
Absorberende Markov-Processer

Let the Game begin!

Temaopgave

v./ Steen Markvorsen, DTU Matematik, 23. oktober 2012

01008 Temaøvelser i Matematik 1 - TEMA 1, 2012

1 Hvem vil vinde en million?

I denne temaopgave introduceres nogle af de begreber og metoder, der benyttes ved analyse og beregning af vidt forskellige fænomener som spil, beslutningsprocesser, www-pagerank-strategier, diffusion, genetik, Brown'ske bevægelser, kvantegrafer, etc.

Til sidst i temaopgaven (i afsnittene 5 og 6) definerer vi et meget simpelt spil. En indsats på 1 million *kan* give en gevinst på 2 millioner, hvorved du vinder effektivt en million – derfor overskriften. Men før vi kommer dertil skal vi have banen kridtet op og bevist en sætning om uendelige summer af matrix-potenser. Uden den sætning, uden det resultat, har vi nemlig ikke en chance for at forstå præcis hvad der foregår.

1.1 Forberedelse

Som individuel forberedelse (før gruppearbejdet) til denne tema-opgave anbefales derfor, at du løser de første 5 opgaver nedenfor. De handler om kvadratiske matricer og deres potenser. Der er ialt 18 opgaver hvoraf den sidste er frivillig.

2 Matrix grundlaget

Vi definerer en egenskab (*) for *kvadratiske matricer* på følgende måde:

DEFINITION 2.1. Lad \mathbf{A} betegne en kvadratisk ($n \times n$)-matrix. Egenskaben (*) for \mathbf{A} defineres ved:

$$(*) \quad \mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{for} \quad k \rightarrow \infty \quad . \quad (1)$$

Det betyder, at potens-matricerne \mathbf{A}^k går imod nul-matricen $\mathbf{0}$ (hvor alle n^2 elementer er 0) når potensen k går imod uendelig.



Helt præcist betyder (1): For ethvert givet $\varepsilon > 0$ findes der et helt tal k_0 (som gerne må afhænge af det givne ε) således at alle elementerne i potensmatricen \mathbf{A}^k er numerisk mindre end ε når blot $k > k_0$.

For at give en endnu mere præcis fremstilling nævner vi også følgende præsentation af (*), hvor vi benytter kvantorerne \forall (*for ethvert*) og \exists (*findes der*):

Lad $\mathbf{W}(k) = \mathbf{A}^k$ og lad tilsvarende $w_{ij}(k)$ betegne de enkelte elementer i matricen \mathbf{A}^k . Så er egenskaben (*) for den kvadratiske $(n \times n)$ -matrix \mathbf{A} ækvivalent med (det samme som):

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}_+ \quad : \quad k > k_0 \implies |w_{ij}(k)| < \varepsilon \quad \forall i, j \quad . \quad (2)$$

eller, med ord, én gang til:



For ethvert positivt reelt tal ε findes der et tal k_0 således at følgende gælder: Hvis $k > k_0$ så følger det deraf, at $|w_{ij}(k)| < \varepsilon$ for alle elementerne i $\mathbf{W}(k)$, dvs. uligheden gælder for alle par (i, j) af index-værdier $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$.

OPGAVE 1. Her er et konkret eksempel på en matrix der opfylder (*) (netop denne matrix vil også spille en afgørende rolle i det følgende):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (3)$$

Vis, at \mathbf{Q} har egenskaben (*), dvs.: Find tilstrækkeligt store værdier af $k_0(\varepsilon)$ for ethvert givet positivt tal ε således at alle elementerne $w_{ij}(k)$ i potensmatricerne \mathbf{Q}^k er numerisk mindre end ε når blot $k > k_0(\varepsilon)$. (Vi skal bruge dette konkrete resultat i opgave 13 i afsnit 5.)

Vink: Find først ud af, hvordan de typiske potenser \mathbf{Q}^k ser ud. Der er forskel på strukturen for k lige og for k ulige. Opstil en hypotese (en formodning) om strukturen af \mathbf{Q}^k for k lige henholdsvis k ulige. Find ud af hvad et induktionsbevis er og hvad induktionsaksiomet går ud på – se evt. [Wikipedia](#) (forslag til link online). Bevis dernæst din hypotese ved brug af induktionsaksiomet.

