Temaøvelse 1

Reelle og komplekse funktioner

Temaøvelsen består af eksempler på reelle og komplekse funktioner med grafisk repræsentation og taylor-approksimationer. Vi præsenterer her nogle opgaver som kan bruges til forberedelse til Lille Dag i semesteruge 4. Her arbejdes der videre i Möbius (MapleTA) med opgaverne, og der kan også være nye opgaver inden for området. Bemærk at opgave 1 indeholder en intro til helt elementær programmering i Maple.

Opgave 1 Bestemmelse af tallet e

Tallet e er et af de allervigtigste i den matematiske analyse. Det er et *trancendentalt* tal, så det er ikke enkelt at afgøre hvor stort det er. Men hvor stort er det, hvordan kan vi sammenligne det med andre tal? Vi må udvikle det som decimaltal! Det gør vi i denne opave ved hjælp af Taylor-approksimation.

Intro: Tallet e er grundtallet for den naturlige eksponentialfunktion exp. Exp indføres ofte som dén eksponentielt voksende funktion hvis hældningskoefficient i 0 er 1. Det er (relativt) nemt at vise, at en vilkårlig eksponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a > 0$ har den afledede $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$. Det følger heraf at

$$\exp'(x) = \exp'(0) \cdot \exp(x) = 1 \cdot \exp(x) = \exp(x)\,.$$

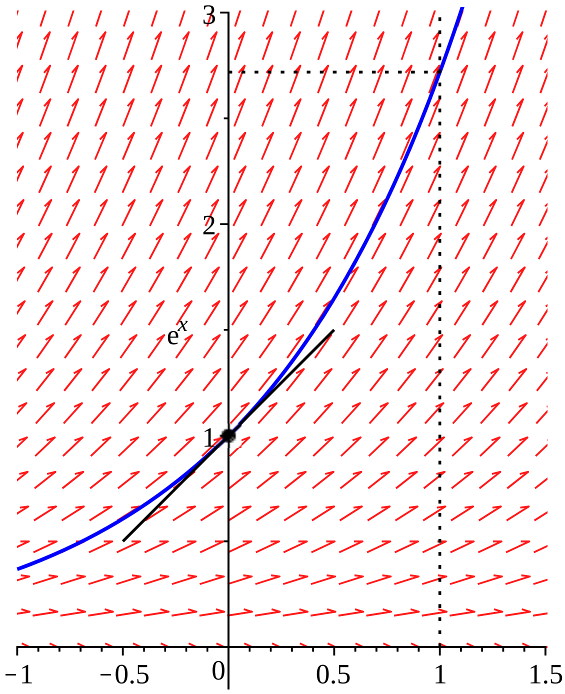
Kort sagt: Hældningskofficienten er altid den samme som funktionsværdien. Når grafen for $y = \exp(x)$ kommer op i højden $y = 2$, skal dens tangent have hældningen 2, osv. Det kan man bruge til at skitsere en graf for $\exp$ ud fra dens mulige tangenter, som det er vist på figuren nedenfor.

Videre: Tallet e er funktionsværdien for $\exp(x)$ i $x = 1$, da $\exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. Ud fra figuren tilllader vi os at konkludere at

$$\mathrm{e} < 3\,.$$

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Dette resultat må benyttes i det følgende hvor vi skal undersøge e nærmere vha. elementær programmering i Maple.



Lad $P_n(x)$ betegne det approksimerende polynomium af grad n for $\exp(x)$ med udviklingspunktet $x_0 = 0$. Antag at $P_n(x)$ er skrevet på formen

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 .$$

a) Udregn de første af a_n koefficienterne ved håndregning og gæt en generel algoritne for a_n. Lav derefter en do-løkke i Maple der udregner a_n, $n = 0 \ldots 10$. Opstil en liste med de 11 koefficenter.
Vink: Træn først med følgende do-løkke der afsluttes med opstilling af en liste vha. kommandoen seq session:

```
> for k from 0 to 5 do
   a[k]=2*k:
   end do:
> seq( a [k] , k = 0 . . . 5 )
```

b) Lav en do-løkke der opstiller de approksimerende polynomier $P_n(x)$, $n = 0 \ldots 10$.
Vink1: Vi ønsker at de approksimerende polynomier skal kunne evalueres i bestemte tal, først og fremmest i $x = 1$. Brug derfor kommandoen unapply til at definere polynomierne. Træn indledningsvist med:

```
> P [2] := unapply( a [2] * x^2 + a [1] * x + a [0] , x) :
```

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

> P [2] (x);
> P [2] (1);
> evalf(P [2] (1));

Vink2: Definér de ønskede polynomier iterativt. Først dannes startstedet:
> P [0] := unapply(a [0] , x) :
hvorefter de følgende dannes med en do-løkke baseret på ideen

