Temaøvelsesopgave i differentialligninger

Rev. 22.11.16

Temperatursvingninger

OPVARMNING:

Lad $\boldsymbol{A}$ *være en vilkårlig reel* 2×2 *matrix.*
a) Vis at hvis $x(t)$ *og* $y(t)$ *tilhører* $C^1(\mathbb{R})$ *, og* $a(t)$ *og* $b(t)$ *tilhører* $C^0(\mathbb{R})$ *, så er differentialligningssystemet*

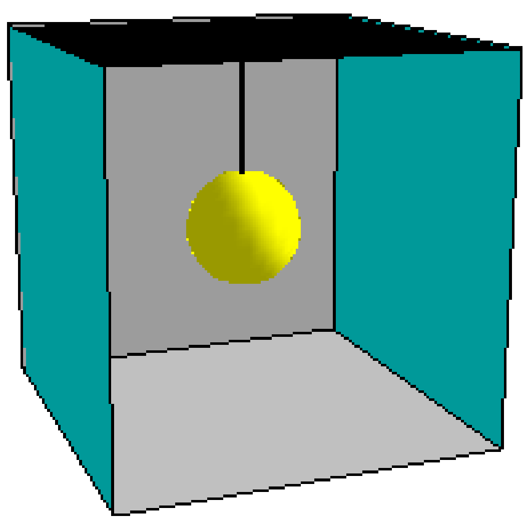
$$(\Theta) \qquad \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$$

lineært.

Vink : Vis at vektorrums - afbildningen $f: \; C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}) \times C^0(\mathbb{R})$
givet ved
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$
er lineær.

b) Formulér "struktursætningen" med henblik på systemet (Θ) .

INTRODUKTION TIL TEMAØVELSEN



I et stort rum (auditorium) ophænges en massiv metalkugle i en tynd uldtråd fra loftet midt i rummet.

Til tiden t = 0 har kuglen temperaturen $M(0) = T_0$.
Temperaturen i det omgivende rum antages at være den samme alle steder i rummet (i passende afstand fra kuglen) og er en funktion $R(t)$ *af tiden* t. *Til tiden* $t = 0$ *er temperaturen* $R(0) = R_0$.

Varmekapaciteten for metalkuglen sættes til værdien $k > 0$.

En simpel model for varmeudvekslingen imellem metalkuglen og rummet giver så følgende differentialligning for temperaturen M(t) af metalkuglen til tiden t .
(Jævnfør Eksempel 1.2 i MA1 side 1.6):

$$(\alpha) \quad \frac{d}{dt}M(t) = -k(M(t) - R(t)), \quad t \geq 0, \quad M(0) = T_0.$$

```
> #  diff(M(t), t) =  -k*(M(t) - R(t));
```

Rumtemperaturen R(t) ønskes tæt på en konstant behagelig værdi R_q.
Til det formål er rummet udstyret med et opvarmningssystem (med termostat) som hæver rumtemperaturen, hvis den er for lav i forhold til R_q, *og som sænker rumtemperaturen, hvis den er for høj i forhold til* R_q.

En simpel model for opvarmningssystemets bidrag $V(t)$ *til rumtemperaturen* $R(t)$ *er derfor følgende :*
$V'(t)$ *er proportional med* $R_q - R(t)$:

$$(\beta) \quad \frac{d}{dt} V(t) = -K\left(R(t) - R_q\right), \quad t \geq 0, \quad R(0) = R_0 \ ,$$

hvor $K > 0$ *betegner en reaktionskonstant for varmesystemet.*

```
> #  diff(V(t), t) =  -K*(R(t) - Rq);
```

OPGAVE 1 :

Antag, at $V(t)$ *er det eneste bidrag til opvarmning og afkøling af rummet. Så er* $R(t) = V(t)$.

a) Vis, at differentialligningerne for $M(t)$ *og* $R(t)$ *i så fald samlet kan skrives på formen* (Θ) .

b) Find den (T_0*-afhængige) partikulære løsning til* (Θ) *som opfylder følgende begyndelsesbetingelser (brug gerne Maple's kommando dsolve) :*

```
> # R0:= 15; k:= 1; K:= 2; Rq:= 20;
```

c) Plot metalkuglens temperatur M(t) og rumtemperaturen R(t) i et passende t-interval, og kombinér graferne i ét plot (så R(t) og M(t) og fx skæringspunkterne med dem kan inspiceres direkte) - idet der benyttes forskellige begyndelsesværdier for metalkuglens temperatur T_0, *fx imellem -6 og 30 med spring på 2 (se Maple's online hjælp under kommandoen "seq" med tilhørende argument "step") .*

*d) Bestem egenværdier og egenvektorer for matricen **A** (med de givne konstanter).*
Hvad har de med den fundne løsning at gøre, og hvordan skal vi fortolke dem mht. plottet?

