

Skovbrand

Tema-opgave om vektoranalyse (fuld version)



Figur 1: Brand!!

1 Formål

Denne tema-opgave handler om en velkendt form for natur-katastrofer: På en vindstille sommerdag går der pludselig ild i en knastør skov og brandens frontkurve udbreder sig straks cirkulært ud fra antændingspunktet.

Men hvis vinden blæser (op) og derved fører ilt til branden fra en given retning er frontkurven langt fra cirkulær.

Formålet med denne tema-opgave er at finde tidsforløbet af skovbrande, dels med hensyn til hvor stort et skovområde der er blevet afbrændt til et givet tidspunkt og dels med hensyn til udbredelsesformen, altså formen af brandfrontkurven til tiden t efter antænding.

Der er selvsagt adskillige gode grunde til at bekymre sig om disse sager. Det fremgår også tydeligt af følgende citater fra henholdsvis [Wik1] og [FA]:

"A wildfire, also known as a forest fire, vegetation fire, grass fire, brush fire, or bush fire (in Australia), is an uncontrolled fire often occurring in wild land areas, but which can also consume houses or agricultural resources. Common causes include lightning, human carelessness and arson.

One main component of Carboniferous north hemisphere coal is charcoal left over by forest fires. The earliest known evidence of a wildfire dates back to Late Devonian period (about 365 million years ago).

The powerful updraft caused by a large wildfire will draw air from surrounding areas. These self-generated winds can lead to a phenomenon known as a firestorm.

... models predict an elliptical shape [of the fire's front line] when the ground is flat and the vegetation is homogeneous.

... All the large catastrophic fires in the United States have been wind driven events where the amount of fuel (trees, shrubs, etc.) has not been the most important factor in the fire spread."

"A working knowledge of the effects of wind and other weather elements on fire behaviour, supported by accurate fire intelligence, is vital for good suppression planning. Without good fire behaviour information firefighters are unable to:

- determine the number of firefighters and level of equipment necessary;
- identify the location of suitable areas for backburning; and
- ensure that the general public is informed about the precise fire situation."

Se endvidere [Wik2] der indeholder en liste over nogle af de største kendte skovbrande i nyere tid.



Figur 2: Brandbekæmpelse.

2 Modellering af skov, antændelse, vind, og tab

Konkret betragtes et rektangulært vandret skov-område S . Vi antager, at skoven er fuldstændig homogen med konstant tæthed: ρ træer pr. arealenhed. Træerne har alle samme højde og samme brandtekniske beskaffenhed. Vi vil groft antage, at vi kan betragte brandens udbredelse som et plant 2-dimensionalt problem - herunder at udbredelsen foregår langs en veldefineret brandfront-kurve.

1. Hvorfor er det en grov antagelse?

Vi indfører derfor et 2D-koordinatsystem i skovens plan således at Origo ligger i midten af skoven og således at skoven iøvrigt modelleres ved:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -L \leq x \leq L \text{ og } -M \leq y \leq M\} \quad , \quad (1)$$

hvor L og M er givne værdier for skovens (halve) længde og (halve) bredde, henholdsvis: $L \in]0, \infty]$, og $M \in]0, \infty]$. Skovens areal er altså (hvis ellers L og M begge er endelige): $A(S) = 4LM$.

Antændelsesstedet betegnes med $p = (x_0, y_0) \in S$.

Vinden antages konstant i størrelse og retning og repræsenteres derfor ved et konstant plant vektorfelt \mathbf{W} med længden W i (x, y) -planen. Der findes altså en konstant vinkel θ og en konstant vind-'fart' W , således at

$$\mathbf{W}(x, y) = (W \cos(\theta), W \sin(\theta)) \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad . \quad (2)$$

Vi lader $\Omega(t) \in S$ betegne det del-område af S , der til tiden $t > 0$ er blevet afbrændt. Det tilsvarende udbrændte areal er så

$$A(t) = \text{Areal}(\Omega(t)) \quad , \quad t > 0 \quad . \quad (3)$$

En del af opgaverne nedenfor går ud på at finde dette areal i forskellige givne situationer. Arealet svarer jo præcis til antallet af tabte træer ved branden: $\text{Tab}(t) = \rho A(t)$.

