Temaøvelse:

Beskrivelse af raket-eksplosion

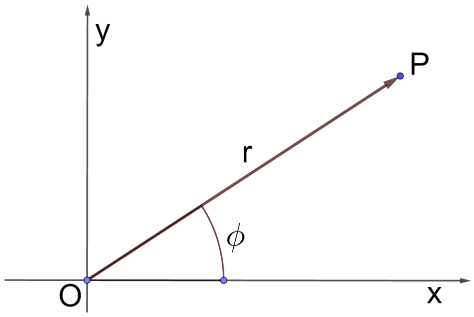
Antares CRS-3 kort efter opsendelsen 28/10 2014

I denne temaøvelse vil vi give en geometrisk beskrivelse af en raket-eksplosion. Hvorhen bevæger rakettens dele sig under simple modelbetingelser? Vi skal både se på enkeltdeles bevægelse og give et samlet billede af hvor raketdelene befinder sig. Der er også en drone i nærheden, som skal filme opsendelsen, vi må se hvor galt det går med den. Vi får brug for elementær differentialregning, for sfæriske koordinater og for parameterfremstillinger af kurver og andre geometriske objekter. De første tre øvelser introducerer disse emner, så vi i de afsluttende øvelse 4 og 5 er klar til at angribe problemet. Vi starter forsigtigt med polære koordinater i xy-planen.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

|||| Opgave 1 Polære koordinater i (x, y)-planen

Vi betragter et vilkårligt punkt P i (x, y)-planen som ikke er origo.



I polære koordinater defineres førstekoordinaten r som længden af stedvektor $\vec{OP}$, mens andenkoordinaten ϕ er vinklen fra førsteaksens positive del til stedvektoren. Vinklen regnes med fortegn i overensstemmelse med sædvanlig orientering af koordinatsystemet og vælges i intervallet $]-\pi, \pi]$.

a) Indtegn punkterne $\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ og $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ i (x, y)-planen.

b) Skitsér de to kurver $(5, \phi)$, $\phi \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ og $\left(r, -\frac{\pi}{3}\right)$, $r \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

c) Bestem arealet af området (r, ϕ) , $r \in [2, 7]$, $\phi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

d) Et punkt har det polære koordinatsæt (r, ϕ) . Gør rede for at punktets (x, y)-koordinater er givet ved formlen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} . \tag{1}$$

e) En kurve K er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} , \ \phi \in]-\pi, \pi] . \tag{2}$$

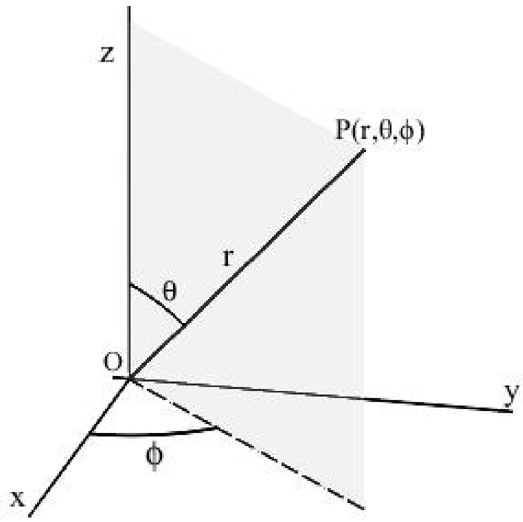
Gør rede for at K er en cirkel og beskriv den ved hjælp af den sædvanlige cirkelligning

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2 .$$

Temaøvelsesopgaven fortsætter $\longmapsto$

|||| Opgave 2 Sfæriske koordinater i (x, y, z)-rummet

Vi betragter nu et vilkårligt punkt P i (x, y, z)-rummet (ikke origo).



Sfæriske koordinater defineres således: Førstekoordinaten r er længden af stedvektor $\overrightarrow{OP}$. Andenkoordinaten θ er vinklen mellem z-aksen og stedvektoren, og den vælges i intervallet $[0, \pi]$. Endelig er tredjekoordinaten ϕ vinklen mellem (x, z)-planen og den plan som indeholder både z-aksen og $\overrightarrow{OP}$. ϕ regnes med fortegn i overensstemmelse med sædvanlig orientering af (x, y)-planen, og den vælges i intervallet $]-\pi, \pi]$.

a) Bestem (x, y, z)-koordinaterne for de to punkter som har de sfæriske koordinater

$$\left(5, \pi, \frac{\pi}{2}\right) \text{ og } \left(2, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}\right) .$$

b) Gør rede for at det følgende udtryk i sfæriske koordinater

$$(5, \theta, \phi) \ , \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ \phi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

beskriver en del af en kugleflade, og angiv arealet af dette kuglefladestykke.

c) Et massivt område i (x, y, z)-rummet er beskrevet ved sfæriske koordinater således:

$$(r, \theta, \phi) \ , \ r \in [3, 5] \ , \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ \phi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] .$$

Bestem voluminet af det massive område.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

d) Et punkt har det sfæriske koordinatsæt (r,θ,ϕ) . Gør rede for at punktets (x,y,z)-koordinater er givet ved formlen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

e) En kugleflade F i (x,y,z)-rummet er givet ved ligningen

$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=4\,.$$

Giv en parameterfremstilling for F der bygger på formlen i forrige spørgsmål, se også formellinje (2) . Husk at angive intervallerne for de to parametre, θ og ϕ .

