

Temaøvelsesopgave 3

SKALA-INVARIANS AF FLODSYSTEMER

1 Introduktion

Formålet med denne temaøvelse er at se på et bestemt fænomen i naturen – skala-invarians af flodsystemer – og at forstå dem i relation til lineære afbildninger af planen. Temaøvelsen er inspireret af artiklen, A. Maritan et al.: ”Scaling laws for river networks” [1].

Floder er særdeles vigtige i forståelsen af hvordan landskaber dannes. Et geomorfologisk problem er følgende: Hvis man fordobler længden af en flod, hvordan ændrer arealet sig så af hele flodsystemet? Eller omvendt, hvordan varierer formen af flodsystemet alt afhængigt af dets areal? Skala-invarians er et matematisk begreb, der kan bruges til at adressere sådanne problemer.



Figure 1: *Amazon-floden (Wikipedia).*

Flodsystemer er blot et af naturens smukke fænomener der udviser en bestemt form for skala-invarians. Skala-invarians betyder, at hvis man forstørrelser et billede af et flodsystem op (se figur 1), så vil det i det store hele se ud som det oprindelige billede. Det er så at sige ikke umiddelbart til at se hvilken højde billedet er taget i. I denne øvelse skal vi prøve at forstå hvordan flodsystemer udviser skala-invarians ved hjælp af lineære afbildninger. I næste afsnit beskrives den nødvendige teori.

2 Teori: Affine afbildninger af planen

I denne opgave får vi brug for at se på affine afbildninger af planen. En affin afbildning er en lineær afbildning efterfulgt af en forskydning (translation). Der indføres et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen, så at ethvert punkt har koordinater (x, y) .

En affin afbildning af planen er en afbildning $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, således at

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{b} \quad (2.1)$$

hvor A er en 2×2 matrix og \mathbf{b} en vektor,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Når $\mathbf{b} = (0, 0)$ er f en lineær afbildning med afbildningsmatrix A .

En affin afbildning tager en figur i planen og deformerer den til en anden figur ved at vi lader afbildningen "virke" på alle punkterne i den oprindelige figur.

I det følgende ser vi kun på *regulære* affine afbildninger, dvs afbildninger med determinanten $\det A \neq 0$. I dette tilfælde vil et lukket område med endeligt areal blive afbildet over i et andet lukket område med endeligt areal ved den affine afbildning.

Eksempel

Her er tre simple eksempler på regulære affine afbildninger givet ved matricerne,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_1 er den trivielle afbildning (identitetsmatricen), A_2 er en refleksion i y -aksen og A_3 er såkaldt shear. Mere om dette nedenfor.

Opgave 1

(a) Vis, at en affin afbildning afbilder en linje over i en linje. Vink: Brug en parameterfremstilling for den oprindelige linje.

(b) Vis, at en regulær affin afbildning f afbilder et parallelogram på et parallelogram, dvs at hvis M er et parallelogram så er $f(M)$ også et parallelogram.

En affin afbildning kan beskrives som en kombination af forskellige grundlæggende afbildninger. Man kan vise, at en vilkårlig affin afbildning er en sammensætning af et endeligt antal translationer, rotationer, skalering og shear. Se figur 2-5, der viser hvordan et kvadrat bliver afbildet under forskellige affine afbildninger.

1) En **translation** (parallelforskydning) er en affin afbildning (2.1) givet ved matricen $A = A_1$ i eksemplet ovenfor. Dvs en translation afbilder et punkt \mathbf{p} over i punktet \mathbf{p}' ved at addere vektoren $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Altså, et punkt bliver rykket med b_1 enheder i x -aksens retning og b_2 enheder i y -aksens retning.

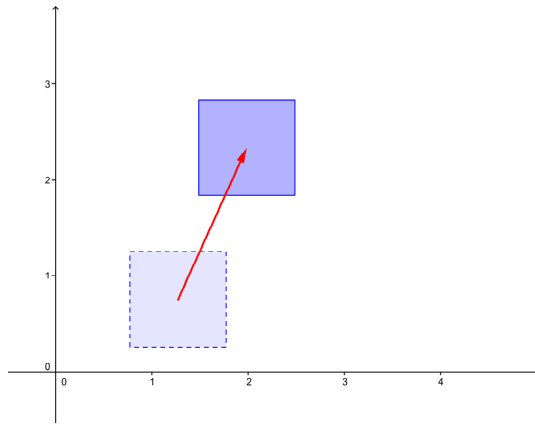


Figure 2: *Translation i planen af et kvadrat*

2) En **rotation** om origo er en affin afbildning, hvor objekter bliver drejet med en vinkel θ om origo. Dvs en rotation afbilder punktet $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ over i punktet $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, hvor \mathbf{p} og \mathbf{p}' har samme afstand fra centrum og hvor vinklen mellem vektor \mathbf{p} og \mathbf{p}' er lig med θ . Ved at indføre polære koordinater kan man se, at en sådan rotation (mod uret) er givet ved matricen,

