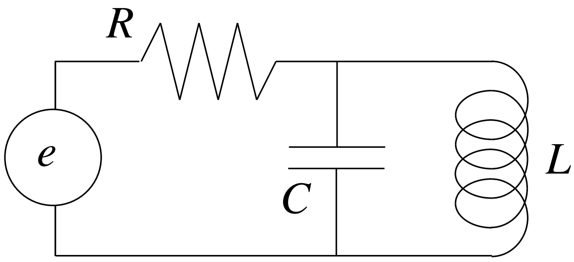
Et elektrisk netværk med modstand, spole og kondensater



Figur 1: System med en modstand, en spole, en kondensator og en generator.

I denne opgave skal vi studere den tidslige opførsel af det elektriske netværk illustreret i Figur 1. Dette består af en generator, der kan levere en (evt. tidsafhængig) elektromotorisk kraft $e(t)$ og af en modstand med modstanden R, en spole med induktansen L og en kondensator med kapacitet C (disse konstanter er uafhængige af tiden). De fundamentale (lineære) relationer mellem strømme (I) og spændinger (V) for disse enheder af netværket er:

$$V_R = RI_R \ , \qquad V_L = L\frac{dI_L}{dt} \ , \qquad I_C = C\frac{dV_C}{dt} \tag{1}$$

Opskrives ’balanceligningerne’ for strømme og spændingerne i netværket (jf. flow (el) netværksopgaven fra uge 7) fås (med passende fortegnskonvention):

$$e = V_R + V_L \ , \qquad V_C = V_L \ , \qquad I_R = I_L + I_C \tag{2}$$

Heraf fås (overvej hvordan):

$$\begin{aligned} e &= RI_R + L\frac{dI_L}{dt} = R\left[I_L + I_C\right] + L\frac{dI_L}{dt} \\ &= R\left[I_L + C\frac{dV_C}{dt}\right] + L\frac{dI_L}{dt} = R\left[I_L + C\frac{d}{dt}L\frac{dI_L}{dt}\right] + L\frac{dI_L}{dt} \\ &= RCL\frac{d^2I_L}{dt^2} + L\frac{dI_L}{dt} + RI_L \end{aligned} \tag{3}$$

som er en anden-ordens ordinær differentialligning i spolestrømmen I_L.

I det følgende antager vi at generatoren leverer en vekselspænding på formen $e_0\cos(\omega t)$, hvor $\omega > 0$ er frekvensen.

2 Anden ordens differentialligning

Differentialligningen vi skal betragte er af formen:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = f\cos(\omega t) \; , \tag{4}$$

hvor $\ddot{()}$ betyder differentitation 2 gange mht. til tidsvariablen t. Her er $\omega > 0$, $\omega_n > 0$ og $\xi \geq 0$, og f er en given størrelse.

S1. Vis, at netværks-ligningen (3) kan omskrives til formen som i (4), når systemet er påvirket af en periodisk elekromotorisk kraft med størrelsen $e_0 cos(\omega t)$. Angiv ω_n og ξ i termer af de fysiske størrelser det elektriske netværk.

S2. Betragt den til (4) svarende homogene differentialligning med nul på højresiden og med $\omega_n = 1$.

1. Find for $\xi = 0$, $\xi = 0.2$, $\xi = 1$ og $\xi = 2$ den fuldstændige løsning til den homogene ligning. Benyt Maple og kontrollér nogle af løsningerne i hånden.

   Vælg begyndelsesbetingelserne $x(0) = 0.1$ og $\dot{x}(0) = 0.0$, og find de dertil hørende partikulære løsninger, og plot dem i Maple.

2. Find den generelle form for løsningen til den homogene differentialligning når $\xi = 0$, og forklar den rolle ω_n spiller.

3. Find den generelle form for løsningen til den homogene differentialligning. Undersøg hvilke betingelser parametrene ξ skal opfylde, hvis systemet skal udføre harmoniske (eventuelt dæmpede) svingninger. Og forklar opførslen, hvis svingninger ikke kan forekomme.

S3. Vi betragter nu den inhomogene differentialligning (4), hvor vi sætter $\omega_n = 1$ og $f = 1$, $\omega = 1$.