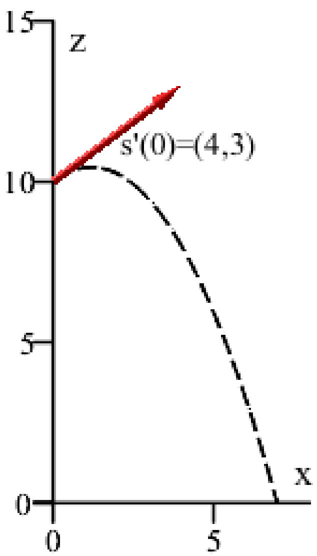
f) Gør rede for at udtrykket

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},\ \theta\in[0,\pi]\,,\ \phi\in[0,2\pi] \tag{3}$$

angiver en en hel kugleflade med radius r og centrum (c_1,c_2,c_3) . Plot med Maple kuglefladen i spørgsmål e) ved hjælp af dens parameterfremstilling.

Opgave 3 Parameterfremstillinger for det skrå kast

I det følgende betragtes et projektil som i punktet $(0,10)$ i (x,z)-planen skydes ud med begyndelseshastigheden 4 i x-aksens retning og 3 i z-aksens retning, se figuren.

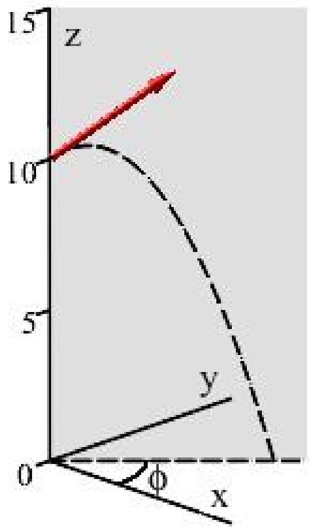


Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Vi ønsker at finde en parameterfremstilling for projektilets banekurve. Vi forestiller os en simpel model hvor projektilet har massen 1 og kun er påvirket af tyngdeaccelerationen hvis størrelse kaldes g.
Dermed har vi at hvis $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{s}(t)\,,\ t > 0$ er en parameterfremstilling for projektilets banekurve, så er $\mathbf{s}''(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$.

a) Sæt $g = 10$ og bestem en parameterfremstilling først for $\mathbf{s}'(t)$ og dernæst for $\mathbf{s}(t)$. Plot banekurven.plot kugle

Vi drejer nu den plan som projektilets banekurve ligger i, med en vilkårlig vinkel ϕ omkring z-aksen. ϕ regnes med fortegn i forhold til sædvanlig orientering af (x, y)-planen. Alt andet er som før.

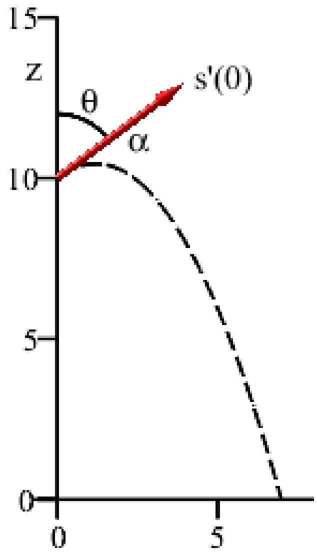


b) Bestem det punkt hvori projektilet nu opnår sin maksimale højde, og det punkt hvori projektilet rammer jordoverfladen (dvs. (x, y)-planen).

c) Bestem en parameterfremstilling $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{s}(t)\,,\ t > 0$ for projektilets banekurve.

Indtil nu har vi arbejdet under den forudsætning at banekurvens begyndelseshastighedsvektor har længden 4 i vandret retning og 3 i lodret retning. Mere generelt lader vi nu banekurvens begyndelseshastighedsvektor $\mathbf{s}'(0)$ være givet ved at $|\mathbf{s}'(0)| = \alpha > 0$, og at vinklen fra z-aksen til $\mathbf{s}'(0)$ er en vilkårlig vinkel $\theta \in [0, \pi]$, se figuren (hvor banekurvens plan forsat er drejet med vinklen ϕ i forhold til (x, z)-planen).