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

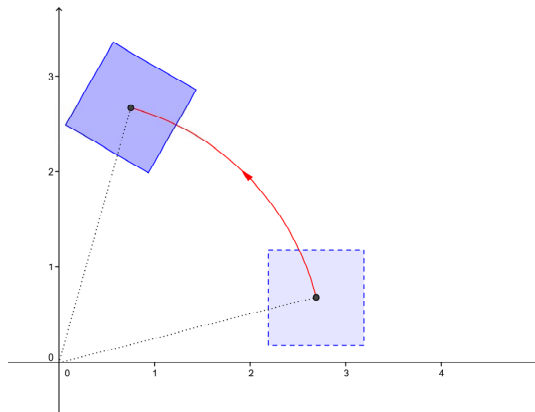


Figure 3: *Rotation i planen af et kvadrat*

3) En **skalering** omkring origo er en affin afbildning (2.1) givet ved diagonal-matricen

$$A_s = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

hvor $a_{11} \neq 0$ og $a_{22} \neq 0$ og $\mathbf{b} = 0$. Dvs, x -koordinater bliver ganget med a_{11} og y -koordinater med a_{22} . Diagonalelementerne kan være negative; f.eks. svarer $-a_{11} = a_{22} = 1$ til en refleksion i y -aksen. Hvis

$a_{11} = a_{22}$ bliver x og y -koordinater ganget med den samme faktor. Dette er et eksempel på geometrisk lighedannethed, eller selv-similaritet. I dette tilfælde kaldes $s = |a_{11}|$ for skaleringsfaktoren; intuitivt nok kaldes afbildningen en kontraktion hvis $s < 1$ og en forstørring hvis $s > 1$.

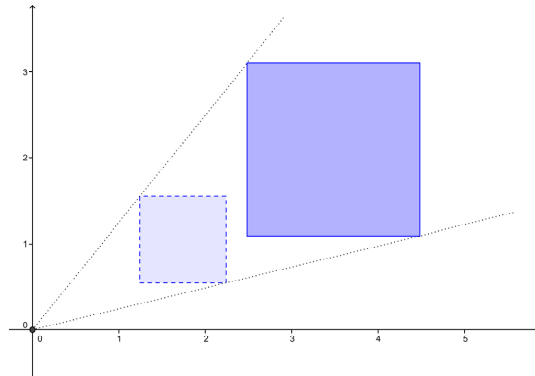


Figure 4: *Skalering i planen af et kvadrat*

4) **Shear** er en afbildning, hvor alle punkter langs en given linje L forbliver fast, mens andre punkter forskydes parallelt med L med en afstand i forhold til deres vinkelrette afstand fra L . F.eks. har et shear langs x -aksen med en faktor r afbildningsmatricen,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

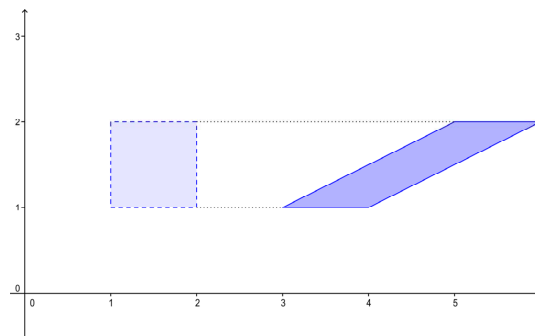


Figure 5: *Shear i planen af et kvadrat (langs x-aksen)*

Opgave 2

Lad K betegne et kvadrat i planen og lad f betegne en lineær afbildning, $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, med tilhørende afbildningsmatrix A , som ikke nødvendigvis er regulær. At f er en lineær afbildning betyder, at vektoren $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

(a) Udtryk arealet af billedet $f(K)$ ved hjælp af arealet af K og matricen A .

