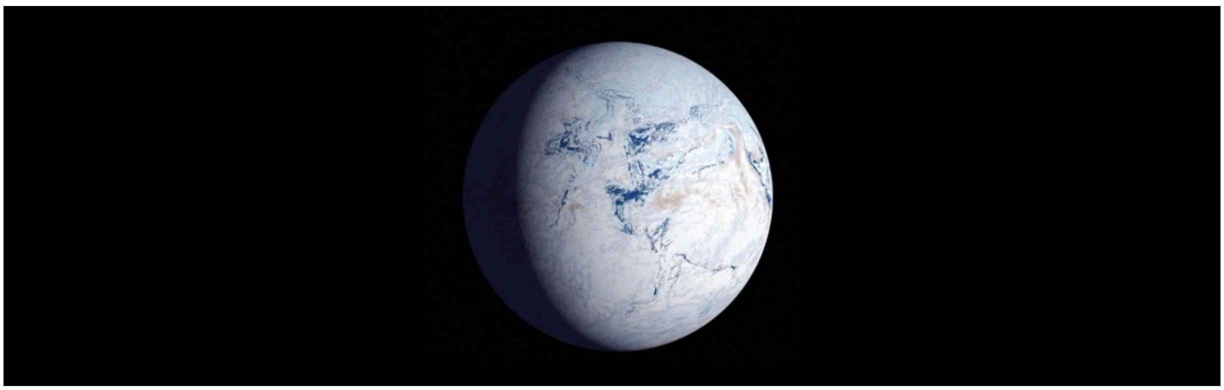
Rev. 14.02.19

Temaøvelsesopgave:

SNOWBALL EARTH?



1. Introduktion

Formålet med denne temaøvelse er at se på en simpel model for Jordens klima. Modellen er baseret på den forudsætning, at Jordens varmeudstråling er lig med den varmestråling den modtager fra Solen. I nogen perioder har Jorden været varm. I andre meget kold. Modellen kan bruges til at forstå den vilde hypotese, kaldet **snowball Earth**, at Jorden engang (for ca 800-600 millioner år siden) var helt frosset til som en snebold som på billedet ovenfor!

Man kan finde mere information i artiklen [1] om "snowball Earth" hypotesen.

2. Teori: Solens stråling og Jordens klima

Populært sagt er vejret tilstanden af atmosfæren i et kort tidsrum. Klimaet derimod er middelværdien af atmosfærens tilstand over en længere periode. Her ser vi på en simpel model for Jordens klima. Klimaet afhænger bl.a. af Jordens albedo ("hvidhed"). Albedo er den procentdel af den indgående stråling som reflekteres af en overflade; $\alpha = 0$ svarer til total absorption og $\alpha = 1$ svarer til total reflektion. Isdækkede områder har en albedo på ca 0.90.

Lad R være Jordens radius og S_0 være fluxen (energi per tid per areal) af Solens varmestråling som Jorden modtager, T er middel temperaturen af Jordens overflade (idag er den ca 288 K = 15°C). Lad os antage ligevægt mellem den stråling Jorden modtager og den den afgiver. Dette kan udtrykkes ved at den afsatte energi per tidsenhed, $E(T)$, er lig med nul:

$$E(T) = \pi R^2(1-\alpha)S_0 - 4\pi R^2\sigma T^4 = 0 \tag{2.1}$$

her er α middel albedo af Jorden ($\alpha = 0.30$) og σ er Stefan-Boltzmann konstanten ($\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{K}^{-4}$). Potensen T^4 kommer fra Stefan-Boltzmann's lov for varmestråling.

Dette giver følgende ligning for Jordens middeltemperatur,

$$T(\alpha, S_0) = \left(\frac{(1-\alpha)S_0}{4\sigma}\right)^{1/4} \tag{2.2}$$

Indsætter man værdien $S_0 = 1380$ Wm $^{-2}$ fås $T = 255$ K. Beregningerne ovenfor tager dog ikke hensyn til, hvordan Jordens overfladetemperatur er påvirket af tilstedeværelsen af en atmosfære. En planet *med* en atmosfære er betydeligt varmere end en planet *uden*. Den faktiske gennemsnitlige temperatur på Jorden er 288 K. Derfor er der omkring 30 K forskel mellem den faktiske gennemsnitlige temperatur på Jorden og ligevægtstemperaturen på 255 K. Denne stigning i temperaturen med ca 30 K er et resultat af den naturlige drivhuseffekt.

