eNote 2

Polynomier af én variabel

I denne eNote introduceres komplekse polynomier af én variabel. Der forudsættes elementært kendskab til komplekse tal, og kendskab til reelle polynomier af én reel variabel er en fordel.

Version 10.09.16. *Karsten Schmidt.*

2.1 Indledning

Polynomier forekommer overalt i den tekniske litteratur som matematiske modeller for fysiske problemer. En stor fordel ved polynomier er at de er uhyre simple i beregninger da de kun kræver addition, multiplikation og potensopløftning. Derfor er polynomier bl.a. populære ved approksimation af mere komplicerede funktionstyper.

Kendskab til polynomiers *rødder* er en kongevej til forståelsen af deres egenskaber og effektive brug og vil derfor være et hovedemne i det følgende. Men først introducerer vi nogle generelle egenskaber.

|||| Definition 2.1

Ved et *polynomium* af grad n forstås en funktion der kan skrives på formen

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{2-1}$$

hvor $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er komplekse konstanter med $a_n \neq 0$, og z er en kompleks variabel.

a_k kaldes *koefficienten* for z^k, $k = 0, 1, \ldots, n$, og a_n er den *ledende koefficient*.
Et *reelt polynomium* er et polynomium hvori alle koefficienterne er reelle.
Et *reelt polynomium af en reel variabel* er et reelt polynomium hvori $z \in \mathbb{R}$.

Polynomier navngives ofte med et stort P eller tilsvarende bogstav $Q, R, S \ldots$ Hvis det i situationen er naturligt at medtage variabelnavnet, skrives polynomiet som $P(z)$ hvor det underforstås at z er en uafhængig kompleks variabel.

|||| Eksempel 2.2 Eksempler på polynomier

$P(z) = 2z^3 + (1+\mathrm{i})z + 5$ er et tredjegradspolynomium.
$Q(z) = z^2 + 1$ er et reelt andengradspolynomium.
$R(z) = 17$ er et $0'$te-gradspolynomium.
$S(z) = 0$ kaldes 0-polynomiet og tildeles ingen grad.
$T(z) = 2z^3 + 5\sqrt{z} - 4$ er ikke et polynomium.

Når man ganger et polynomium med en konstant, og når man adderer, subtraherer, multiplicerer og sammensætter polynomier med hinanden, får man et nyt polynomium. Dette polynomium kan reduceres ved at led af samme grad samles så formen (2.1.1) opnås.

|||| Eksempel 2.3 Addition og multiplikation af polynomier

To polynomier P og Q er givet ved $P(z) = z^2 - 1$ og $Q(z) = 2z^2 - z + 2$. Polynomierne $R = P + Q$ og $S = P \cdot Q$ bestemmes således:

$$\begin{aligned} R(z) &= (z^2-1)+(2\,z^2-z+2) = (z^2+2\,z^2)+(-z)+(-1+2) = 3\,z^2-z+1\,. \\ S(z) &= (z^2-1)\cdot(2\,z^2-z+2) = (2\,z^4-z^3+2\,z^2)+(-2\,z^2+z-2) \\ &= 2\,z^4-z^3+(2\,z^2-2\,z^2)+z-2 = 2\,z^4-z^3+z-2\,. \end{aligned}$$

2.2 Polynomiers rødder

|||| Definition 2.4 Rod i polynomium

Ved en *rod* i et polynomium $P(z)$ forstås et tal z_0 for hvilket $P(z_0) = 0$.

|||| Eksempel 2.5 Om et givet tal er rod i et polynomium

Vis at 3 er rod i $P(z) = z^3 - 5\,z - 12$, og at 1 ikke er rod.

Da $P(3) = 3^3 - 5\cdot 3 - 12 = 0$, er 3 rod i P.
Da $P(1) = 1^3 - 5\cdot 1 - 12 = -16 \neq 0$, er 1 ikke rod i P.

Til at udvikle teorien for polynomiers rødder får vi brug for følgende hjælpesætning.

|||| Hjælpesætning 2.6 Nedstigningssætningen

Et n'te-gradspolynomium P er givet ved

$$P(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0\,. \tag{2-2}$$

Hvis z_0 er et vilkårligt tal, og Q er det n-1$'$te-gradspolynomium som er givet ved koefficienterne

$$b_{n-1} = a_n \tag{2-3}$$
$$b_k = a_{k+1} + z_0 \cdot b_{k+1} \quad \text{for} \quad k = n-2, \ldots, 0 \quad , \tag{2-4}$$

så gælder der at P kan skrives på den faktoriserede form

$$P(z) = (z - z_0)Q(z) \tag{2-5}$$

hvis og kun hvis z_0 er rod i P.

