tag{6-60}$$

eller mere overskueligt på *standard-parameterform*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{L}\,. \tag{6-61}$$

Med et geometrisk inspireret sprogbrug vil vi kalde vektoren $(-24, 7, 0, 3, 0)$ for løsningsmængdens *begyndelsespunkt* og de to vektorer $(-2, 0, 1, 0, 0)$ og $(11, -4, 0, -1, 1)$ for dens *retningsvektorer*. Hvis vi kalder begyndelsespunktet for $\mathbf{x}_0$ og retningsvektorerne for $\mathbf{v}_1$ henholdsvis $\mathbf{v}_2$, kan vi opskrive parameterfremstillingen således:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \quad \text{hvor} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{L}\,. \tag{6-62}$$

Da løsningsmængden har to frie parametre svarende til to retningsvektorer, siger man, at den har en *dobbelt-uendelighed* af løsninger.

Linje 3 og 5 i (6.7.61) udtrykker blot at $x_3 = t_1$ og $x_5 = t_2$.

Lad os, inspireret af eksempel 6.30, formulere en generel fremgangsmåde til at bringe løsningsmængden på standard-parameterform ud fra det fuldstændigt reducerede ligningssystem:

|||| Metode 6.31 Fra totalmatrix til løsning på standard-parameterform

Vi betragter et lineært ligningssystem med n ubekendte, som har koefficientmatricen $\mathbf{A}$ og totalmatricen $\mathbf{T}$. Det forudsættes desuden, at

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = k < n\,. \tag{6-63}$$

Ligningssystemets løsningsmængde bringes på standard-parameterform således:

1. Vi finder $\operatorname{trap}(\mathbf{T})$ og opskriver herudfra det fuldstændigt reducerede ligningssystem (som gjort i (6.7.58)).

2. I hver af de k ikke-trivielle ligninger i det fuldstændigt reducerede ligningssystem isolerer vi den *førststående* ubekendte på venstresiden (som gjort i (6.7.59)).

3. Vi har hermed isoleret i alt k forskellige ubekendte på venstresiden af det samlede system. De øvrige $n-k$ ubekendte, som nu findes på højresiden, *omdøbes* til parameternavnene $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$.

4. Nu kan vi opskrive løsningsmængden på *standard-parameterform*:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{x}_0 + t_1\,\mathbf{v}_1 + t_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + t_{n-k}\,\mathbf{v}_{n-k}\,, \tag{6-64}$$

   hvor vektoren $\mathbf{x}_0$ angiver parameterfremstillingens *begyndelsespunkt*, mens $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-k}$ er dens *retningsvektorer* (som gjort i (6.7.61)).

Bemærk, at tallene $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$ kan vælges frit. Uanset valg vil (6.7.64) vre en gyldig lsning. De kaldes derfor for *frie parametre*.

Hvis man har fulgt GaussJordan-eliminationens algoritme til punkt og prikke, når man frem til et bestemt begyndelsespunkt og et bestemt sæt af retningsvektorer for løsningsmængden, se (6.7.64). Men løsningsmngden kan opskrives med et andet valg af begyndelsespunkt (hvis ligningssystemet er inhomogent) og med et andet valg af retningsvektorer (fx er kortere og længere vektorer stadig retningsvektorer, da retningen ikke ændres). Dog vil retningsvektorernes *antal* altid være $(n-k)$.

Bemærk, at der findes eksempler på løsningsmængder, hvor der ganske vist er uendeligt mange løsninger , da der er frie parametre til stede, men hvor en eller flere af de ubekendte alligevel har fastlåste værdier, dvs. at de *ikke* afhænger af denne frie parameter. I det følgende eksempel har den frie parameter kun betydning for én af de ubekendte. De to andre er fastlåste.

|||| Eksempel 6.32 Uendeligt mange løsninger med en fri parameter

For et givet lineært ligningssystem har man fundet, at

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]. \tag{6-65}$$

Vi konstaterer, at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = 2 < n = 3$. Der er derfor én fri parameter. Løsningsmængden opskrives:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6-66}$$

hvor t er en skalar, der kan vælges frit. Som det ses, afhænger x_1 og x_3 ikke af den frie parameter men har faste værdier.