I resten af opgaven skal vi analysere temperatur-funktionen T i ligning (2.2) i forskellige situationer. Med en klima model forstås altså her en model for udregning af Jordens middeltemperatur, T.

Opgave 1

(a) Eftervis resultatet $T = 255$ K ved at indsætte de givne konstanter i formlen (2.2). Antag, at Jorden er helt dækket af is. Hvad bliver T i dette tilfælde?

(b) Hvad kan få Jordens middeltemperatur til at falde?

(c) Man ved, at Solens totale flux, S_0, varierer med tiden. En typisk variation er på 0.1%. Det vides ikke med sikkerhed hvor stor den variation har været tidligere. Hvor mange procent ændrer T sig hvis S_0 forøges med 1%?

(d) Plot temperaturen T som funktion af α og S_0, hvor $\alpha \in [0.1, 0.9]$ og $S_0 \in [1350, 1400]$. Plot desuden en række niveaukurver for T i dette område sammen med et gradientplot. NB: Niveaukurverne er hyperbler (skal ikke vises).

(e) Vi ser nu specielt på den niveaukurve som går igennem punktet (0.3, 1380). Beskriv dens fysiske betydning. Vi opfatter nu denne niveaukurve som grafen for en funktion $S_0(\alpha)$, hvor $\alpha \in [0.1, 0.9]$. Bestem forskriften for S_0 og plot dens graf (niveaukurven). Tilpas intervallet for α så det passer til det følgende spørgsmål: Antag at α vokser med 10% til 0.33. Aflæs hvor meget S_0 tilsvarende skal vokse for at klimaet (T) fastholdes.

(f) I dette spørgsmål ser vi på muligheder for et fald i temperaturen T fra 255.5 K til 253.5 K. Betragt de tilsvarende niveaukurver og beskriv dem som grafer for funktioner $S_0(\alpha)$ (forskriften for den første har vi allerede fra spørgsmål (e)). Tegn deres grafer i et fælles koordinatsystem, og besvar de følgende spørgsmål ved aflæsning: For fastholdt α, hvor meget skal S_0 ændres for at opnå det nævnte fald i T. Og omvendt: For fastholdt S_0, hvor meget skal α ændres for at opnå det nævnte fald i T.

(g) Bestem gradienten af $T(\alpha, S_0)$ i punktet (0.3, 1380). Vis at den står vinkelret på tangenten for niveaukurven i dette punkt (vink: brug fx differentialkvotienten af den i spørgsmål e) fundne forskrift for niveaukurven). Hvilken fysisk betydning har gradienten?

3. Anvendelse: Klima model I

Vi skal nu se på en model for Jordens klima, hvor isdækket kan ændre sig med tiden. Først finder vi et

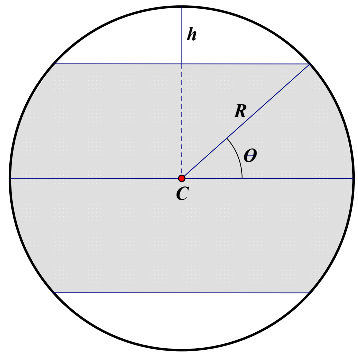


Figure 1: *Skematisk figur der viser Jorden (radius R) med isdækkede poler og længdegraden θ.*

udtryk for Jordens albedo som funktion af dens isdække.

Mørke overflader har lavere albedo værdier. Omvendt har lyse overflader, såsom iskapperne, højere albedo værdier. Hvis overfladetemperaturen falder til under frysepunktet for vand, vil sne og is på Jordens overflade få albedo til at stige. Som et resultat vil mere sollys reflekteres tilbage ud i rummet og temperaturerne vil falde yderligere. Omvendt, ved opvarmning af Jorden vil den lavere albedo (mindre is) lede til yderligere opvarmning. Dette er et eksempel på en **positiv feedback effekt**.