|||| Bevis

Lad polynomiet P være givet som i sætningen, og lad α være et vilkårligt tal. Betragt et vilkårligt n-1$'$te-gradspolynomium

$$Q(z) = b_{n-1}\, z^{n-1} + b_{n-2}\, z^{n-2} + \cdots + b_1\, z + b_0\,.$$

Ved simpel udregning fås

$$(z-\alpha)Q(z) = b_{n-1}\, z^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})\, z^{n-1} + \cdots + (b_0 - \alpha b_1)z - \alpha b_0\,.$$

Det ses at polynomierne $(z-\alpha)Q(z)$ og $P(z)$ har samme forskrift hvis vi successivt fastsætter b_k-koefficienterne for Q som angivet i (2.2.3) og (2.2.4), og der samtidig gælder:

$$-\alpha b_0 = a_0 \;\Leftrightarrow\; b_0\, \alpha = -a_0\,.$$

Vi undersøger om denne betingelse er opfyldt ved at benytte (2.2.3) og (2.2.4) i modsat rækkefølge:

$$\begin{aligned}
b_0\, \alpha &= (a_1 + \alpha b_1)\alpha = b_1 \alpha^2 + a_1 \alpha \\
&= (a_2 + \alpha b_2)\alpha^2 + a_1\alpha = b_2\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha \\
&\;\vdots \\
&= b_{n-1}\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha \\
&= a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0 \\
\Leftrightarrow\;\; P(\alpha) &= a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0\,.
\end{aligned}$$

Det ses at betingelsen er opfyldt hvis og kun hvis α er rod i P. Hermed er beviset fuldført.

■

|||| Eksempel 2.7 Nedstigning

Givet polynomiet $P(z) = 2z^4 - 12z^3 + 19z^2 - 6z + 9$. Det ses at 3 er en rod idet $P(3) = 0$. Bestem et tredjegradspolynomium Q således at

$$P(z) = (z - 3)Q(z)\,.$$

Vi sætter $a_4 = 2,\ a_3 = -12,\ a_2 = 19,\ a_1 = -6$ og $a_0 = 9$ og finder koefficienter for Q ved hjælp af (2.2.3) og (2.2.4):

$$\begin{aligned}
b_3 &= a_4 = 2 \\
b_2 &= a_3 + 3b_3 = -12 + 3 \cdot 2 = -6 \\
b_1 &= a_2 + 3b_2 = 19 + 3 \cdot (-6) = 1 \\
b_0 &= a_1 + 3b_1 = -6 + 3 \cdot 1 = -3\,.
\end{aligned}$$

Vi konkluderer at

$$Q(z) = 2z^3 - 6z^2 + z - 3$$

så

$$P(z) = (z - 3)\,(2z^3 - 6z^2 + z - 3)\,.$$

Når et polynomium P med roden z_0 er skrevet på formen $P(z) = (z - z_0)Q_1(z)$, hvor Q_1 er et polynomium, kunne det tænkes at z_0 også er rod i Q_1. I så fald kan Q_1 tilsvarende skrives som $Q_1(z) = (z - z_0)Q_2(z)$ hvor Q_2 er et polynomium. Og således vil nedstigningen successivt kunne videreføres indtil $P(z) = (z - z_0)^m R(z)$ hvor R er et polynomium hvori z_0 ikke er rod. Vi viser nu at denne faktorisering er unik.

|||| Sætning 2.8 En rods multiplicitet

Hvis z_0 er rod i polynomiet P, kan det på netop én måde skrives på faktoriseret form således:

$$P(z) = (z - z_0)^m \, R(z) \tag{2-6}$$

hvor $R(z)$ er et polynomium hvori z_0 ikke er rod.

Eksponenten m kaldes den *algebraiske multiplicitet* af roden z_0.

|||| Bevis

Antag at α er rod i P, og at der (i modsætning til påstanden i sætningen) findes to forskellige faktoriseringer

$$P(z) = (z - \alpha)^r \, R(z) = (z - \alpha)^s \, S(z)$$

hvor $r > s$, og $R(z)$ henholdsvis $S(z)$ er polynomier hvori α ikke er rod. Vi får da

$$(z - \alpha)^r \, R(z) - (z - \alpha)^s \, S(z) = (z - \alpha)^s \big((z - \alpha)^k R(z) - S(z) \big) = 0 \,, \text{ for alle } z \in \mathbb{C}$$

hvor $k = r - s$. Denne ligning er kun opfyldt hvis

$$(z - \alpha)^k \, R(z) = S(z) \quad \text{for} \quad \text{alle} \quad z \neq \alpha \,.$$

Da venstre- og højresiden i denne ligning er kontinuerte funktioner, må de også have samme værdi i α. Herved opnår vi

$$S(\alpha) = (z - \alpha)^k R(\alpha) = 0$$

hvilket er i modstrid med antagelsen, at α ikke er rod i S.

