Temaøvelse 1

Taylorapproksimation og fejlvurdering

Temaøvelsen består af en række eksempler på anvendelse af taylor-approksimation og vurdering af den fejl man begår ved at benytte approksimationene. Vi præsenterer her nogle opgaver som kan bruges til forberedelse. På Lille Dag i semesteruge 4 arbejdes der videre i Maple TA med opgaverne, og der kan også være nye opgaver inden for det samme område.

Opgave 1 Bestemmelse af tallet e

Tallet e er et af de allervigtigste i den matematiske analyse. Det er et *trancendentalt* tal, så det er ikke enkelt at afgøre hvor stort det er. Men hvor stort er det, hvordan kan vi sammenligne det med andre tal? Vi må udvikle det som decimaltal! Det gør vi i denne opave ved hjælp af Taylor-approksimation.

Intro: Tallet e er grundtallet for den naturlige eksponentialfunktion exp. Exp indføres ofte som dén eksponentielt voksende funktion hvis hældningskoefficient i 0 er 1. Det er (relativt) nemt at vise, at en vilkårlig eksponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a > 0$ har den afledede $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$. Det følger heraf at

$$\exp'(x) = \exp'(0) \cdot \exp(x) = 1 \cdot \exp(x) = \exp(x) \,.$$

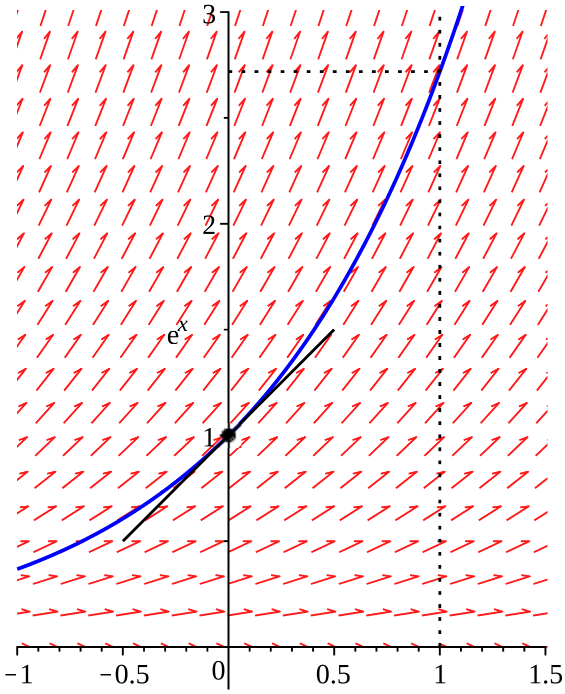
Kort sagt: Hældningskofficienten er altid den samme som funktionsværdien. Når grafen for $y = \exp(x)$ kommer op i højden $y = 2$, skal dens tangent have hældningen 2, osv. Det kan man bruge til at skitsere en graf for $\exp$ ud fra dens mulige tangenter, som det er vist på figuren nedenfor.

Videre: Tallet e er funktionsværdien for $\exp(x)$ i $x = 1$, da $\exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. Ud fra figuren tilllader vi os at konkludere at

$$\mathrm{e} < 3 \,.$$

Dette resultat må benyttes i det følgende hvor vi skal bestemme e nærmere.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼



Lad $P_n(x)$ betegne det approksimerende polynomium af grad n for $\exp(x)$ med udviklingspunktet $x_0 = 0$.

a) Opstil det approksimerende polynomium $P_3(x)$. Vis ved vurdering af den til $P_3(x)$ hørende restfunktion $R_3(x)$ at den fejl man højst risikerer at begå, hvis man benytter approksimationen $\mathrm{e} \approx P_3(1)$, er mindre end $\dfrac{1}{8} = 0.1250$.

b) Gør rede for at der generelt gælder at den fejl man højst risikerer at begå, hvis man benytter approksimationen $\mathrm{e} \approx P_n(1)$, er mindre end $\dfrac{3}{(n+1)!}$.

|||| Opgave 2 Grænser for approksimation

For funktionen $\ln(x)$ kan man naturligvis ikke bruge udviklingspunktet $x_0 = 0$ ved taylorapproksimation.