OPGAVE 2. Her er nu nogle første konsekvenser af egenskaben (*):

1. Vis, at $\det(\mathbf{A}^k) \rightarrow 0$ for $k \rightarrow \infty$, når matricen \mathbf{A} har egenskaben (*).
2. Vis, at $|\det(\mathbf{A})| < 1$ når \mathbf{A} har egenskaben (*).

Det omvendte gælder ikke nødvendigvis:

OPGAVE 3. Vis, at $|\det(\mathbf{A})| < 1$ *ikke* medfører, at \mathbf{A} har egenskaben (*). Vink: Eet eksempel er nok.

OPGAVE 4. Antag, at en given kvadratisk $(n \times n)$ -matrix \mathbf{A} har egenskaben (*). Vis, at så findes der et passende stort k_0 således at $\det(\mathbf{E} - \mathbf{A}^k) > 0$ for $k > k_0$, hvor \mathbf{E} er $(n \times n)$ -enhedsmatricen (der har et-taller i diagonalen og alle andre elementer 0).

2.1 En uendelig matrix sum

Efter ovenstående opvarmning vil vi nu bevise følgende sætning. Det er ikke en egentlig opgave at bevise sætningen, men for det første motiverer beviset de opgaver vi har været igennem ovenfor og for det andet skal vi bruge resultatet i opgave 5 nedenfor.

SÆTNING 2.2. *Antag, at en given kvadratisk matrix \mathbf{A} har egenskaben (*). Så har matrixen $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ en invers matrix, $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ er altså regulær, og den inverse matrix er*

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \quad . \quad (4)$$

Det første lighedstegn i (4) skal tolkes således

$$\mathbf{E} + \mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^k \rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \quad \text{for } k \rightarrow \infty \quad , \quad (5)$$



og det andet lighedstegn i (4) udtrykker blot en kort skrivemåde for den uendelige sum af matrixpotenserne. Den skrivemåde er kun tilladt når det som her først er godtgjort, at den trunkeerede sum (bestående af summen af de første k matrixer) går imod en ganske bestemt veldefineret matrix, når k går imod uendelig. Bemærk, at vi også benytter, at $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$.

OPGAVE 5. Skriv tolkningen (5) af det første lighedstegn i (4) ved hjælp af kvantorer på samme måde som de blev brugt i (2).

Bevis for sætning 2.2. Bemærk først, at for enhver (endelig) værdi af k er

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^k) = \mathbf{E} - \mathbf{A}^{k+1} \quad . \quad (6)$$

Det kan du se ved simpelthen at gange parenteserne sammen og reducere. Dernæst observerer vi følgende: Højreside-matrixen i ovenstående ligning (6) har positiv determinant hvis vi bare vælger k stor nok – det følger jo præcis af opgave 4. Derfor kan faktoren $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ på venstre side i ligningen ikke have determinant 0 (hvorfor ikke?). Men det betyder jo, at $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ har en invers matrix, og det var det vi først skulle bevise. Da vi derfor nu ved, at den inverse matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ findes og er veldefineret, kan vi gange med den på begge sider af ligningen (6) og får så:

$$\mathbf{E} + \mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^k = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{A}^{k+1}) \quad . \quad (7)$$

Men for $k \rightarrow \infty$ gælder nu for højresiden i ovenstående ligning (7), at faktoren $(\mathbf{E} - \mathbf{A}^{k+1})$ går imod \mathbf{E} når k går imod ∞ – på grund af antagelsen (*). Og derfor går hele højresiden imod $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ for $k \rightarrow \infty$ (hvordan det?). Og det var det, vi skulle bevise i henhold til den præcise tolkning af (4) i (5). \square

OPGAVE 6. Sætning 2.2 viser, at egenskaben (*) er en *tilstrækkelig* betingelse på en matrix \mathbf{A} som sikrer, at $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ har en invers matrix. Vis, at egenskaben (*) *ikke* er en *nødvendig* betingelse som en matrix \mathbf{A} skal opfylde for at $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ har en invers matrix.