■

|||| Eksempel 2.9

I eksempel 2.7 fandt vi at

$$P(z) = (z - 3) \, (2z^3 - 6z^2 + z - 3)$$

hvor 3 er rod. Men 3 er også rod i den anden faktor $2z^3 - 6z^2 + z - 3$. Ved at benytte nedstigningssætningen, sætning 2.6, på dette polynomium får vi

$$P(z) = (z - 3) \;\; (z - 3)(2z^2 + 1) \; = (z - 3)^2 \, (2z^2 + 1) \,.$$

Da 3 ikke er rod i $2z^2 + 1$, har roden 3 i P multipliciteten 2.

Nu har vi startet en nedstigningsproces! Hvor langt kan vi komme ad den vej? For at komme videre i undersøgelsen får vi brug for et grundlæggende resultat, nemlig *fundamentalsætningen*.

2.2.1 Algebraens fundamentalsætning

En afgørende motivation for indføringen af komplekse tal er at ethvert polynomium har rødder inden for de komplekse tal. Dette resultat blev vist af matematikeren Gauss i hans ph.d.-afhandling fra 1799. Beviset for sætningen er krævende, og Gauss arbejdede videre på det hele sit liv for at gøre det endnu mere elegant. Hele fire versioner foreligger der fra hans hånd, så ingen tvivl om at han lagde meget stor vægt på sætningen. Her tillader vi os at angive Gauss' resultat uden bevis:

|||| Sætning 2.10 Algebraens fundamentalsætning

Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ har inden for de komplekse tal mindst én rod.

Polynomiet $P(z) = z^2 + 1$ har ingen rødder inden for de reelle tal. Men inden for de komplekse tal har det hele to rødder i og $-\mathrm{i}$ fordi

$$P(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \quad \text{og} \quad P(-\mathrm{i}) = (-\mathrm{i})^2 + 1 = \mathrm{i}^2 + 1 = 0\,.$$

Vejen fra algebraens fundamentalsætning til fuldt kendskab til antallet af polynomiers rødder er ikke lang. Vi skal blot videreudvikle idéen i nedstigningssætningen.

Vi betragter et n'te-gradspolynomium P med ledende koefficient a_n. Hvis $n \geq 1$, har P ifølge algebraens fundamentalsætning en rod α_1 og kan derfor med koefficientmetoden i nedstigningssætningen, sætning 2.6, skrives som

$$P(z) = (z - \alpha_1)Q_1(z) \tag{2-7}$$

hvor Q_1 er et polynomium af grad n-1 med ledende koefficient a_n. Hvis $n \geq 2$, så har Q_1 en rod α_2 og kan skrives som

$$Q_1(z) = (z - \alpha_2)Q_2(z)$$

hvor Q_2 er et polynomium af grad n-2 ligeledes med ledende koefficient a_n. Ved indsættelse fås nu

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)Q_2(z)\,.$$

Således fortsættes konstruktionen af nedstigningspolynomier Q_k af graden $n - k$ for $k = n - 1, \ldots, 0$ indtil vi når polynomiet Q_n af graden n-$n = 0$ der som angivet i eksempel 2.2, er lig med sin ledende koefficient a_n. Herefter kan P opskrives på *fuldstændig faktoriseret form*:

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\,\cdots\,(z - \alpha_n)\,. \tag{2-8}$$

I dette udtryk skal vi bemærke tre ting:

- Den første er at alle de n tal $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der er oplistet i (2.2.8), er rødder i P da de ved indsættelse i forskriften giver værdien 0.
- Den anden ting vi bemærker, er at P ikke kan have andre rødder end de n nævnte. At der ikke kan være flere, ses nemt således: Hvis et vilkårligt tal $\alpha \neq \alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$, indsættes på z's plads i (2.2.8), vil samtlige faktorer på højresiden af (2.2.8) være forskellige fra nul. Dermed vil også deres produkt være forskelligt fra nul. Derfor er $P(\alpha) \neq 0$, og α er ikke en rod i P.
- Den sidste ting vi bemærker i (2.2.8), er at rødderne ikke nødvendigvis er forskellige. Hvis $z_1, z_2, \ldots, z_p$ er de p *forskellige* rødder som P har, og m_k er multipliciteten (antal forekomster) af z_k, $k = 1, \ldots, p$, s kan den fuldstændigt faktoriserede form (2.2.8) reduceres til

  $$P(z) = a_n(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2}\,\cdots\,(z - z_p)^{m_p} \tag{2-9}$$

  hvor der gælder:

  $$m_1 + m_2 \cdots + m_p = n\,.$$

Efter dette er vi nu klar til at præsentere følgende udvidede udgave af algebraens fundamentalsætning.