Udregning af albedo:

Lad os antage, at polerne er dækket af is; se tegningen i fig. 1. Overfladen fra længdegrad $-\theta$ til $+\theta$ er landmasse eller hav, mens resten af Jordens overflade er dækket af is. I figuren ovenfor er arealet af isen ved polerne A_I, mens landmasse og hav har samlet areal A_L (således, at $A_I + A_L = \pi R^2$). Dvs. albedo bliver en funktion af vinklen θ, $\alpha = \alpha(\theta)$. Vi har

$$A_I(\theta) = R^2(\pi - 2\theta - \sin 2\theta), \quad A_L = R^2(2\theta + \sin 2\theta) \tag{3.1}$$

Hvis $\alpha_I = 0.9$ betegner albedo af isen og $\alpha_L = 0.1$ er albedo af havet og landmassen fås følgende formel for middel albedo af Jorden

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi R^2}(\alpha_I A_I + \alpha_L A_L) \tag{3.2}$$

Opgave 2

(a) Udled formlerne for A_I og for A_L som funktion af θ. (Vink: formlen for arealet af et udsnit af en cirkel med radius R, er $A = \frac{1}{2}R^2(\phi - \sin\phi)$, hvor ϕ er åbningsvinklen, dvs. $\phi = \pi - 2\theta$).

(b) Plot $\alpha(\theta)$ som funktion af θ i intervallet $\theta \in [0, \pi/2]$. Hvad er $\alpha'(\theta)$? Hvad er max og min værdierne af denne funktion?

Udregning af energi-balance:

For at se hvordan albedo og temperatur påvirker hinanden gensidigt, må vi antage en sammenhæng $\theta(T)$ mellem vinklen θ og temperaturen T. Vi har nu en model, hvor α kan variere som funktion af vinklen θ. Energien E per tidsenhed kommer nu til at afhænge af både T og θ. Den afsatte energi på Jorden per tidsenhed er

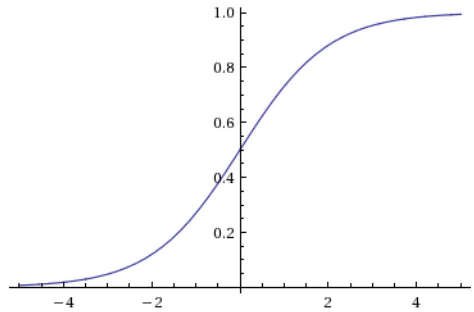


Figure 2: *Sigmoid funktionen* $s(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

$$E(T, \theta) = \pi R^2 (1 - \alpha(\theta(T))) S_0 - 4\pi R^2 \sigma T^4 \tag{3.3}$$

Ved ligevægt gælder derfor

$$1 - \alpha(\theta(T)) = \frac{4\sigma}{S_0} T^4 \tag{3.4}$$

Ved høj temperatur skal vinklen θ gå mod $\pi/2$ (ingen is), ved lavere temperaturer skal den gå mod nul (meget is). Vi vælger at bruge Sigmoid-funktionen $s(x) = 1/(1+e^{-x})$ som simpel fænomenologisk model for den sammenhæng. Se Sigmoid-kurven i fig. 2. Kurven for $\theta(T)$ skal være forskudt mod højre således, at i området omkring en endelig temperatur T^* skifter vinklen over fra lave værdier til højere værdier. T^* er altså den temperatur hvor der *begynder* at ske en overgang (fase-overgang) fra tilstanden med isdække til tilstanden uden isdække. Dvs,

$$\theta(T) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\exp(-(T - T^*)/10) + 1} \tag{3.5}$$

Her er $T - T^*$ divideret med en faktor, der er valgt til 10 K. Dette tal bestemmer hvor hurtigt overgangen går. I andre modeller vælger man albedo til at være en sigmoid-funktion, her har vi valgt vinklen θ som sigmoid-funktion.

Opgave 3

Her antager vi, at uden en atmosfære er $T^* = 257$ K og bruger $S_0 = 1380$ Wm^{-2}.

(a) Plot funktionen $\theta(T)$ i ligning (3.5) for $T \in [100, 400]$.

(b) Lav et plot der samtidig viser følgende to kurver som funktion af T: $y_1(T) = 1 - \alpha(\theta(T))$ og $y_2(T) = (4\sigma/S_0)T^4$ i intervallet $T \in [150, 350]$, jvf. ligning (3.4). (Vink: brug ligning (3.2) og ligning (3.5)).