3 Markov-processer på en kort linje

En Markov-spredningsproces kan betragtes som en såkaldt diskret model for eksempelvis diffusion og varmeledning. Vi vender tilbage til den tolkning i afsnit 4.1 nedenfor. Markov-processerne er opkaldt efter den russiske matematiker Andrei A. Markov, se [MacTutor history of mathematics](#)).

Her vil vi først se på sådanne processer i passende forenklede udgaver – vi antager at de foregår på en linje med kun 5 mulige positioner – et eksempel er vist i figur 1. Der er 3 indre positioner, som er markeret med de røde numre 3, 4, og 5, og der er to rand-positioner der er markeret med de blå numre 1 og 2. Det kan synes akavet at nummerere på den måde, men som vi skal se nedenfor er der rigtig gode grunde til at samle rand-positionerne og tælle dem først på listen.



Figur 1: *Farver online*. Kort linje med tre indre (spredende) positioner og to (absorberende) rand-positioner i endepunkterne.

Ideen er nu den, at vi fordeler en total masse (eller indsats) på 1 (f.eks. een million en-kroner, se afsnit 5) på de 5 mulige positioner på den betragtede linje; hvis vi kalder positionerne $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ i overensstemmelse med den givne nummerering, så kan vi angive startmassefordelingen med en vektor $\mathbf{a}(0) = (a_1(0), a_2(0), \dots, a_5(0))$, hvor $a_i(0)$ er den del af massen, som er placeret i position s_i og hvor totalvægten som sagt antages at være 1 :

$$\sum_{i=1}^5 a_i(0) = 1 \quad . \quad (8)$$

En speciel massefordeling opnås ved at placere hele massen på een af positionerne, f.eks. position s_3 som vist i figur 2 helt til venstre.

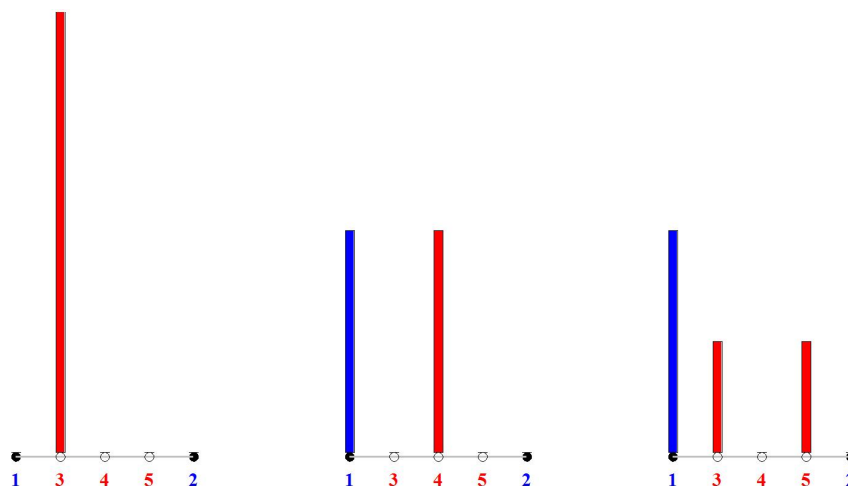
Første step i Markov-processen består nu i, at vi *spred* vægtfordelingen $\mathbf{a}(0)$ ved hjælp af en *spredningsmatrix*. Vi vil bruge følgende matrix, \mathbf{P} , til det formål:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (9)$$

3.1 Første step

Den første spredning af vægtfordelingen $\mathbf{a}(0)$ til en ny vægtfordeling

$$\mathbf{a}(1) = (a_1(1), a_2(1), \dots, a_5(1))$$



Figur 2: *Farver online*. De tre første tilstande ($k = 0, 1, 2$) i en Markov-spredning og absorption af en startfordeling hvor hele massen 1 er placeret i det indre punkt s_3 .

defineres simpelthen ved at gange \mathbf{P} på $\mathbf{a}(0)$ fra højre:

$$\begin{aligned}
 [a_1(1), a_2(1), \dots, a_5(1)] &= [a_1(0), a_2(0), \dots, a_5(0)] \cdot \mathbf{P} \\
 &= [a_1(0), a_2(0), \dots, a_5(0)] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} . \quad (10)
 \end{aligned}$$