Vælg begyndelsesbetingelserne $x(0) = 0.1$ og $\dot{x}(0) = 0.0$, og find for $\xi = 0$, $\xi = 0.2$, $\xi = 1$ og $\xi = 2$ de dertil hørende partikulære løsninger, og plot dem i Maple.

S4.

1. Vi får nu brug for at betragte et udtryk på formen

   $$z = \frac{1}{s^2 + 2cs + k} \; ,$$

   hvor c og k er givne størrelser (positive, reelle tal). Sæt $s = i\omega$, og find modulus $r(\omega)$ og argument $v(\omega)$ for $z(\omega)$, hvor ω er reel. Plot $r(\omega)$ og $v(\omega)$ som funktion af ω (for $\omega \geq 0$) for forskellige valg af $c \geq 0$ og $k > 0$.

2. Find en partikulær løsning til ligning (4) ved at bruge den komplekse gætte-metode og udtryk denne på følgende form (Vink: Regn komplekst; brug fx, at et kompleks tal z kan skrives som $z = r_v = r\exp(iv)$, hvor r, v er henholdsvis modulus og argumentet for z; og brug gerne Maple):

   $$x_p(t) = A_{\mathrm{MP}}\cos(\omega t + \phi) \; , \tag{5}$$

   hvor A_{MP} (amplituden) og ϕ (faseforskydningen) afhænger af f, ξ, ω_n og ω. Hvad betyder A_{MP} og ϕ rent fysisk?

3. Plot for $f = 1$ og for nogle valgte værdier af ξ, ω_n en såkaldt amplitudekarakteristik og en såkaldt fasekarakteristik, dvs. A_{MP} henholdvis ϕ som funktion af frekvensen ω, jf. spørgsmål 1.

4. Find den frekvens ω_{max} for hvilken $A_{\text{MP}}(\omega_n)$ har et maksimum (udtrykkes generelt i termer af ξ, ω_n). Sammenlign med udtrykket for frekvenserne af de frie svingninger (både for udæmpede (dvs. $\xi = 0$) og for dæmpede svingninger).

5. Antag nu, at $\xi > 0$. Vis, at der for en vilkårlig løsning $x_0(t)$ til den homogene differentialligning gælder, at
$$x_0(t) \to 0 \text{ for } t \to \infty \,.$$
Vi også, at der for en vilkårlig løsning $x_1(t)$ til den inhomogene differentialligning gælder, at
$$\left|x_1(t) - x_p(t)\right| \to 0 \text{ for } t \to \infty \,.$$
Sidstnævnte egenskab gør, at man kalder $x_p(t)$ for det stationære svar, og at man for en tvungen svingning normalt primært interesserer sig for egenskaber ved $x_p(t)$. Hvorfor?

6. Beregn for realistiske data ($f = 1$, $L = \frac{1}{6} \cdot 10^{-3}$H, $L = 5 \cdot 10^{-9}$F, $R = 0{,}3 \cdot 10^3\Omega$) værdierne af ω_n, ξ og ω_{max}, og undersøg hvor hurtig en fri svingning 'dør ud'. Dette kan fx angives som den tid, som det tager for at løsningen (udsvinget) x_2 til den homogene ligning med $x_2(0) = x_0$ og $\dot{x}_2(0) = 0.0$ er 1 promille af begyndelsesværdien x_0. Dette kan udtrykkes som den tid T for hvilken, der gælder:
$$|x_2(t)| \leq 0.001 \cdot |x_0| \quad \text{for} \quad t \geq T$$

3 Differentialligningssystem

S5. Benyt ligningerne (1) og (2) til at opskrive et differentialligningssystem af første orden for de variable I_L og V_L. Find det karakteristiske polynomium og egenværdierne for systemmatricen. Sammenlign med resultaterne ovenfor.

Benyt ligningen (4) med $f = 0$ til at opskrive et differentialligningssystem af første orden for de variable x og $\dot{x}$. Find det karakteristiske polynomium og egenværdierne for systemmatricen. Sammenlign med resultaterne ovenfor.