Generelt kan man vise følgende sætning:

|||| Sætning 6.33 Når $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) <$ antal ubekendte

Hvis det for et lineært ligningssystem med n ubekendte og med koefficientmatrix $\mathbf{A}$ og totalmatrix $\mathbf{T}$ gælder, at

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T}) = k < n\,, \tag{6-67}$$

så har ligningssystemet uendeligt mange løsninger, som kan opskrives på standard-parameterform med begyndelsespunkt og $n - k$ retningsvektorer.

6.8 Om antallet af løsninger

Vi har tidligere understreget, at løsningsmængden for et ligningssystem er *fællesmængden* af løsningsmængderne for hver af de ligninger, der indgår i systemet. Lad os betragte et system bestående af tre lineære ligninger med to ubekendte:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y &= c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y &= c_2 \\ a_3 \cdot x + b_3 \cdot y &= c_3 \,. \end{aligned} \tag{6-68}$$

Ligningssystemet svarer til ligninger for tre rette linjer i et koordinatsystem i planen. *Løsningsmængden* for ligningssystemet svarer så til mængden af de punkter, som er *fælles* for alle de tre linjer. For at besvare spørgsmålet om "'antallet"' af løsninger, tegner vi de væsensforskellige situationer, der findes, i figur 6.1. I situation 2 er to af linjerne par-