EKSEMPEL 3.1. Hvis vi betragter den specielle start-fordeling

$$(a_1(0), a_2(0), \dots, a_5(0)) = (0, 0, 1, 0, 0) ,$$

får vi:

$$\begin{aligned}
 [a_1(1), a_2(1), \dots, a_5(1)] &= [0, 0, 1, 0, 0] \cdot \mathbf{P} \\
 &= [0, 0, 1, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (11) \\
 &= [1/2, 0, 0, 1/2, 0] ,
 \end{aligned}$$

altså netop 3'erne række i \mathbf{P} . Resultatet er vist i midten i figur 2. Husk den specielle nummerering af positionerne.

Den givne matrix \mathbf{P} i (17) ovenfor er kun ét eksempel på en Markov-spredningsmatrix. Her definerer vi nu helt generelt de matricer, der fortjener det navn, se evt. [Wikipedia](#) (forslag til link online):

DEFINITION 3.2. En kvadratisk $(n \times n)$ -matrix \mathbf{P} kaldes en *Markov-spredningsmatrix* eller en *stokastisk matrix* hvis dens elementer p_{ij} opfylder følgende to betingelser:

$$\begin{aligned} p_{ij} &\geq 0 \quad \text{for alle } i, j \quad (\text{alle elementerne er ikke-negative}) \\ \sum_{j=1}^n p_{ij} &= 1 \quad \text{for alle } i \quad (\text{summen af alle elementerne i enhver række er 1}) \end{aligned} \quad (12)$$

OPGAVE 7. Vis, at spredningsmatricen \mathbf{P} i (17) er en Markov-spredningsmatrix i henhold til ovenstående definition og at den derfor bevarer den totale masse, dvs. uanset startfordelingen har vi:

$$\sum_{i=1}^5 a_i(1) = \sum_{i=1}^5 a_i(0) = 1 \quad (13)$$

3.2 Alle efterfølgende step

Andet step i Markov-processen som vi startede ovenfor består i, at vi spreder $\mathbf{a}(1)$ med \mathbf{P} således:

$$\mathbf{a}(2) = \mathbf{a}(1) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{a}(0) \cdot \mathbf{P}^2 \quad (14)$$

og så fremdeles, til ethvert tidspunkt (efter et vilkårligt antal, k , step):

$$\mathbf{a}(k) = \mathbf{a}(k-1) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{a}(0) \cdot \mathbf{P}^k \quad (15)$$

OPGAVE 8. Bevis, at spredningsmatricen bevarer den totale masse for alle k :

$$\sum_{i=1}^5 a_i(k) = \sum_{i=1}^5 a_i(0) = 1 \quad (16)$$

OPGAVE 9. Hvis noget af massen på et 'tidspunkt' k_0 lander i een af positionerne s_1 eller s_2 , så forbliver den del af massen i de positioner til ethvert 'tidspunkt' $k > k_0$ derefter. Hvilken strukturel egenskab ved \mathbf{P} er det, som sikrer det?

4 Analyse af spredning og absorbtion

Spredningsmatricen for den specielle Markov-proces på den korte linje som er vist i figur 1 er givet ved følgende elementer og særlige *struktur*, som vi nu vil analysere lidt nærmere:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{array} \right] \quad (17)$$

Læg mærke til, at den tidligere (i opgave 1) betragtede matrix \mathbf{Q} optræder i nederste højre hjørne. Og læg mærke til, at nummereringen af positionerne (de absorberende positioner er først på listen) medfører, at de første rækker i matricen er meget simple – de kan udtrykkes med \mathbf{E} og $\mathbf{0}$.

OPGAVE 10. Lad \mathbf{P} betegne en vilkårlig $(n \times n)$ -matrix med struktur som ovenfor, dvs.:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{array} \right], \quad (18)$$

hvor \mathbf{E} er $(n-s) \times (n-s)$ -enhedsmatricen, \mathbf{Q} er en $(s \times s)$ -matrix, \mathbf{R} er en $s \times (n-s)$ -matrix, og $\mathbf{0}$ er $(n-s) \times s$ -nulmatricen (hvor alle $s \cdot (n-s)$ elementer er 0).