I følgende opgave betragter vi indledningsvis igen situationen med ukendte begyndelsesbetingelser :

```
> # R0:='R0': k:='k': K:='K': Rq:='Rq':
```

OPGAVE **2** :

Med jævne mellemrum myldrer en masse frysende studerende ind i rummet og efter et stykke tid myldrer de samme (men varme) studerende ud af rummet igen
. Studenterbidraget til opvarmning henholdsvis afkøling af rummet til tiden t vil vi kalde $S(t)$ og modellere den funktion (igen temmelig simplificeret) således :

(γ) $S(t) = B + H\cos(\omega \cdot t + \varphi)$, *hvor $H > 0$, $B > 0$, $\omega > 0$ og $\phi > 0$ er karakteristiske (vinter-) studenterkonstanter.*

```
> #  S:=t->B+H*cos(omega*t+phi);
```

Herefter kan vi skrive den totale rumtemperatur som: $R(t) = V(t) + S(t)$.
a) Hvordan kan differentialligningerne for $M(t)$ og $R(t)$ i så fald samlet skrives på formen (Θ) ?

b) Find den T_0-afhængige partikulære løsning til (Θ) som opfylder følgende begyndelsesbetingelser (igen gerne med dsolve) :

```
> R0:=15: k:=1: K:=2: Rq:=20: B:=10: omega:=4: phi:=1/4*Pi: H:=1:
```

c) Plot metalkuglens temperatur M(t) og rumtemperaturen R(t) i et passende t-interval t og kombinér graferne i ét plot (så R(t) og M(t) og fx skæringspunkterne mellem dem kan inspiceres direkte) - idet der benyttes forskellige begyndelsesværdier for metalkuglens temperatur T_0 som ovenfor.

*d) Bestem egenværdier og egenvektorer for **A** (med de givne konstanter) . Hvad har de med den fundne løsning at gøre, og hvordan skal vi fortolke dem mht. plottet?*

Observér, at uanset metalkuglens begyndelsestemperatur opnås en ganske bestemt (asymptotisk) periodisk svingning (for tilstrækkelig store værdier af t), både for M(t) og for R(t).

Ved 'perioden' for en periodisk funktion af tiden forstås tidsafstanden mellem to på hinanden følgende forekomster af maksimum for funktionen; funktionen $\cos(2t)$ har således perioden π.

e) Angiv middelværdi, amplitude og periode for de to asymptotiske periodiske svingninger - dels for M(t) og dels for R(t).
Værdierne må gerne aflæses ved inspektion af de plottede grafer (±10% er fint nok).

```
> R0:='R0': k:='k': K:='K': Rq:='Rq': B:='B': omega:='omega':
  phi:='phi': H:='H':
```

OPGAVE **3** :

I et andet eksperiment med kuglen placeres den (for) tæt ved termostaten, således at termostaten også (fejlagtigt) måler et (fejlkilde-) bidrag fra strålevarmen fra kuglen. Vi antager, at det ekstra bidrag er givet ved $\mu\, M(t)$ *, hvor* $\mu > 0$ *er en konstant.*

Ligningen (β) forstyrres derved og ændres til :

$$(\beta_\mu) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(t) = -K\left(R(t) + \mu M(t) - R_q\right),\ t \geq 0,\ R(0) = R_0 \ .$$

```
> # diff(V(t),t)=-K*(R(t)+mu*M(t)-Rq);
```

a) Hvordan kan differentialligningerne for $M(t)$ *og* $R(t)$ *i så fald samlet skrives på formen* (Θ) *, når det også her antages, at de studerende stadigvæk myldrer ind og ud af auditoriet, således at* $R(t) = V(t) + S(t)$ *?*

b) Find den T_0*-afhængige partikulære løsning til* (Θ) *som opfylder følgende begyndelsesbetingelser (igen gerne med dsolve) :*

```
> R0:=15: k:=1: K:=2: Rq:=20: B:=10: omega:=4: phi:=1/4*Pi: H:=1:
  mu:=1/2:
```

c) Plot metalkuglens temperatur M(t) og rumtemperaturen R(t) som funktioner af t og kombinér graferne i ét plot (så R(t) og M(t) og fx skæringspunkterne mellem dem kan inspiceres direkte) - idet der benyttes forskellige begyndelsesværdier for metalkuglens temperatur T_0 *som ovenfor.*

d) Bestem egenværdier og egenvektorer for **A** *(med de givne konstanter) . Hvad har de med den fundne løsning at gøre, og hvordan skal vi fortolke dem mht. plottet?*

Observér igen, at uanset metalkuglens begyndelsestemperatur opnås en ganske bestemt (asymptotisk) periodisk svingning (for tilstrækkelig store værdier af t), både for M(t) og for R(t).

e) Bemærk specielt, at den ønskede middelværdi (værdien 20) for den asymptotiske svingning af rumtemperaturen R(t) ikke længere opnås, når fejlkildebidraget $\mu\, M(t)$ *medtages i modellen.*