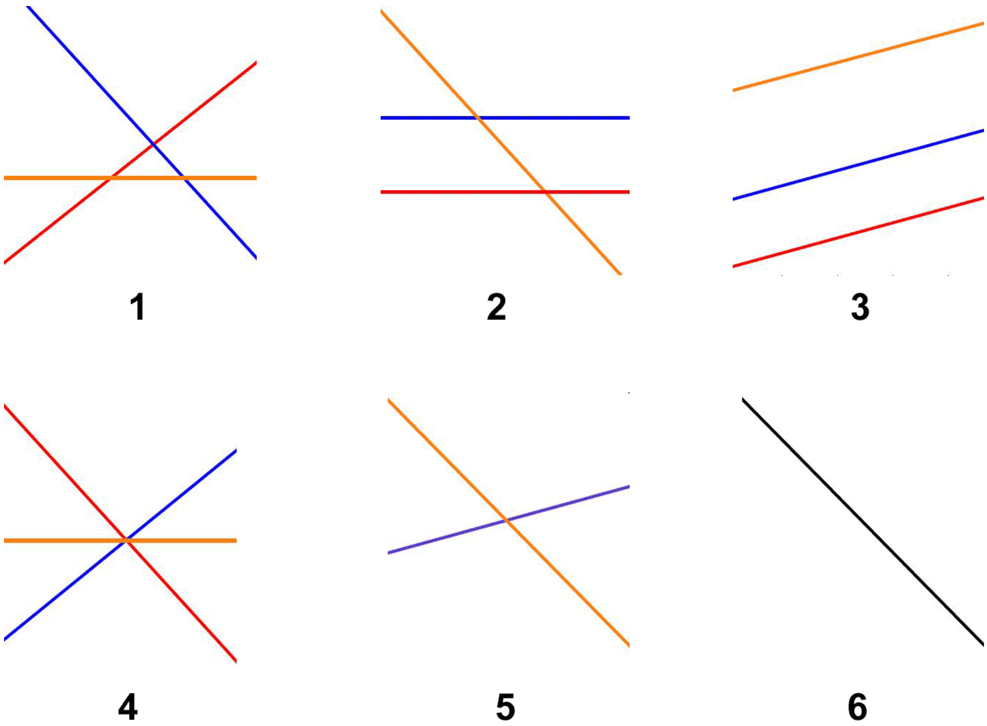

Figure 6.1: De seks mulige løsningsstrukturer for tre ligninger med to ubekendte

allelle, og i situation 3 er alle tre linjer parallelle. Der er derfor ingen fælles punkter for alle de tre linjer i situationerne 1, 2 og 3. I situation 5 er to af linjerne (blå og rød) sammenfaldende. Der er derfor netop ét fælles punkt i situationerne 4 og 5. I situation 6 er alle tre linjer sammenfaldende. Der er derfor i denne situation uendeligt mange fællespunkter.

Dette eksempel med tre ligninger med to ubekendte illustrerer den følgende sætning, som følger af vores studium af løsningsmængder i det foregående afsnit, se sætningerne 6.26, 6.29 og 6.33:

|||| Sætning 6.34 Bemærkning om antal løsninger

Et lineært ligningssystem har enten *ingen*, *én* eller *uendeligt* mange løsninger. Andre muligheder findes ikke.

6.9 Løsningsmængders lineære struktur

I dette afsnit vil vi gå lidt dybere ned i spørgsmålet om *strukturen* af løsningsmængder for lineære ligningssystemer. Det er i særlig grad vigtigt at bemærke sammenhængen mellem løsningsmængden for et inhomogent lineært ligningssystem og løsningsmængden for *det tilsvarende homogene lineære ligningssystem*. Vi starter med at undersøge homogene lineære ligningssystemer.

6.9.1 Homogene lineære ligningssystemers egenskaber

Et homogent lineært ligningssystem af m lineære ligninger med n ubekendte skrives på formen

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n &= 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n &= 0\,. \end{aligned} \tag{6-69}$$

I den følgende sætning beskriver vi en vigtig egenskab ved strukturen af løsningsmængden for homogene lineære ligningssystemer.

|||| Sætning 6.35 Løsninger til homogent lineært ligningssystem

Lad L_{hom} betegne løsningsmængden for et homogent lineært ligningssystem. Så findes der mindst én løsning til systemet. Hvis $L_{hom} \neq 0$, og

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{6-70}$$

er to vilkårlige løsninger, og k er en vilkårlig skalar, så vil både summen

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \tag{6-71}$$

og produktet

$$k \cdot \mathbf{x} = (k \cdot x_1, k \cdot x_2, \ldots, k \cdot x_n) \tag{6-72}$$

tilhøre L_{hom}.

|||| Bevis

En oplagt egenskab ved systemet (6.9.69) er, at $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{T})$ (fordi højresiderne er lutter nuller). Systemet har derfor mindst én løsning — det følger af sætning 6.29. Vi kan ogås straks finde en løsning, nemlig nulvektoren $\mathbf{0} \in \mathbb{L}^n$. At den er en løsning fremågr jo af, at når vi erstatter alle de n ubekendte i systemet med tallet 0, s består systemet af m ligninger af formen $0 = 0$. Vi forudsætter i det følgende, at $L_{hom} \neq 0$, altså at der også findes andre løsninger end nulløsningen.

Sætningen indeholder derudover to dele, som bevises hver for sig:

1. Hvis

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \ , \tag{6-73}$$

og

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \ , \tag{6-74}$$

så fås ved addition af de to ligninger og efterfølgende faktorisering med hensyn til koefficienterne

$$\begin{aligned} a_{i1}(x_1 + y_1) + a_{i2}(x_2 + y_2) + \cdots + a_{in}(x_n + y_n) = 0 \\ \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \ , \end{aligned} \tag{6-75}$$

hvilket viser, at $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ er en løsning.

2. Hvis

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \ , \tag{6-76}$$

og k er en vilkårlig skalar, så fås ved multiplikation på begge sider med k og efterfølgende faktorisering med hensyn til koefficienterne

$$a_{i1}(k \cdot x_1) + a_{i2}(k \cdot x_2) + \cdots + a_{in}(k \cdot x_n) = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \ , \tag{6-77}$$

hvilket viser, at $k \cdot \mathbf{x}$ er en løsning.