Lad $K1$ og $K2$ betegne to kvadrater i planen og antag, at de begge har et hjørnepunkt i origo. Vælg selv to konkrete kvadrater $K1$ og $K2$.

(b) Argumenter for, at der generelt findes en lineær afbildning f således, at $f(K1) = K2$.

(c) Find afbildningsmatricen for dine konkret valgte firkanter.

(d) Er der kun én lineær afbildning der opfylder $f(K1) = K2$?

Opgave 3

Når man sammensætter to lineære afbildninger, svarer det på matrixform til at man ganger deres afbildningsmatricer sammen. Det kan indses på følgende måde. Hvis den første afbildning er givet ved $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ og den anden ved $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, så er den sammensatte afbildning givet ved $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto B(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (BA) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Med andre ord er den sammensatte afbildning givet ved afbildningsmatricen BA (bemærk faktorernes orden).

(a) Et kvadrat med hjørnepunkterne $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ og $(0,1)$ udsættes for en affin afbildning der består af en skalering givet ved matricen $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, som efterfølges af en rotation på 30 grader mod uret og en translation med vektoren $(2,1)$. Angiv den matrix der udtrykker sammensætningen af skaleringen og rotationen, og tegn den figur der kommer ud af den samlede affine afbildning.

3 Anvendelse: Flodsystemer

Mange kystlinjer siges at være skala-invariante (dvs. fraktale). Dvs hvis man betragter dem på en skala af f.eks. 1 km, 10 km eller 100 km, så ser kysten stort set ens ud. På lille målestok udviser de de samme bugtede former som på stor målestok. Hvis man har et udsnit af kysten i et kvadrat på 10×10 km, tager et udsnit heraf på 1×1 km og forstørrelser det op til samme størrelse, vil de to udsnit se ens ud. Det svarer til en affin skalering med en matrix (2.4), der har $(10,10)$ som diagonalelementer.

Flodsystemer udviser et lignende fænomen. De har statistisk set ens udseende på alle skalaer, men de forskellige retninger af et flodsystem skalerer forskelligt. Nedenfor opstilles to skalerings-love der er et udtryk for dette.

Skalerings-lov 1

Flodsystemer har længe været anerkendt som fraktale strukturer. Vand opsamles fra et område og ledes gennem et netværk af kanaler med stigende bredde op til flodens udløb. I almindelighed er små vandløb bifloder til næste større vandløb på en sådan måde at flodsystemets arkitektur udvikler sig fra laveste målestok til den højeste målestok (se figur 1).

I figur 6 er tegnet to simple flodsystemer der hver er karakteriseret ved to længder L_{\parallel} (udstrækningen langs floden kaldet flodens vertikale længde) og L_{\perp} (en vinkelret længde, kaldet den horizontale længde). Flodens udløb er i det nederste punkt. Lad l være kurvelængden af den centrale flod, og lad a være arealet af bassinet (også kaldet afvandingsarealet, dvs. arealet af det landområde der optager nedbør der bidrager til flodsystemet). Bemærk, at generelt vil længden af den centrale flod være større end den vertikale flodlængde, dvs. $l \geq L_{\parallel}$. Ved at måle på kort over enkelte floder i Virginia og Maryland fandt

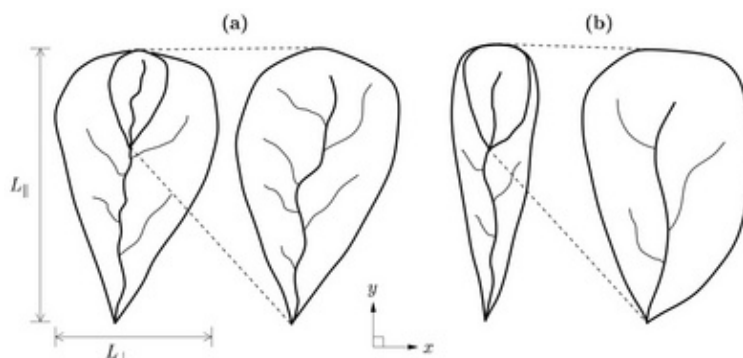


Figure 6: Skematisk tegning af to flodsystemer. Den horizontale længde er L_{\perp} , den vertikale længde L_{\parallel} (fra Dodds, 1999 [3]). Den centrale flod i midten har længden l . Ved at tage et udsnit ses, at på mindre skala findes endnu et flodsystem med egne længder L'_{\perp} og L'_{\parallel} . Det ses, at i (a) vokser de to længder med samme faktor, mens de i (b) vokser med forskellige faktorer.