|||| Sætning 2.11 Algebraens fundamentalsætning — version 2

Ethvert polynomium af grad $n \geq 1$ har inden for de komplekse tal netop n rødder, når rødderne regnes med multiplicitet.

|||| Eksempel 2.12 Andengradspolynomier på fuldstændig faktoriseret form

Et vilkårligt andengradspolynomium $P(z) = az^2 + bz + c$ kan skrives på formen

$$P(z) = a(z-\alpha)(z-\beta)$$

hvor α og β er rødder i P. Hvis $\alpha \neq \beta$, har P to forskellige rødder, hver med algebraisk multiplicitet 1. Hvis $\alpha = \beta$, har P én rod med algebraisk multiplicitet 2. Roden kaldes da en *dobbeltrod*.

|||| Eksempel 2.13 Algebraisk multiplicitet

Et polynomium P er angivet på fuldstændig faktoriseret form således:

$$P(z) = 7(z-1)^2(z+4)^3(z-5)\,.$$

Vi ser at P har tre forskellige rødder: $1, -4$ og 5 med de algebraiske multipliciteter 2 henholdsvis 3 og 1.

Det bemærkes at summen af de algebraiske multipliciteter er 6 hvilket er lig med graden af P i overensstemmelse med algebraens fundamentalsætning, version 2.

|||| Eksempel 2.14 Algebraisk multiplicitet

Angiv antallet af rødder i $P(z) = z^3$.

P har kun én rod $z = 0$. Rodens algebraiske multiplicitet er 3. Man siger at 0 er en *trippelrod* i polynomiet.

2.3 Identiske polynomier

To polynomier P og Q kaldes ens hvis $P(z) = Q(z)$ for alle z. Men hvad skal der *til* for at to polynomier er ens? Kunne man for eksempel tænke sig at et fjerdegrads- og et femtegradspolynomium har samme værdi i alle variable hvis man blot vælger de rette koefficienter? Dette er ikke tilfældet idet der gælder følgende sætning.

|||| Sætning 2.15 Identitetssætning for polynomier

To polynomier er ens hvis og kun hvis de er af samme grad, og alle koefficienter for led af samme grad fra de to polynomier er ens.

|||| Bevis

Vi betragter to vilkårlige polynomier P og Q. Hvis de har samme grad, og alle koefficienterne for led af samme grad er ens, må de klart have samme værdi i alle variable og er derfor identiske. Hermed er første del af Identitetssætningen vist.

Antag herefter at P og Q er identiske, men at ikke alle koefficienterne for led af samme grad fra de to polynomier er ens. Vi antager videre at P har grad n og Q grad m hvor $n \geq m$. Lad a_k være koefficienterne for P og lad b_k være koefficienterne for Q, og betragt differenspolynomiet

$$\begin{aligned} R(z) =& P(z) - Q(z) \\ =& (a_n - b_n)z^n + (a_{n-1} - b_{n-1})z^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)z + (a_0 - b_0) \end{aligned} \tag{2-10}$$

hvor vi i tilfældet $n > m$ sætter $b_k = 0$ for $m < k \leq n$. Vi bemærker at 0'te-gradskoefficienten $(a_0 - b_0)$ ikke kan være den eneste for $R(z)$ som er forskellig fra 0, for så ville $P(z) - Q(z) = (a_0 - b_0) \neq 0$ hvilket er i modstrid med at P og Q er identiske. Derfor er graden af R større end eller lig med 1. På den anden side viser (2.3.10) at graden af R højst er n. Lad nu z_k, $k = 1, \ldots, n+1$, være $n+1$ forskellige tal. De er alle rødder i R idet

$$R(z_k) = P(z_k) - Q(z_k) = 0\,, \;\; k = 1 \ldots n+1\,.$$

Dette er imidlertid i modstrid med Algebraens fundamentalsætning, version 2, sætning 2.11: R kan ikke have et antal rødder der er højere end dets grad. Antagelsen, at ikke alle koefficienterne for led af samme grad fra P og Q er ens, må derfor være forkert. Heraf følger også at P og Q har samme grad. Hermed er anden del af Identitetssætningen er bevist.