■

|||| Bemærkning 6.36

Hvis man tager et vilkårligt antal løsninger fra L_{hom}, ganger dem med vilkårlige konstanter og lægger disse produkter sammen, så vil denne såkaldte *linearkombination* af løsninger også selv være en løsning. Dette er en konsekvens af sætning 6.35.

6.9.2 Struktursætningen

Vi skal nu betragte en afgørende relation mellem et inhomogent lineært ligningssystem af formen

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + \ a_{12} \cdot x_2 + \ldots + \ a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \ a_{22} \cdot x_2 + \ldots + \ a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned} \tag{6-78}$$

og *det tilhørende homogene lineære ligningssystem*, hvilket er det samme ligningssystem som (6.9.78) blot med alle højresider b_i udskiftet med 0. Løsningsmængden for det inhomogene ligningssystem kaldes L_{inhom} og løsningsmængden for det tilhørende homogene ligningssystem L_{hom}.

|||| Sætning 6.37 Struktursætningen

Hvis der er fundet bare en enkelt løsning (en såkaldt partikulær løsning $\mathbf{x}_0$) til et inhomogent lineært ligningssystem, så kan L_{inhom} findes som summen af $\mathbf{x}_0$ og L_{hom}.

Der gælder med andre ord

$$L_{inhom} = \left\{ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \;\middle|\; \mathbf{y} \in L_{hom} \right\} , \tag{6-79}$$

eller kort skrevet

$$L_{inhom} = \mathbf{x}_0 + L_{hom} . \tag{6-80}$$

|||| Bevis

Sætningen rummer to påstande. Den ene er, at summen af $\mathbf{x}_0$ og en vilkårlig vektor fra L_{hom} tilhører L_{inhom}. Den anden er, at en vilkårlig vektor fra L_{inhom} kan skrives som summen af $\mathbf{x}_0$ og en vektor fra L_{hom}. Vi beviser de to påstande hver for sig:

1. Antag $\mathbf{y} \in L_{hom}$. Vi ønsker at vise, at

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y} = (x_{0_1} + y_1, x_{0_2} + y_2, \ldots, x_{0_n} + y_n) \in L_{inhom} . \tag{6-81}$$

Da

$$a_{i1}x_{0_1} + a_{i2}x_{0_2} + \cdots + a_{in}x_{0_n} = b_i \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \;, \tag{6-82}$$

og

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \;, \tag{6-83}$$

så fås ved addition af de to ligninger og efterfølgende faktorisering med hensyn til koefficienterne

$$a_{i1}(x_{0_1} + y_1) + \cdots + a_{in}(x_{0_n} + y_n) = b_i \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \;, \tag{6-84}$$

hvilket viser det ønskede.

2. Antag, at $\mathbf{x} \in L_{inhom}$. Vi ønsker at vise, at der findes en vektor $\mathbf{y} \in L_{hom}$, der opfylder, at

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y} . \tag{6-85}$$

Da både $\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}_0$ tilhører L_{inhom}, gælder, at

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \;, \tag{6-86}$$

og

$$a_{i1}x_{0_1} + a_{i2}x_{0_2} + \cdots + a_{in}x_{0_n} = b_i \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \ . \tag{6-87}$$

Når vi trækker den nederste ligning fra den øverste, får vi efter faktorisering

$$a_{i1}(x_1 - x_{0_1}) + \cdots + a_{in}(x_n - x_{0_n}) = 0 \quad \text{for ethvert} \quad i = 1, 2, \ldots, m \ , \tag{6-88}$$

hvilket viser, at den vektor $\mathbf{y}$, som defineres ved $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, tilhører L_{hom} og opfylder det ønskede: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$.

■