J.T. Hacks i 1957 frem til følgende skalerings-lov [2]

$$l \propto a^h, \quad (3.6)$$

hvor eksponenten h er blevet målt til at være i intervallet $h = 0.57 - 0.60$. Dvs h er ikke universel og forskellige floder kan have forskellige værdier af h . **(Tegnet " \propto " står for proportionalt med. Dvs det kan læses som et lighedstegn op til en konstant ganget på. Alle udregninger nedenfor kan udføres som om at det var et lighedstegn).**

Denne ligning (3.6) er den såkaldte *Hack's lov*. Det interessante er her, at h er målt til at være forskellig fra $1/2$, ellers ville ligningen jo bare udtrykke at areal fås som en længde i anden potens ($a = \text{konstant} \times l^2$). Dette gav anledning til spekulationer om at flodsystemer var fraktale af natur. Målinger på floder viser, at dette i vid udstrækning er tilfældet. Der er dog endnu ikke nogen fundamental forståelse af Hack's lov (3.6), af hvor den fysisk og geologisk stammer fra.

Skalerings-lov 2

En relateret skalerings-lov kan opstilles [3]. I opgaven skal du prøve at eftervise den ved at måle på kort over Amazon-floden. Arealet af bassinet er ifølge figur 6,

$$a \propto L_{\parallel} \cdot L_{\perp} \quad (3.7)$$

Målinger på kort viser typisk at der findes en parameter H , hvor $1/2 \leq H \leq 1$, således at

$$L_{\perp} \propto L_{\parallel}^H \quad (3.8)$$

Tilfældet $H = 1$ som i figur 6, eksempel (a), svarer til geometrisk lighedannethed eller selv-similaritet, ligegyldigt hvilken størrelse af a så vil alle bassiner se ens ud. Denne relation (3.8) er selvfølgelig ikke en eksakt relation. I praksis bestemmer man eksponenten H ved at tage et gennemsnit over mange målinger. Figur 8 viser et eksempel på én måling af L_{\parallel} for Amazon-floden.

Sammenholder man de to ligninger (3.7) og (3.8) ovenfor, gælder der

$$a \propto L_{\parallel}^{1+H} \quad (3.9)$$

I tilfældet $H \neq 1$ vokser de forskellige retninger med forskellige faktorer, se figur 6 eksempel (b). Specielt kan man vise, at

$$\frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}} \propto a^{-\frac{1-H}{1+H}} \quad (3.10)$$

Da de observerede værdier for H er i intervallet $0 < H < 1$ gælder

$$\frac{1-H}{1+H} > 0 \quad (3.11)$$

Opgave 4

(a) Udled ligning (3.9) og (3.10).

(b) Sæt $H = 0.75$ i formel (3.10) og tegn forholdet L_{\perp}/L_{\parallel} som funktion af a i intervallet $[0.5, 1.5]$.

(c) Gør rede for, at store flodbassiner har tendens til at være lange og tynde, og små flodbassiner har tendens til at være korte og tykke (sagt på en anden måde, så har flodsystemer tendens til at blive længere og smallere når de bliver større).

De ovenstående ligninger betyder, at randen af flodsystemet og dets del-bassiner er *selv-affine kurver*. Hvis man tager to vilkårlige bassiner af den samme flod, så findes der en affin afbildning der afbilder (randen af) det ene over på (randen af) det andet. Det gælder i princippet selvom det ene bassin er 10 km langt og det andet er 100 km langt.

Opgave 5

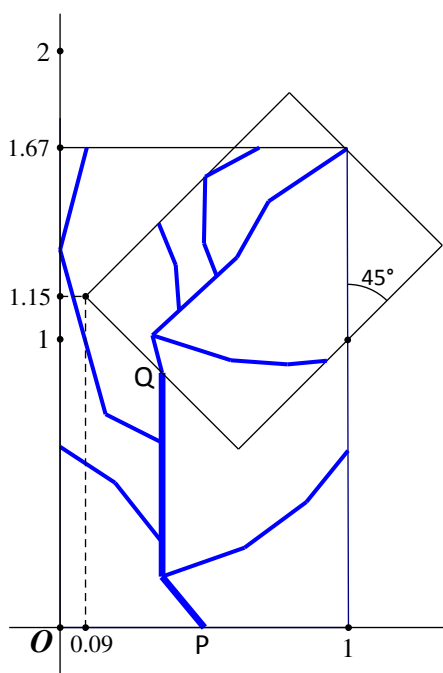


Figure 7: Skematisk tegning af et flodsystem og et delsystem heraf.