Følgende delopgaver er formulerede for helt generelle \mathbf{P} -matricer som i (18); det kan evt. være en fordel (kun eller først) at løse dem for den konkrete \mathbf{P} -matrix fra (17); det er iøvrigt også præcis dén konkrete sprednings-matrix, vi vil arbejde videre med i de efterfølgende afsnit.

1. Vis, at

$$\mathbf{P}^2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{R} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} & \mathbf{Q}^2 \end{array} \right]. \quad (19)$$

2. Vis helt generelt, at

$$\mathbf{P}^k = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline (\mathbf{E} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \dots + \mathbf{Q}^{k-1}) \cdot \mathbf{R} & \mathbf{Q}^k \end{array} \right]. \quad (20)$$

NB: Der optræder to enhedsmatricer i ovenstående – de har ikke nødvendigvis samme størrelse.

3. Antag, at \mathbf{Q} har egenskaben (*), således at $\mathbf{Q}^k \rightarrow \mathbf{0}$ når $k \rightarrow \infty$, og sæt

$$\mathbf{N} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1}. \quad (21)$$

Det er jo netop muligt og tilladt som vist i sætning 2.2!

Vis, at så gælder:

$$\mathbf{P}^k \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{array} \right] = \mathbf{P}^\infty \quad \text{for } k \rightarrow \infty, \quad (22)$$

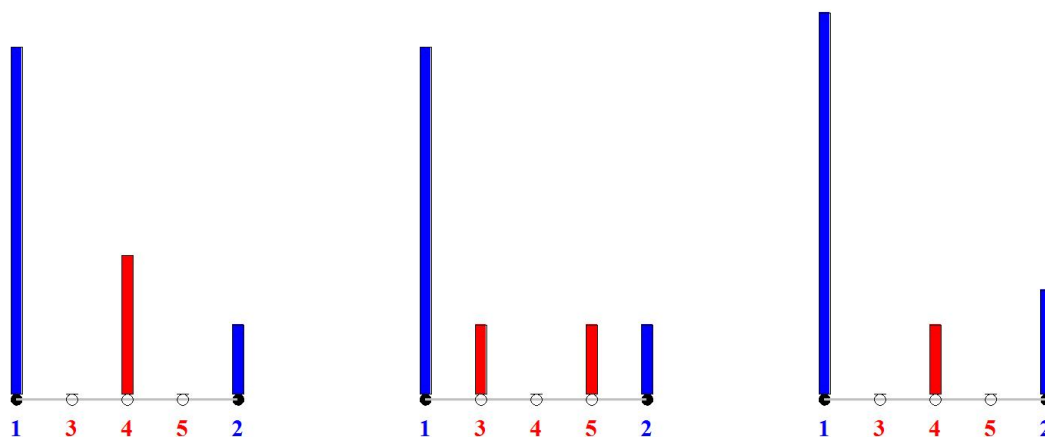
hvor lighedstegnet skal forstås som en *definition* af \mathbf{P}^∞ .

NB: Der optræder to nul-matricer i ovenstående – de har ikke nødvendigvis samme type.

OPGAVE 11. Bestem \mathbf{P}^2 , \mathbf{P}^3 , \mathbf{P}^4 , $\mathbf{N} \cdot \mathbf{R}$, og \mathbf{P}^∞ for den konkrete matrix \mathbf{P} i (17).

4.1 Animeringer af Markov-processer

Det er på grund af den egenskab ved \mathbf{P} , som er nævnt i opgave 9, at positionerne s_1 og s_2 kaldes *absorberende*, i modsætning til de indre positioner som er egentlige *sprednings*-positioner. Se figur 2 helt til højre (som viser resultatet af spredningsstep 2 for det eksempel der starter med hele vægten i position s_3) og figur 3 (der viser de efterfølgende tre step i den Markov-proces) samt figur 4 (hvor Markov-processen er animeret indtil $k = 25$).



Figur 3: *Farver online*. De tre efterfølgende tilstande $k = 3, 4, 5$ af den spredning, der blev begyndt i figur 2.