Initielt vil branden typisk udbrede sig som en ellipse med voksende halvaksler og med en konstant translationshastighed (i vindretningen). Branden vil altså typisk danne en hovedfront, en halefront og to flanker. Fremdriften er størst ved hovedfronten, hvor der afbrændes flest træer pr. tidsenhed. Fremdriften er lille - men ikke nødvendigvis forsvindende - i halen, hvor brandfronten bevæger sig baglæns i retning op mod vinden.

Hvis der ikke er nogen udefra kommende vind, altså hvis $W = 0$, vil udbredelsen dog være fuldstændig symmetrisk ud fra antændelsesstedet til ethvert tidspunkt $t > 0$ - hvis ellers skoven er tilstrækkelig stor.

3 Model uden vind

Den cirkulære udbredelse af brandkurven (med $W = 0$) kan modelleres på følgende måde, hvor ϕ betegner retnings-vinkel-parameteren, $\phi \in [-\pi, \pi]$. Tiden betegnes med $t > 0$ og $a > 0$ er en konstant, der afhænger af skovens beskaffenhed, tæthed, træhøjde, tørhed, etc.:

$$\begin{aligned} x(t, \phi) &= at \cos(\phi) \\ y(t, \phi) &= at \sin(\phi) \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Ovenstående model medfører specielt, at radius af det cirkulære afbrændte område $\Omega(t)$ vokser proportional med tiden t .

2. Antag ovenstående cirkulære udbredelsesmodel (4) og antag, at skoven er enorm stor, $L = M = \infty$. Hvad er arealet $A(t)$ af $\Omega(t)$ som funktion af t når branden er antændt i et givet punkt (x_0, y_0) til tiden $t = 0$?
3. Antag igen (4) og antag nu mere realistisk, at skoven har endelig udstrækning givet ved endelige værdier af L og M , men antag også (lidt urealistisk) at modellen (4) gælder uanset hvor mange træer, der er tilbage i skoven. Hvor lang tid går der fra antænding, svarende til $t = 0$ på stedet (x_0, y_0) indtil skoven er helt udbrændt?

For enhver fastholdt retning ϕ_0 fås fra modellen (4) en t -parametriseret kurve langs hvilken den til den retning hørende "brand-front-partikel" bevæger sig:

$$\mathbf{r}_{\phi_0}(t) = (x(t, \phi_0), y(t, \phi_0)) = (at \cos(\phi_0), at \sin(\phi_0)) \quad . \quad (5)$$

4. Bestem "brandfrontpartiklens" hastighed og fart for enhver given værdi af ϕ_0 og til ethvert givet tidspunkt t .

Vi vil nu indføre følgende modificerede tidsafhængige *eksplosions-vektorfelt* i planen (jvf. [M] Eksemplerne 8.5, 8.12, 9.2, 9.7, 9.13, og 10.2.):

$$\mathbf{V}_t(x, y) = \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \right) \quad , \quad \text{for alle } t > 0 \quad . \quad (6)$$

For ethvert fastholdt $t = t_0$ er $\mathbf{V}_{t_0}(x, y)$ faktisk et eksplosionsvektorfelt i planen - på nær den konstante faktor t_0 . Det er Gauss' sætning for sådanne plane vektorfelter, vi i det følgende vil benytte til en alternativ bestemmelse af areal-funktionen $A(t)$.

5. Vis, at kurverne $\mathbf{r}_{\phi_0}(t)$ er flowkurver for det tidsafhængige vektorfelt $\mathbf{V}_t(x, y)$ i følgende forstand (som er 4 ækvivalente formuleringer af den egenskab, at tangentvektorfeltet for kurverne på ethvert sted netop er værdien af vektorfeltet \mathbf{V} på stedet):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{\phi_0}(t) &= \mathbf{V}_t(x(t, \phi_0), y(t, \phi_0)) \\ \mathbf{r}'_{\phi_0}(t) &= \left(\frac{x(t, \phi_0)}{t}, \frac{y(t, \phi_0)}{t} \right) \\ (x'(t, \phi_0), y'(t, \phi_0)) &= \left(\frac{x(t, \phi_0)}{t}, \frac{y(t, \phi_0)}{t} \right) \\ (t x'(t, \phi_0), t y'(t, \phi_0)) &= (x(t, \phi_0), y(t, \phi_0)) \end{aligned} \quad (7)$$