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + a_k \cdot x^k\,,\; k = 1\ldots 10.$$

c) Opstil en liste med de 11 bud på en approksimation af e som de ovenfor dannede polynomier giver. Vink: Brug kommandoen seq.
Giv en 2d-illustration af approksimationerne. Vink: Træn først med denne tutorial:

```
> for k from 0 to 5 do
   a[k]=2*k:
   end do:
> with(plots) :
> punkter := seq([k, a[k]] , k = 0...5)
> pointplot([punkter])
```

d) Vis ved vurdering af den til $P_3(x)$ hørende restfunktion $R_3(x)$ at den fejl man højst risikerer at begå, hvis man benytter approksimationen $\mathrm{e} \approx P_3(1)$, er mindre end $\dfrac{1}{8} = 0.1250$.

e) Gør rede for at der generelt gælder at den fejl man højst risikerer at begå, hvis man benytter approksimationen $\mathrm{e} \approx P_n(1)$, er mindre end $\dfrac{3}{(n+1)!}$. Lav en liste med de fejlvurderinger der svarer til de 11 approsimationer der er givet ovenfor, og illustrér med pointplot.

|||| Opgave 2 Kompleks funktion af reel variabel

Nu skal vi undersøge approksimationer af en kompleks funktion af en reel variabel og visualisere dem med Maple.

Vi betragter i det følgende en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved

$$f(x) = 2\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(2x)\,,\; x \in [\,-\pi\,,\,\pi\,]\,.$$

Der er endvidere givet tre reelle tal: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$ og $x_3 = \dfrac{3\pi}{4}$.

a) Plot f med Maplekommandoen complexplot, og fremhæv i samme plot punkterne $f(x_1)$, $f(x_2)$ og $f(x_3)$.

Vink til Maple:

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

1. Ved mere raffinerede illustrationer skal man i starten af Maple-arket tilføje with(plots).
2. Hvis du ønsker help til en kommando i Maple, lader du cursoren stå på den indskrevne kommando og trykker F2.
3. De tre nævnte punkter kan også plottes med complexplot, se hvordan med help. For at gøre punkterne tydeligere kan man evt. tilføje argumenterne
   style=point,symbol=solidcircle,symbolsize=15
   eller lignende.
4. Man kan samle flere plots i samme illustration med display. Prøv for eksempel:
   ```
   >graf1:=plot(cos(x),x=-Pi..Pi,color=blue,linestyle=dash):
   >graf2:=plot(sin(x),x=-Pi..Pi,color=red,linestyle=dot):
   >display(graf1,graf2,scaling=constrained);
   ```

b) Opstil (gerne med kommandoen mtaylor både her og i det følgende) de tre approksimerende førstegradspolynomier for f som har udviklingspunkterne $x = x_1$ henholdvis $x = x_2$ og $x = x_3$.
Plot hver af de tre polynomier i et passende interval omkring deres respektive udviklingspunkter. Og saml dem i ét plot sammen med plottet af f.
Beskriv hvad du ser.

c) Bestem differentialkvotienterne $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ og $f'(x_3)$. Hvilken geometrisk betydning har de i den komplekse talplan.

d) Opstil med udviklingspunktet $x = 0$ det approksimerende andengradspolynomium $P_2(x)$ og det approksimerende tredjegradspolynomium $P_3(x)$ for f.
Plot de to polynomier sammen med plottet for f og punkterne $f(1)$, $P_2(1)$ og $P_3(1)$.

Opgave 3 Kompleks funktion af kompleks variabel

Intro: Hvis vi har en afbildning f, som til ethvert komplekst tal $z \in A \subseteq \mathbb{C}$ tilknytter et komplekst tal $w \in \mathbb{C}$, så kaldes f en *kompleks funktion* af en *kompleks variabel*, og vi skriver $f : A \to \mathbb{C}$ eller $w = f(z)$. Vil man skitsere forholdene, må man benytte to komplekse talplaner, en z-plan og en w-plan. I det følgende sætter vi $z = x + iy$ og $w = u + iv$, hvor $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Et eksempel er funktionen $w = f(z) = i - z^2$ som vi nu betragter.

a) Indtegn tallene $a = 2 - i$, $b = -1 + 2i$ og $c = -1 - i$ i z-planen og tallene $f(a)$, $f(b)$ og $f(c)$ i w-planen.

Temaøvelsesopgaven fortsætter $\longmapsto$

b) Hvordan mon hele trekanten (a, b, c) bliver afbildet i w-planen?

Gå frem således: Forstå først at formlen $a + t(b - a)$, $t \in [0, 1]$ generelt er en (kompleks) parameterfremstilling for linjestykket fra et punkt a til et punkt b . Tegn herefter vha. Maple-kommandoen complexplot trekanten (a, b, c) i z-planen og *billedet* af den i w-planen. Angiv ligningen (i (u, v) -koordinater) for billederne af trekantens sider.

Temaøvelsesopgaven er slut