■

|||| Eksempel 2.16 To identiske polynomier

Ligningen

$$3\,z^2 - z + 4 = a\,z^2 + b\,z + c$$

er opfyldt for alle z netop når $a = 3$, $b = -1$ og $c = 4$.

|||| Opgave 2.17 To identiske polynomier

Bestem tallene a, b og c således at

$$(z-2)(a\,z^2 + b\,z + c) = z^3 - 5\,z + 2 \quad \text{for} \quad \text{alle} \quad z\,.$$

I det følgende afsnit behandler vi metoder til at finde rødder for visse typer af polynomier.

2.4 Polynomiumsligninger

Fra algebraens fundamentalsætning, sætning 2.10, ved vi at ethvert polynomium af grad større end eller lig med 1 har rødder. I dens udvidede version, sætning 2.11, slås det endog fast at for ethvert polynomium er graden lig antallet af rødder hvis rødderne regnes med multiplicitet. Men sætningen er en teoretisk eksistenssætning som ikke hjælper os med at *bestemme* rødderne.

I det følgende introduceres metoder til at finde rødderne for simple polynomier. Men lad os holde ambitionsniveauet på et rimeligt niveau for i begyndelsen af 18-hundredtallet beviste den norske algebraiker Abel at der *ikke kan* opstilles generelle metoder til at finde rødderne i vilkårlige polynomier af grad større end fire!

For polynomier af højere grad end fire findes der en række smarte tricks hvorved man kan være heldig at finde en enkelt rod. Herefter nedstiger man til et polynomium af én lavere grad — og kan måske gradvist nå ned til et polynomium af fjerde grad eller lavere hvortil der findes generelle metoder til at finde de resterende rødder.

Lad os indledningsvist slå fast at når man ønsker at finde rødderne for et polynomium $P(z)$, skal man løse den tilsvarende *polynomiumsligning* $P(z) = 0$. Som en simpel illustration kan vi se på roden for et vilkårligt førstegradspolynomium:

$$P(z) = az + b\,.$$

For at finde den skal vi løse ligningen

$$az + b = 0\,.$$

Det er ikke svært. Den har løsningen $z_0 = -\dfrac{b}{a}$ som derfor er rod i $P(z)$.

Når man skal finde *rødderne* for et polynomium P , finder man *løsningerne* på polynomiumsligningen $P(z) = 0$.

|||| Eksempel 2.18 Roden i et førstegradspolynomium

Find roden til førstegradspolynomiet P givet ved

$$P(z) = (1 - \mathrm{i})\, z - (5 + 2\mathrm{i})\,.$$

Vi skal løse ligningen

$$(1 - \mathrm{i})\, z - (5 + 2\mathrm{i}) = 0 \;\Leftrightarrow\; (1 - \mathrm{i})\, z = (5 + 2\mathrm{i})\,.$$

Vi isolerer z på venstre side:

$$z = \frac{5 + 2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{(5 + 2\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})} = \frac{3 + 7\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\,\mathrm{i}\,.$$

Altså har ligningen løsningen $z_0 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}\,\mathrm{i}$ som samtidig er P's rod.

2.4.1 Binome ligninger

En binom ligning er en n'tegradsligning hvor kun koefficienterne a_n (højestegradsleddet) og a_0 (konstantleddet) er forskellige fra 0 . En given binom ligning kan reduceres til den følgende form:

|||| Definition 2.19 Binom ligning

En binom ligning har formen $z^n = w$ hvor $w \in \mathbb{C}$ og $n \in \mathbb{N}$.

For binome ligninger findes en eksplicit løsningsformel som vi præsenterer i den følgende sætning.

|||| Sætning 2.20 Binom ligning løst vha. eksponentiel form

Lad $w \neq 0$ være et komplekst tal med den eksponentielle form

$$w = |w|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}v}\,.$$

Den binome ligning

$$z^n = w \tag{2-11}$$

har n forskellige løsninger givet ved formlen

$$z_p = \sqrt[n]{|w|}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{v}{n}+p\frac{2\pi}{n}\right)} \;\text{ hvor }\; p = 0\,,\,1\,,\ldots\,,\,n-1\,. \tag{2-12}$$

|||| Bevis

For ethvert $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ er $z_p = \sqrt[n]{|w|}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{v}{n}+p\frac{2\pi}{n}\right)}$ en løsning til (2.4.11), idet

$$(z_p)^n = \left(\sqrt[n]{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{v}{n}+p\frac{2\pi}{n}\right)}\right)^n = |w|\;\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(v+p\,2\pi)} = |w|\;\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = w.$$

Det ses at de n løsninger set som punkter i den komplekse talplan alle ligger på en cirkel med centrum i Origo, radius $\sqrt[n]{|w|}$ og en fortløbende vinkelafstand på $\frac{2\pi}{n}$. Forbindelseslinjerne mellem Origo og løsningerne deler med andre ord cirklen i n lige store vinkler.