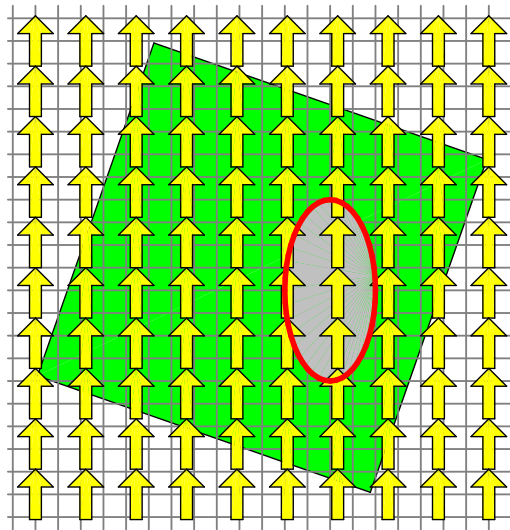
6. Bestem divergensen af det plane vektorfelt $\mathbf{V}_{t_0}(x, y)$ for ethvert fastholdt tidspunkt $t_0 > 0$ og benyt Gauss' divergenssætning for plane vektorfelter (se Sætning 1 i afsnit 5 nedenfor) til at verificere følgende differentiaalligning for arealfunktionen $A(t)$:

$$\frac{d}{dt} A(t)|_{t_0} = 2 \frac{A(t_0)}{t_0} \quad . \quad (8)$$

7. Find samtlige løsninger til differentiaalligningen

$$\frac{d}{dt} A(t) = 2 \frac{A(t)}{t} \quad , \quad t > 0 \quad . \quad (9)$$

Benyt dernæst begyndelsesbetingelsen $A(1) = \pi a^2$ til at finde arealfunktionen $A(t)$ for den cirkulære brand som den er repræsenteret i (4). Sammenlign med opgave 2.



Figur 3: Øjebliksbillede af elliptisk udbredt brandzone.

4 Model med konstant vind og konstant vindretning

Som allerede bemærket i indledningen spiller vinden en meget stor rolle for udbredelsen af skovbrande. En oplagt ide er at modificere den cirkulære model til en "elliptisk" model med translation i vindretningen. Det er præcis hvad der gøres i [R], hvorfra vi citerer:

"Under constant conditions for homogeneous, non-spotting fuels it is generally accepted that a fire ignited at a point will expand, at a constant rate, as an ellipse of the form:

$$\begin{aligned} x(t, \phi) &= at \cos(\phi) \\ y(t, \phi) &= bt \sin(\phi) + ct \end{aligned} \quad (10)$$

where t is time, the origin being the point of ignition and the y -axis being the wind direction. The forward rate v , the lateral rate u and the back rate w are defined as:

$$\begin{aligned} v &= b + c \\ u &= a \\ w &= b - c \end{aligned} \quad (11)$$

The Canadian Forest Fire Behaviour Prediction System (CFFBPS) assumes elliptical growth and has documented values of u , v , and w for a very large set of constant parameters affecting a fire. It has also been observed that, within certain limits, the ratio a/b is a function of wind speed only; this is also an assumption of the CFFBPS."

Bemærk, at i denne model er det klart antaget, at antændingspunktet er $(x_0, y_0) = (0, 0)$ og vinden er i y -aksens positive retning således at $\mathbf{W} = (0, W)$.

De nye konstanter $b \geq a$ og $c \geq 0$ er ligesom a udtryk for brandtekniske egenskaber ved skovmaterialet, nu med vinden (og den tilsvarende tilførsel af ilt) som en ny afgørende parameter.

Vi vil antage, at $b > c \geq 0$, således at brandfront-ellipserne har en egentlig baglæns udbredelse, altså op imod vinden, jævnfør figur 4 og opgave 15.

Bemærk, at for fastholdt retning ϕ_0 bevæger "brand-front-partiklerne" sig også her langs rette parametriserede linjer: $\mathbf{r}_{\phi_0}(t)$.

8. Bestem "brandfrontpartiklernes" hastighed $\frac{d}{dt}\mathbf{r}_{\phi_0}(t) = \mathbf{r}'_{\phi_0}(t)$ og fart $\|\mathbf{r}'_{\phi_0}(t)\|$ for enhver værdi af ϕ_0 og til ethvert givet tidspunkt t .
9. Hvor på brandfrontkurven afbrændes flest træer pr. tidsenhed?
10. Vi betragter stadig den generelle model (10) med givne værdier for a , b , og c . Brandfrontkurven til tidspunktet $t_0 > 0$ kaldes \mathbb{E}_{t_0} .