(c) Aflæs eventuelle skæringspunkter mellem de to kurver – er der mere end ét skæringspunkt? Bemærk: her regnes to temperaturer for ens hvis deres absolutte forskel er mindre end 10 K.

Forklarende kommentar: hvis man finder mere end et skæringspunkt betyder det, at med den samme Sol-parameter (S_0) er der to mulige løsninger for temperaturen. Der er altså to muligheder for klimaet. Ét skæringspunkt giver en mulighed for klimaet.

4. Anvendelse: Klima model II

Vi skal nu se på en model hvor man inkluderer den naturlige drivhuseffekt gennem den såkaldte ”drivhuskonstant", f. Drivhuseffekten refererer til atmosfærens evne til at absorbere og reflektere varmestrålingen fra Jordens overflade. En tykkere atmosfære er mere effektiv til at absorbere energi. Vi antager, at atmosfæren er transparent for solstråling, og absorberer en brøkdel f af Jordens stråling på grund af tilstedeværelsen af drivhusgasser.

Inkluderes denne konstant, f, kan man udlede [2] en ny ligning for Jordens overfladetemperatur,

$$T(\alpha, S_0, f) = \left(\frac{(1-\alpha)S_0}{4(1-f/2)\sigma} \right)^{1/4} \tag{4.1}$$

Opgave 4

(a) Drivhuskonstanten idag er ca. $f = 0.77$. Indsæt dette og $\alpha = 0.3$ i ligning (4.1) og bestem den nye overfladetemperatur, T. Stemmer dette overens med $T = 288$ K?

(b) Vurder værdien af θ idag, dvs. hvor stor en del af Nord- og Sydpolen er dækket af is? (Vink: Find et kort over Sydpolen og aflæs den længdegrad som Sydpolens is når op til).

(c) Plot temperaturen T som funtion af α og f med $S_0 = 1380$, hvor $\alpha \in [0, 1]$ og $f \in [0.60, 0.90]$. Plot desuden en række niveaukurver for T i dette område sammen med et gradientplot. NB: Niveaukurverne er hyperbler (skal ikke vises). Er gradienterne vinkelrette på niveaukurverne?

(d) Bestem den niveauflade for $T(\alpha, S_0, f)$ som går igennem punktet $(0.3, 1380, 0.77)$. Hvilken fysisk betydning har den? NB: Niveaufladerne er hyperbolske paraboloider (skal ikke vises). Bestem en ligning for tangentplanen til niveaufladen i punktet $(0.3, 1380, 0.77)$.

(e) Bestem gradienten for $T(\alpha, S_0, f)$ i punktet (0.3, 1380, 0.77). Vis at gradienten i dette punkt står vinkelret på tangentplanen fundet i spørgsmål (d). Hvilken fysisk betydning har gradienten?

(f) Hvad kan få Jordens middeltemperatur til at stige?

Opgave 5

Vi antager, at med en atmosfære er $T^* = 285$ K og bruger igen $S_0 = 1380$ Wm^{-2}.

(a) Gentag opgave 3 med indsættelse af konstanten $f = 0.77$. Dvs plot de to tilsvarende kurver y_1 og y_2 for $T \in [150, 350]$ og aflæs eventuelle skæringspunkter mellem dem. Er der mere end et skæringspunkt, og ved hvilken temperatur? Bemærk: her regnes to temperaturer for ens hvis deres absolutte forskel er mindre end 10 K.

Vink: Vis først, at der ved ligevægt gælder $1 - \alpha(\theta(T)) = 4(1 - f/2)(\sigma/S_0)T^4$.

(b) Hvad betyder dette resultat for Jordens klima? Er vi i en kold periode, eller en varm periode? Hvordan kan dette resultat bruges til at argumentere for muligheden af en kold periode, snowball earth, for mere end 600 millioner år siden?

Snowball Earth er den hypotetiske tilstand, hvor jorden er helt dækket af iskapper. Selvom de nuværende forhold på planeten ikke opfylder betingelserne for en snebold-jord, er det muligt, at Jorden engang oplevede en sådan tilstand.

References

[1] Hoffman, Paul F., and Daniel P. Schrag. "Snowball Earth" Scientific American 282 (2000): 68-75.

[2] "Idealized greenhouse model". In Wikipedia, The Free Encyclopedia. (2013, December 21).