Det følger heraf at de n løsninger er indbyrdes forskellige. At der ikke er flere løsninger, er en følge af algebraens fundamentalsætning, version 2, sætning 2.11. Hermed er sætningen bevist.

■

Vi vil i de næste eksempler betragte nogle vigtige særtilfælde af binome ligninger.

|||| Eksempel 2.21 Binom andengradsligning

Vi betragter et komplekst tal på eksponentiel form $w = |w|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}$. Det følger af (2.4.12) at andengradsligningen

$$z^2 = w$$

har to løsninger

$$z_0 = \sqrt{|w|}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{v}{2}} \;\text{ og }\; z_1 = -\sqrt{|w|}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{v}{2}}\,.$$

|||| Eksempel 2.22 Binom andengradsligning med negativ højreside

Lad r være et vilkårligt positivt reelt tal. Ved i eksempel 2.21 at stte $v = \mathrm{Arg}(-r) = \pi$ ses at den binome andengradsligning

$$z^2 = -r$$

har to løsninger

$$z_0 = \mathrm{i}\,\sqrt{r} \;\text{ og }\; z_1 = -\mathrm{i}\,\sqrt{r}\,.$$

Med et konkret eksempel har ligningen $z^2 = -16$ løsningerne $z = \pm\mathrm{i}\,4$.

Den benyttede metode i eksempel 2.21 kan i mange tilfælde være vanskelig at gennemføre. I det følgende eksempel vises en alternativ metode.

|||| Eksempel 2.23 Binom andengradsligning, metode 2

Løs ligningen

$$z^2 = 8 - 6i\,. \tag{2-13}$$

Da vi forventer at løsningerne for z kan være på kompleks form, sætter vi $z = x + \mathrm{i}y$ hvor x og y er reelle tal. Hvis vi kan finde x og y, så har vi fundet løsningerne for z. Vi har derfor $z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$ og ser at (2.4.13) er ækvivalent med

$$x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = 8 - 6\mathrm{i}\,.$$

Da en kompleks ligning er sand netop når såvel realdelen som imaginærdelen af ligningens højreside og venstreside er identiske, må (2.4.13) videre være ækvivalent med

$$x^2 - y^2 = 8 \;\text{ og }\; 2xy = -6\,. \tag{2-14}$$

Indsættes $y = \dfrac{-6}{2x} = -\dfrac{3}{x}$ i $x^2 - y^2 = 8$, og sættes $x^2 = u$, opnås en andengradsligning som kan løses:

$$x^2 - \left(-\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 - \frac{9}{x^2}\right) x^2 = 8x^2 \Leftrightarrow x^4 - 9 = 8x^2 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$
$$u^2 - 8u - 9 = 0 \Leftrightarrow u = 9 \text{ eller } u = -1\,.$$

Ligningen $x^2 = u = 9$ har løsningerne $x_1 = 3$ og $x_2 = -3$, mens ligningen $x^2 = u = -1$ ingen løsninger har, da x og y skal være reelle tal. Indsættes $x_1 = 3$ henholdsvis $x_2 = -3$ i (2.4.14), fås de tilsvarende y-værdier $y_1 = -1$ og $y_2 = 1$.

Hermed konkluderes at den givne ligning (2.4.13) har rødderne

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 = 3 - \mathrm{i} \quad \text{og} \quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 = -3 + \mathrm{i}\,.$$

2.4.2 Andengradsligninger

Til løsning af andengradsligninger opstiller vi nedenfor den formel der svarer til den velkendte løsningsformel for reelle andengradsligninger. Der er dog en enkelt afvigelse, nemlig at vi ikke tager kvadratroden af diskriminanten hvilket skyldes at vi ikke her forudsætter kendskab til kvadratrødder af komplekse tal.

|||| Sætning 2.24 Løsningsformel for andengradsligning

For andengradsligningen

$$az^2 + bz + c = 0\ ,\ a \neq 0 \tag{2-15}$$

indføres *diskriminanten* D ved $D = b^2 - 4ac$. Ligningen har to løsninger

$$z_1 = \frac{-b - w_0}{2a} \text{ og } z_2 = \frac{-b + w_0}{2a} \tag{2-16}$$

hvor w_0 er en løsning til den binome andengradsligning $w^2 = D$.

Hvis specielt $D = 0$, gælder der at $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

|||| Bevis

Lad w_0 være en vilkårlig løsning til den binome ligning $w^2 = D$. Der gælder da:

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{w_0^2}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{w_0}{2a}\right)\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{w_0}{2a}\right)\\
&= a\left(z + \frac{b + w_0}{2a}\right)\left(z + \frac{b - w_0}{2a}\right) = 0\\
\Leftrightarrow z &= \frac{-b - w_0}{2a} \text{ eller } z = \frac{-b + w_0}{2a}\ .
\end{aligned}$$

Hermed er løsningsformlen (2.24) udledt.