- i) Find en ligning for \mathbb{E}_{t_0} .
- ii) Vis, at \mathbb{E}_{t_0} er en ellipse.
- iii) Find halvakslerne for \mathbb{E}_{t_0} .
- iv) Find arealet $A(\mathbb{E}_{t_0})$ af det (udbrændte) område, som til tiden t_0 er afgrænset af brandfrontkurven \mathbb{E}_{t_0} .
- v) Find et udtryk for længden $L(\mathbb{E}_{t_0})$ af brandfrontkurven. Beregn længden med Maple for enhver værdi af a , b , og c . Diskutér resultatet. Giver det en genkendelig værdi i de specielle tilfælde hvor $a = b$ og $c = 0$?
- vi) Find *excentriciteten* $e(\mathbb{E}_{t_0})$ af brandfrontkurven.
- vii) Find koordinaterne for *fokalpunkterne* $P_1(t_0)$ og $P_2(t_0)$ for \mathbb{E}_{t_0} .
- viii) Vis, at antændingspunktet for branden er et (fælles) fokuspunkt for (samtlige brandfrontkurver) \mathbb{E}_{t_0} hvis og kun hvis der gælder en ganske bestemt relation mellem konstanterne a , b , og c . Hvilken relation er det?
- ix) Find en funktion $f(x,y)$ med den egenskab, at niveaukurverne for $f(x,y)$ netop er brandfrontkurverne \mathbb{E}_{t_0} , dvs. således at der gælder:

$$\mathbb{E}_{t_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = t_0\} \quad \text{for alle } t_0 \in [0, \infty[\quad . \quad (12)$$

- x) Benyt Maple (eventuelt 'contourplot'-kommandoen og resultatet af ovenstående opgave) til at plote brandfrontkurverne for forskellige t_0 -værdier og for konkret valgte værdier af a , b , og c .
 - xi) Find længden $p(\phi_0, t_0)$ af projektionen af $\mathbf{r}'_{\phi_0}(t_0)$ på brandfrontkurvens udadrettede enhedsnormalvektor i ethvert punkt på brandfrontkurven \mathbb{E}_{t_0} . Diskutér resultatet i relation til Opgave 9 ovenfor.
 - xii) Find kurveintegralet af $p(\phi, t_0)$ langs ellipsen \mathbb{E}_{t_0} . Diskutér og tolk resultatet; vink: brug Gauss' sætning (se afsnit 5 nedenfor) og resultatet af delopgave iv) ovenfor; se også Opgave 12 nedenfor.
11. Som i opgave 3: Find (for endelige værdier af L og M og ved brug af den elliptiske model i (10)) et udtryk for hvor lang tid, der går fra antænding i punktet (x_0, y_0) til skoven er helt udbrændt. Det antages også her at den anvendte elliptiske model for udbredelse holder uanset hvor mange træer der er tilbage i skoven.

Forholdet mellem vindens fart og hovedfront-farten $b + c$ kalder vi k , dvs:

$$k = \frac{W}{b+c} \quad (13)$$

12. Gennemfør de samme betragtninger som for den cirkulære model. Det vil sige:
- Skriv den elliptiske model (10) på vektor-parametriseret form som i (5).
 - Benyt det *samme* tidsafhængige vektorfelt som for den cirkulære model (6) og løs de tilsvarende opgaver 5, 6, og 7 for den elliptiske model, idet man dog selvsagt ved løsning af den nye version af opgave 7 nu skal benytte den relevante begyndelsesbetingelse for den elliptiske model.
13. Hvordan ser den elliptiske model (10) ud i det givne (x, y) -koordinatsystem hvis branden antændes i et (andet) givet punkt (x_0, y_0) , som ikke nødvendigvis er $(0, 0)$?
14. Hvordan ser den elliptiske model (10) ud i det givne (x, y) -koordinatsystem hvis branden antændes i et givet punkt (x_0, y_0) og hvis den konstante vind er givet ved en (anden) vektor W , som ikke nødvendigvis peger i y -aksens positive retning, se (2)?

