

||| Temaøvelse 2

Varmeledning i et metalgitter

I denne temaøvelse modelleres varmeledning i et metalgitter med kendte varmeledningsmodstande, hvor et af knudepunkterne holder temperaturen 1 og et andet temperaturen 0. Der bruges lineære ligningssystemer og matrixregning til at finde de ubekendte varmestrømme. Vi præsenterer her nogle opgaver som kan bruges til forberedelse. På Lille Dag i semesteruge 7 arbejdes der videre i Maple TA med opgaverne, og der kan også være nye opgaver inden for det samme område.

Vi indfører følgende regler og konventioner:

- Temperaturen i det knudepunkt P_i der på figurerne har nummer i , kaldes T_i .
- Specielt sættes temperaturen i knudepunktet P_1 til $T_1 = 1$.
- Der vælges et andet knudepunkt P_a hvori temperaturen sættes til $T_a = 0$. Værdien af a oplyses nedenfor.
- Hvis der findes et metalstykke (også kaldet kant) fra P_i til P_j så er dens varmeledningsmodstand givet ved $R_{ij} = R_{ji}$ som afhænger af metalstykkets tværsnitsareal, længde og varmeledningsevne. Værdien af R_{ij} oplyses nedenfor.
- En lineær model for varmestrømme i sådanne netværk (baseret på Fourier's lov) giver varmestrømmen Q_{ij} i metalstykket (hvis der er en) fra P_i til P_j ved ligningen

$$(*) \quad T_i - T_j = R_{ij} \cdot Q_{ij}$$

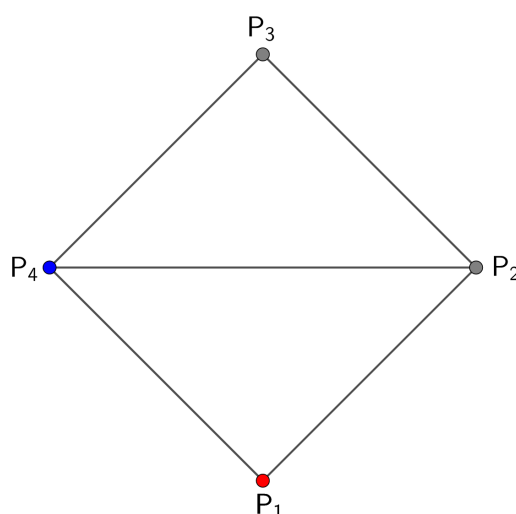
Bemærk at der derfor gælder $Q_{ji} = -Q_{ij}$. Man kan vælge konsekvent at omskrive strømme med faldende indeks til stigende indeks, hvis blot man skifter fortegnet, fx $-Q_{24}$ i stedet for Q_{42} .

Temaøvelsesopgaven fortsætter \mapsto

- Vi antager at varmemstrømmene er stationære (der sker ikke ophobning af varme noget sted i netværket). Så gælder følgende *bevarelseslov* for alle *indre* knudepunkter P_i (indre vil sige at $i \neq 1, a$): Tager man varmemstrømmene i alle de kanter der har det indre punkt som endepunkt, og orienterer man strømmene mod punktet, vil summen af dem være 0.

||| Opgave 1 Netværk med fire knudepunkter og fem kanter

Vi betragter et netværk hvor $a = 4$, $R_{12} = R_{23} = R_{24} = 1$, $R_{34} = 1/2$ og $R_{14} = 2$.



- a) Opskriv ved hjælp af (*) en ligning for hver af de fem kanter i netværket. Vink: Som eksempel giver kanten fra P_1 til P_2 anledning til ligningen

$$T_1 - T_2 = R_{12} \cdot Q_{12} \Leftrightarrow 1 - T_2 = 1 \cdot Q_{12} \Leftrightarrow T_2 + Q_{12} = 1.$$

- b) Opskriv ved hjælp af den nævnte bevarelseslov en ligning for hver af „de indre“ knudepunkter P_2 og P_3 . Vink: Som eksempel giver knudepunktet P_2 anledning til ligningen

$$Q_{12} + Q_{42} + Q_{32} = 0 \Leftrightarrow Q_{12} - Q_{23} - Q_{24} = 0.$$

Ved denne fremgangsmåde opnås syv lineære ligninger med de syv ubekendte

$$T_2, T_3, Q_{12}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{14} \text{ og } Q_{24}.$$

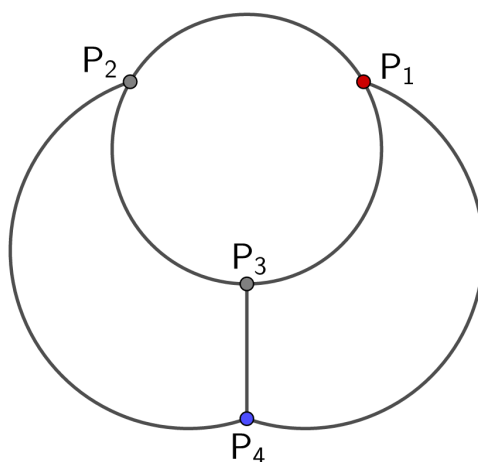
- c) Vis ved hjælp af rangen af henholdsvis total- og koefficientmatrix for systemet af de syv ligninger, at temperaturen i hvert knudepunkt og varmemstrømmen i hver kant kan bestemmes entydigt ud fra de givne oplysninger, og angiv disse størrelser.
Maple-teknisk bemærkning: Hvis man indtaster en matrix med tilstrækkeligt stort række- eller søjleantal, viser Maple ikke matricen på sædvanlig vis i output. Det kan man imidlertid gøre noget ved med kommandoen: `interface(rtablesizer=[indsæt et tal])`.

Temaøvelsesopgaven fortsætter \mapsto

- d) Hvad er summen af strømmene som går væk fra P_1 ?
 e) Hvad er summen af strømmene som går hen mod P_4 ? Kommentér!

||| Opgave 2 Netværk med fire knudepunkter og seks kanter

- a) I dette netværk sætter vi $a = 4$, $R_{12} = 3/4$, $R_{13} = 2$, $R_{14} = 1$, $R_{23} = 2$, $R_{24} = 2/3$, og $R_{34} = 1$.



- b) Opskriv ved hjælp af (*) en ligning for hvert metalstykke i netværket.
 c) Opskriv ved hjælp af den nævnte bevarelseslov en ligning for hvert af de „indre“ knudepunkter.

Ved denne fremgangsmåde opnås otte lineære ligninger med de otte ubekendte

$$T_2, T_3, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{23}, Q_{24} \text{ og } Q_{34}.$$

- d) Tjek at summen af varmemstrømmene som går fra P_1 , er lig med summen af dem som går mod P_4 .
 e) Temperaturen i P_2 er større end i P_3 . Kan vi opnå at de er lige store ved at indsætte et nyt metalstykke fra P_3 til P_4 med en anden (positiv) varmeledningsmodstand?
 f) Sæt igen $R_{34} = 1$. Varmestrømmen fra P_2 til P_3 er positiv. Kan vi vende strømmen ved at indsætte et nyt metalstykke fra P_1 til P_3 ? Findes der fx en en værdi af R_{13} for hvilken

$$Q_{23} = -\frac{1}{2}?$$

Temaøvelsesopgaven er slut