■

|||| Eksempel 2.25 Reel andengradsligning med positiv diskriminant

Løs følgende andengradsligning med reelle koefficienter:

$$2z^2 + 5z - 3 = 0\,.$$

Vi identificerer koefficienterne: $a = 2, b = 5, c = -3$. Diskriminanten findes:

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49\,.$$

Det ses at $w_0 = 7$ er en løsning til den binome andengradsligning $w^2 = D = 49$. Nu kan løsningerne udregnes:

$$z_1 = \frac{-5+7}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \;\text{ og }\; z_2 = \frac{-5-7}{2 \cdot 2} = -3\,. \tag{2-17}$$

|||| Eksempel 2.26 Reel andengradsligning med negativ diskriminant

Løs følgende andengradsligning med reelle koefficienter:

$$z^2 - 2z + 5 = 0\,.$$

Vi identificerer koefficienterne: $a = 1, b = -2, c = 5$. Diskriminanten findes:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16\,.$$

Ifølge eksempel 2.22 er en løsning til den binome andengradsligning $w^2 = D = -16$ givet ved $w_0 = 4\mathrm{i}$. Nu kan løsningerne udregnes:

$$z_1 = \frac{-(-2)+4\mathrm{i}}{2 \cdot 1} = 1 + 2\mathrm{i} \;\text{ og }\; z_2 = \frac{-(-2)-4\mathrm{i}}{2 \cdot 1} = 1 - 2\mathrm{i}\,. \tag{2-18}$$

|||| Eksempel 2.27 Andengradsligning med komplekse koefficienter

Løs andengradsligningen

$$z^2 - (1+\mathrm{i})z - 2 + 2\mathrm{i} = 0\,. \tag{2-19}$$

Lad os først identificere koefficienterne: $a = 1, b = -(1+\mathrm{i}), c = -2+2\mathrm{i}$. Diskriminanten findes:

$$D = (-(1+\mathrm{i}))^2 - 4\cdot 1\cdot(-2+2\mathrm{i}) = 8-6\mathrm{i}\,.$$

Fra eksempel 2.23 ved vi at en løsning til den binome ligning $w^2 = D = 8-6\mathrm{i}$ er $w_0 = 3-\mathrm{i}$. Herefter findes løsningerne for (2.4.19) ved

$$z_1 = \frac{-(-(1+\mathrm{i}))+(3-\mathrm{i})}{2\cdot 1} = 2 \;\text{ og }\; z_2 = \frac{-(-(1+\mathrm{i}))-(3-\mathrm{i})}{2\cdot 1} = -1+\mathrm{i}\,. \tag{2-20}$$

2.4.3 Tredje- og fjerdegradsligninger

Fra antikken kendes geometriske metoder til løsning af (reelle) andengradsligninger. Men først omkring år 800 e.Kr. blev algebraiske løsningsformler kendt via den persiske (arabisk skrivende) matematiker Muhammad ibn Musa al-Khwarismes berømte bog al-Jabr. Navnet al-Khwarisme blev i Vesten til det velkendte ord *algoritme*, mens bogens titel blev til *algebra*.

Tre hundrede år senere gentog historien sig. Omkring år 1100 e.Kr. angav en anden persisk matematiker (og digter) Omar Khayyám eksakte metoder til hvordan man finder løsninger til reelle tredje- og fjerdegradsligninger ved hjælp af mere avancerede geometriske konstruktioner. For eksempel løste han ligningen $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$ ved skæring mellem en cirkel og en hyperbel hvis ligninger han kunne udlede af tredjegradsligningen.

Omar Khayyám mente ikke det ville være muligt at opstille algebraiske formler for løsninger til ligninger af grad større end to. Her tog han dog fejl idet italieneren Gerolamo Cardano i 1500-tallet offentliggjorde formler til løsning af tredje- og fjerdegradsligninger.