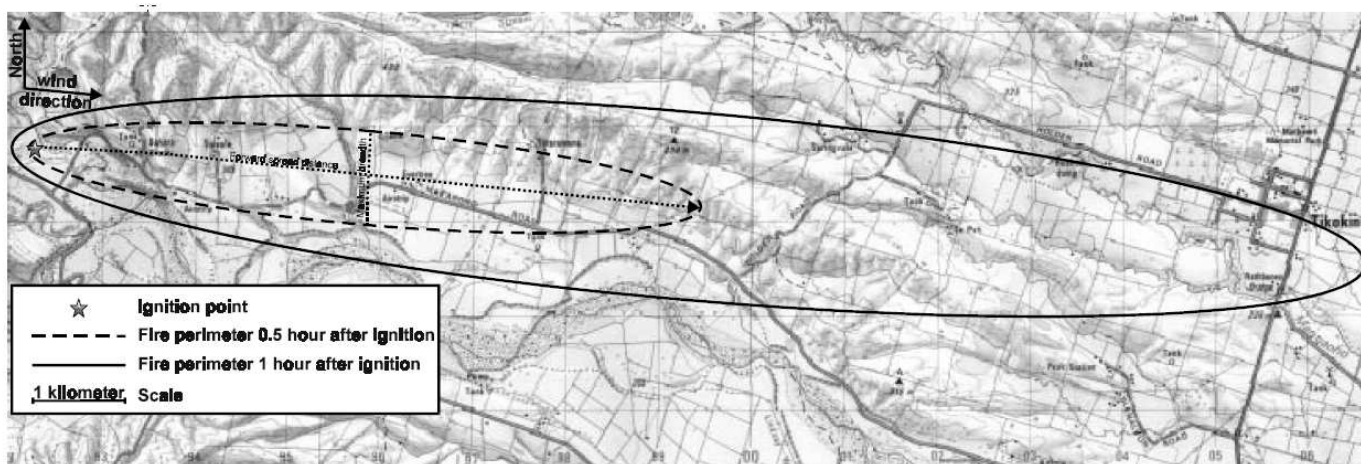


Figure 4. Free-burning fire growth projected for conditions similar to those experienced during the 1991 Tikokino Fire using the *Field Guide*.

Figur 4: Elliptisk udbredelse af brandzone.

15. Bestem værdierne a , b , c og k for Waipawa branden, 31. januar 1991 ved Tikokino i New Zealand, hvis initielle udbredelse er vist i Figur 4. Det oplyses, og ses, at den ellipseformede brandfront efter 30 minutter var 7.2 km lang og 1 km bred; efter 60 minutter var den 2 km bred og 14.5 km lang. Efter 60 minutter var brandhalen rykket 350 meter i modvindsretning fra brandens antændelsepunkt. Vindhastigheden var 56 km/t i den angivne retning.

5 Den 2-dimensionale, plane version af Gauss' sætning

Med argumenter og opstilling som i [M] afsnit 9.3 fås og motiveres følgende plane version af Gauss' divergens-sætning:

Sætning 1 (Gauss' sætning) Lad Ω betegne et plant område med randkurve $\partial\Omega$ og udadrettet enhedsnormalvektorfelt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ langs med randkurven. For ethvert vektorfelt \mathbf{V} i planen gælder så følgende:

$$\frac{d}{du}A(u)|_{u=0} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{V}) \, d\mu = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \, d\mu = \operatorname{Flux}(\mathbf{V}, \partial\Omega) \quad , \quad (14)$$

hvor fluxen altså skal beregnes med hensyn til det udadrettede enhedsnormalvektorfelt langs med randkurven af det givne plane område.

Bemærk, at det sidste lighedstegn definerer fluxen af det plane vektorfelt ud igennem randkurven. Venstre siden, $\frac{d}{du}A(u)|_{u=0}$, er den afledede (taget i $u = 0$) af arealet som funktion af flowparameteren u for vektorfeltets flowkurver.

Litteratur

- [A] M. E. Alexander, *Estimating the length-to-breadth ratio of elliptical forest fire patterns*, Proc. 8th Natl. Conf. on Fire and Forest Meteorology, Society of American Foresters, Washington, D.C., 1985.
- [FA] L. G. Fogarty and M. E. Alexander, *A Field Guide for predicting Grassland Fire potential: Derivation and Use*, Forest and Rural Fire Research, Fire Technology Transfer Note, Number -20, July 1999.
- [M] S. Markvorsen, *Integration i flere Variable*, Institut for Matematik, 2009.
- [R] G. D. Richards, *An Elliptical Growth Model of Forest Fire Fronts and its Numerical Solution*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, 1163–1179 (1990).
- [Wik1] Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Forest_fire
- [Wik2] Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_forest_fires