a) Hvorfor er udviklingspunktet $x_0 = 1$ det eneste rimelige for $\ln(x)$?

b) Bestem med helt elementære metode det approksimerende polynomium af grad 4 for $\ln(x)$ med udviklingspunktet $x_0 = 1$.

c) Opstil med Maples mtaylor det approksimerende polynomium $P_5(x)$ og $P_6(x)$ af grad henholdsvis 5 og 6 for f med udviklingspunkt $x_0 = 1$.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Tegn $f(x)$, $P_4(x), P_5(x)$ og $P_6(x)$ i samme koordinatsystem. Sammenlign de approksimerede værdier for $\ln(\frac{9}{5})$ man får ved hjælp af $P_4(x), P_5(x)$ og $P_6(x)$ med den værdi Maple giver. Hvor højt skal man op i grad før forskellen mellem Maples værdi og det approksimerende polynomiums værdi bliver mindre end $\frac{1}{100}$?

d) Prøv på samme måde som i forrige spørgsmål at bestemme approksimerede værdier for $\ln(\frac{11}{5})$. Kommentér.

|||| Opgave 3 Vurdering af restfunktion

Givet funktionen

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}, \; x \in \mathbb{R}.$$

a) Find det globale maksimumspunkt og den globale maksimumsværdi for f i intervallet $[-1;1]$. Tilsvarende med det globale minimumspunkt og den globale minimumsværdi. Vink: $f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$.

Givet funktionen:

$$g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

b) Der ønskes en vurdering af størrelsen af forskellen mellem $g(x)$ og funktionens approksimerende førstegradspolynomium $P_{1,x_0=0}(x)$ med udviklingspunkt i $x_0 = 0$. Opgaven går altså ud på at bestemme den største absolutværdi som restfunktionen $|R_{1,x_0=0}(x)|$ kan antage i intervallet $[-1,1]$. Vink: Du får brug for differentialkvotienten $g'(0)$. Brug evt. Maple til at komme igang med den.

|||| Opgave 4 Klassisk fysik som approksimation til relativitetsteori

Hvis man forstår kunsten at *vurdere* fejlen ved brug af restfunktionen, kan vi her udvikle en interessant approksimation til relativitetsteorien.

a) Lad $x \in [0,1[$. Vis ved hjælp af Taylors formel, at

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}(1-\xi)^{-\frac{5}{2}}x^2$$

for et ξ mellem 0 og x.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Ifølge Albert Einstein er en partikels kinetiske energi givet ved

$$E_{kin}(v) = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right), \quad 0 \le v < c$$

hvor m_0 er partiklens hvilemasse, c er lysets hastighed $(3 \cdot 10^5 \frac{km}{s})$ og v er partiklens hastighed. Den klassiske kinetiske energi er som bekendt

$$T(v) = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2.$$

Den relative fejl ved at erstatte $E_{kin}(v)$ med $T(v)$ defineres som

$$F = \frac{E_{kin}(v) - T(v)}{E_{kin}(v)}.$$

b) Vis ved hjælp af det approksimerende polynomium ud fra $x_0 = 0$ af $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, at

$$F < \frac{3\left(\frac{v}{c}\right)^2}{4\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} .$$

Vink: Erstat x med $(\frac{v}{c})^2$. Da bliver

$$E_{kin}(v) = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2 + \frac{3}{8} \frac{m_0 \cdot v^4}{c^2 (1-\xi)^{\frac{5}{2}}}$$

hvor $0 < \xi < (\frac{v}{c})^2$.

Vink: Hvilke konsekvenser får det for den relative fejl F? Indsæt i uligheden og forkort! Når du videre skal vurdere brøken på højresiden af uligheden, så husk de grundlæggende regler: Somme tider forenkler man tælleren ved at gøre den lidt større. Andre gange forenkler man nævneren ved at gøre den lidt mindre. Begge dele er tilladte fordi de gør brøken større. Fejlvurderingen bliver derved grovere, men det er en pris man gerne betaler for at opnå enkle udtryk der kan arbejdes videre med.

c) Vis, via den nu beviste vurdering at F at for $v \le 3 \cdot 10^4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ er $F < 10^{-2}$.

Temaøvelsesopgaven er slut