Temaøvelsesopgaven fortsætter $\longmapsto$



d) Hvordan ser parameterfremstillingen for projektilets banekurve nu ud?

|||| Opgave 4 Eksploderende raket

Nu er vi rede til at løse det stillede problem. En raket eksploderer i (x, y, z)-rummet til tiden $t = 0$. For nemheds skyld forestiller vi os raketten som et punkt der befinder sig i punktet $(0, 0, h)$. På grund af tekniske problemer har den tabt hastighed i lodret retning og står stille i eksplosionsøjeblikket. Nu rives den i stykker som sendes i alle retninger med samme fart som vi benævner α. Alle stykker har massen 1 og tyngdeaccelerationen betegnes g.

a) Gør rede for at alle raketdelene til ethvert tidspunkt fra eksplosionen og indtil de begynder at ramme jordoverfladen, befinder sig på en fælles kugleflade. Bestem kuglefladens (tidsafhængige) radius og centrum.

b) Besvar igen spørgsmål a), men hvor der nu også tages højde for at raketten ikke står stille i eksplosionsøjeblikket, men har en opadrettet lodret fart af størrelse β.

|||| Opgave 5 Ekstremumsundersøgelser

Vi sætter nu $\alpha = 5$, $\beta = 10$, $g = 10$ og $h = 100$. For nemheds skyld omdøber vi de græske parametre θ til u og ϕ til v. Et raketstykke er da bestemt ved et unikt sæt af et $u \in [0, \pi]$ og et $v \in [0, 2\pi]$.

Temaøvelsesopgaven fortsætter $\longmapsto$

a) Gør rede for at kuglefladen herefter kan parametriseres ved

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{r}(u,v,t) = 5 \cdot t \cdot \begin{bmatrix} \sin(u)\cdot\cos(v) \\ \sin(u)\cdot\sin(v) \\ \cos(u) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 + 10\cdot t - 5\cdot t^2 \end{bmatrix}$$

hvor $t \geq 0$, $u \in [0,\pi]$ og $v \in [0,2\pi]$. Vink: Ved evt. oprettelse i Maple virker *unapply* ofte bedre end pileprocedure.

Plot med Maple kuglen som den tager sig ud til $t = 1$ og til $t = 4$.Vink: *plot3d(p-fremstilling,parameter1=?..?,parameter2=?..?,scaling=constrained,view=?..?)*

Tre droner A, B og C er i forvejen sendt op for at filme og samle data om raketopsendelsen. To af dem bliver ramt ved eksplosionen, mens den sidste med nød og næppe undslipper. I det følgende skal vi undersøge detaljerne om dronernes skæbne.

b) Dronerne beskrives som punkter i rummet. A står stille i punktet $\left(\frac{15}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 105\right)$, mens de to næste bevæger sig retlinet efter parameterfremstillingerne:

$$\mathbf{b}(t) = (-10,10,70) + t\cdot(8,0,0) \text{ og } \mathbf{c}(t) = (12,-4,56) + t\cdot(2,1,1)$$

hvor t er den samme tidsparameter som gælder for kuglefladen.

Begrund geometrisk at en drone bliver ramt netop i det øjeblik hvor afstanden fra centrum til dronen er lig med kuglens radius. Hvilke to ud af de tre droner bliver ramt? Bestem det tidspunkt og det sted hvor kollisionen sker. Vink: En drone bliver kun ramt én gang, den smadres og forsvinder.

Lav et plot med Maple, som viser kuglefladen i det øjeblik en af dronerne bliver ramt sammen med banekurven for det raketstykke der rammer den drone. Vink: *spacecurve(p-fremstilling, t=?..?,color=?,thickness=?)*

Lad os kalde den drone der ikke bliver ramt X.

c) Opstil en differentiabel funktion $\text{dist}(u,v,t)$ som angiver afstanden fra cirklens punkter (raktestykkerne) til X. Find de stationære punkter for dist og undersøg med Hessematricen om de er sted for lokale ekstrema.
Vink: Brug Maples *fsolve* til at finde stationære punkter ud fra de partielt afledede efter u, v og t. Bemærk at man kan præcisere de intervaller hvori man ønsker *fsolve* skal søge, se Maples help.

Bestem herved mindsteafstanden fra dronen til et forbiflyvende raketstykke, præciser hvilket raketstykke (angivet ved (u,v)) det drejer sig om og angiv positionen af raketstykket i minimumsøjeblikket.

Lav et samlet plot der viser situationen i minimumsøjeblikket med kuglefladen og banekurverne for X og raketstykket.

Temaøvelsesopgaven er slut