Khayyáms metoder og Cardanos formler ligger ikke inden for rammerne af denne eNote. Her giver vi blot — se eksempel 2.9 tidligere samt nedenstående eksempel 2.28 — enkelte eksempler på hvordan man ved hjælpåaf "‘nedstigningsmetoden"’, sætning 2.6, kan finde alle løsninger til ligninger af grad større end to hvis man i forvejen kender eller kan gætte et tilstrækkeligt antal af løsningerne.

|||| Eksempel 2.28 En tredjegradsligning med et indledende gæt

Løs tredjegradsligningen

$$z^3 - 3z^2 + 7z - 5 = 0\,.$$

Det gættes nemt, at 1 er en løsning. Ved hjælpåaf nedstigningsaloritmen får man nemt faktoriseringen:

$$z^3 - 3z^2 + 7z - 5 = (z-1)(z^2 - 2z + 5) = 0\,.$$

Vi ved at 1 er en løsning, de resterende løsninger fås ved løsning af andengradsligningen

$$z^2 - 2z + 5 = 0\,,$$

som ifølge eksempel 2.26 har løsningerne $1 + 2\mathrm{i}$ og $1 - 2\mathrm{i}$.

Samlet har tredjegradsligningen løsningerne 1, $1 + 2\mathrm{i}$ og $1 - 2\mathrm{i}$.

2.5 Reelle polynomier

Teorien som har været udfoldet i de forrige afsnit, gælder for alle polynomier med komplekse koefficienter. I dette afsnit vil vi præsentere to sætninger der *kun* gælder for polynomier med reelle koefficienter — altså den delmængde som kaldes *de reelle polynomier*. Den første sætning viser at ikke-reelle rødder altid optræder i par.

|||| Sætning 2.29 Rødder i reelle polynomier

Hvis tallet $a + ib$ er rod i et polynomium som kun har reelle koefficienter, så er også det konjugerede tal $a - ib$ rod i polynomiet.

|||| Bevis

Lad

$$P(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0$$

være et reelt polynomium. Ved brug af regneregler for konjugering af sum og produkt af komplekse tal (se eNote 29 om komplekse tal) samt forudsætningen at alle koefficienterne er reelle, fås

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0} \\ &= a_n\, \overline{z}^n + a_{n-1}\, \overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1\, \overline{z} + a_0 \\ &= P(\overline{z})\ .\end{aligned}$$

Hvis z_0 er rod i P, får vi

$$\overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0 = P(\overline{z_0})$$

hvoraf det ses at også $\overline{z_0}$ er rod. Hermed er sætningen bevist.

■

|||| Eksempel 2.30 Konjugerede rødder

Det oplyses, at polynomiet

$$P(z) = 3z^2 - 12z + 39 \tag{2-21}$$

har roden $2 - 3\mathrm{i}$. Bestem alle rødder i P, og opskriv P på fuldstændig faktoriseret form.

Vi ser at alle tre koefficienter for P er reelle. Derfor er også den oplyste rods konjugerede $2 + 3\mathrm{i}$ rod i P. Da P er et andengradspolynomium, er der ikke flere rødder.

Ifølge eksempel 2.12 er den fuldstændigt faktoriserede form for P :

$$P(z) = 3\,(z - (2 - 3\mathrm{i}))(z - (2 + 3\mathrm{i}))\,.$$

I et polynomiums fuldstændigt faktoriserede form vil de to faktorer der svarer til et par af konjugerede rødder, altid kunne ganges sammen til et *reelt andengradspolynomium* således:

$$\begin{aligned}(z - (a + \mathrm{i}b))(z - (a - \mathrm{i}b)) &= ((z - a) + \mathrm{i}b))((z - a) - \mathrm{i}b) \\ &= (z - a)^2 - (\mathrm{i}b)^2 \\ &= z^2 - 2az + (a^2 + b^2)\,.\end{aligned}$$

Fra sætning 2.29 ved vi at komplekse rødder i et reelt polynomium altid optræder i konjugerede par. Heraf udspringer følgende sætning:

|||| Sætning 2.31 Reel faktorisering

Et reelt polynomium kan skrives som et produkt af reelle førstegradspolynomier og reelle andengradspolynomier som ikke har reelle rødder.

|||| Eksempel 2.32 Reel faktorisering

Om et reelt syvendegradspolynomium P oplyses at det har rødderne $1, \mathrm{i}, 1+2\mathrm{i}$ samt dobbeltroden -2, og at koefficienten til dets højestegradsled er $a_7 = 5$. Skriv P som et produkt af reelle førstegradspolynomier og reelle andengradspolynomier der ikke har reelle rødder.

Vi udnytter at de komplekse rødders konjugerede også er rødder, og sætter P på fuldstændig faktoriseret form:

$$P(z) = 5\,(z-1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})(z-(1+2\mathrm{i}))((z-(1-2\mathrm{i}))(z+2)^2\,.$$

Der er to par af faktorer der svarer til konjugerede rødder. Når de ganges sammen, fås den ønskede form:

$$P(z) = 5\,(z-1)(z^2+1)(z^2-2z+5)(z+2)^2\,.$$

Hermed afsluttes behandlingen af polynomier af én variabel.