(a) Figur 7 viser et flodsystem med udløb i P med et delsystem som udløber i Q . Bestem en matrix A og en vektor \mathbf{b} som karakteriserer den affine afbildning der afbilder flodsystemets bassin i delsystemets bassin, således at origo bliver afbildet i $(0.09, 1.15)$. Billedets rand går gennem $(1, 1)$ og $(1, 1.67)$. Elementerne i A ønskes angivet som decimaltal med to decimaler.

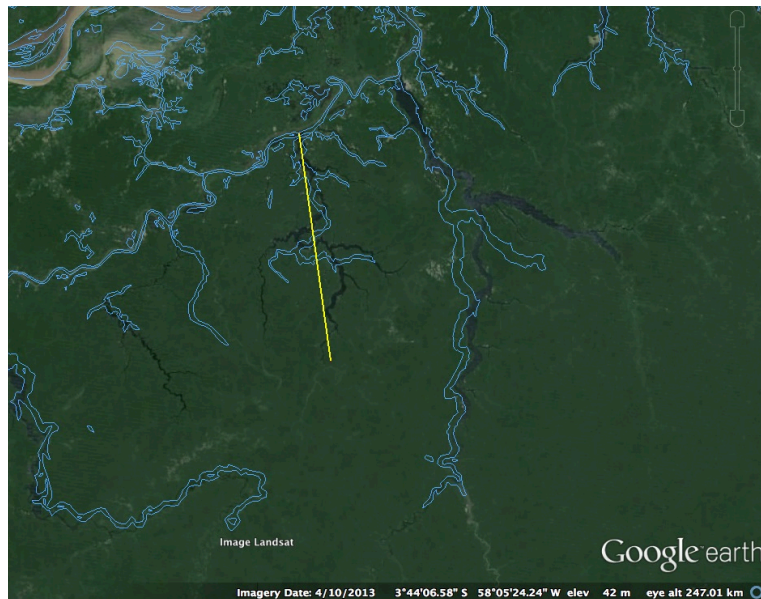


Figure 8: Udsnit af Amazon-floden, måling af vertikal længde, L_{\parallel} af et bassin. Vinkelret på denne måles bredden, L_{\perp} .

Vink: Den affine afbildning kan betragtes som en skalering efterfulgt af en rotation og en translation. Til skaleringen hører en skaleringsmatrix A_s , se (2.4), og til rotationen en rotationsmatrix A_{θ} , se (2.3). Matrizen A fremkommer som matrix-matrixproduktet af A_{θ} og A_s .

(b) Udled relationen $L_{\perp}/L'_{\perp} = (L_{\parallel}/L'_{\parallel})^H$ fra ligning (3.8). Bestemt derefter værdien af H i Figur 7 ved anvendelse af resultaterne i (a).

Opgave 6

(a) Find H for Amazon-floden på følgende måde. Brug *Google Earth Pro* til at måle sammenhørende værdier af L_{\perp} og L_{\parallel} på forskellige skalaer, f.eks. længder op til 1000 km og ned til 1 km (sæt hak ved "water body outlines" for bedre at kunne se konturer). Figur 8 viser en måling af L_{\parallel} , bredden af dette bassin L_{\perp} måles vinkelret herpå. Lav et plot der viser $\log L_{\perp}$ som funktion af $\log L_{\parallel}$ (mindst 12-15 punkter) og bestem derefter H ved lineær regression. Kontroller resultatet med anvendelse af kommandoen "PowerFit" i *Maple*.

Vink: H er hældningen af den rette linje, der bedst approksimerer punkterne.

(b) Diskuter det resultat du har fundet ovenfor. Følger punkterne en perfekt ret linje?

References

- [1] Maritan, A., Rinaldo, A., Rigon, R., Giacometti, A., & Rodriguez-Iturbe, I. *Scaling laws for river networks*, Phys. Rev. E. 53, 1510 (1996).
- [2] Hack, J. T. *Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland*, U.S. Geological Survey Professional Papers 294-B, 4597 (1957).

- [3] Dodds, P. S. and Rothman, D. H. *A unified view of scaling laws for river networks*, Phys. Rev. E. 59, 4865-4877 (1999).