I figur 5 er vist en tilsvarende animation med start-masse-fordeling givet ved $\mathbf{a}(0) = (0, 0, 1/2, 5/16, 3/16)$. En Markov-proces for en distribution på en lang linje er animeret i figur 6.

Ved simpel inspektion af animationerne er det intuitivt rimeligt (og iøvrigt helt korrekt) at formode, at Markov processer har en del at gøre med diffusion og med varmeledning. Hvis vi 'varmer linjen op' ved at tilføre en energi-fordeling som er modelleret ved en given start-vægtfordeling $\mathbf{a}(0)$ og iøvrigt holder endepunkterne nedkølede (ved temperatur 0) så vil al energien tabes ud igennem de absorberende endepunkter og hele linjen vil til sidst blive nedkølet til temperaturen 0. Processen og tabenes størrelse kan modelleres og estimeres ved Markov-processer som behandlet her.

Andre interessante anvendelser og tolkninger vedrører som nævnt tilfældige vandringer, elektriske netværk, genetik, spilteori, geometri, grafteori, etc. Se referencerne: [4], [2], [1], [5], [6].

Figur 4: *Animeret online*. Diffusion af kerne-startfordelingen $\mathbf{a}(0) = (0, 0, 1, 0, 0)$ ved spredning på en kort linje med absorberende endepunkter – som i figurerne 2 og 3.

5 Nu kan spillet begynde!

Vi antager, at du allerede har 1 million en-kroner (!) og at du placerer alle 10^6 mønter på de indre spredende 3 positioner på spillelinjen i et kasino, som vist i figur 1. Vi lader dernæst Markov-processen sprede og absorbere mønterne ved gentagen brug af \mathbf{P} (den konkrete matrix fra (17)) på den valgte start-fordeling (vi antager, lidt urealistisk, at enhver mønt kan deles i vilkårligt mindre værdi-enheder). Vi forventer, at hele millionen til sidst, for $k \rightarrow \infty$, ender i de absorberende tilstande, og dermed er 'tabt' til 'huset'; men huset, kasinoet, kan på forskellig måde vælge at udbetale en gevinst for indsatsen – ellers var der nok heller ikke mange kunder i den butik.

OPGAVE 12. Forklar hvordan strukturen af \mathbf{P}^∞ i (22) viser, at enhver indsats til sidst til tid $k = \infty$ bliver absorberet i de absorberende positioner s_1 og s_2 .

OPGAVE 13. Den totale indsats på 1 (million kroner) diffunderer altså ud i endepunkterne af spillelinjen og den del af indsatsen som til tidspunktet k endnu er tilbage på de indre punkter er givet ved elementerne i \mathbf{Q}^k (hvordan?).

Bestem det mindste 'tidspunkt' k_0 , således at der på ethvert 'tidspunkt' k derefter med garanti er mindre end 1 krone på hver enkelt af de tre indre positioner. Vink: Brug analysen og resultatet fra opgave 1. Det vil sige, at efter 'tidspunktet' k_0 er hele millionen fordelt på s_1 og s_2 på nær højst 3 kroner, og spillet kan derfor essentielt stoppes.

Figur 5: *Animeret online*. Diffusion af en distribueret startfordeling $\mathbf{a}(0) = (0, 0, 1/2, 5/16, 3/16)$ ved Markov proces på kort linje med absorberende endepunkter.

5.1 Er der gevinst?

Lad os antage, at kasinoet vælger at udbetale en gevinst G , der afhænger af de værdier, der til sidst (efter tilstrækkelig lang tid) er blevet absorberet i henholdsvis s_1 og s_2 ved brug af den konkrete Markov-spredningsmatrix \mathbf{P} fra (17):

DEFINITION 5.1. Kasinoet definerer gevinsten G ud fra din indsats-vektor (fordelingen af din million på de *indre* positioner s_3, s_4, s_5 på spillelinjen) $\mathbf{a}(0) = (0, 0, a_3(0), a_4(0), a_5(0))$ hvor $a_3 + a_4 + a_5 = 1$, på følgende måde (bemærk, at kasinoet ikke tillader start-indsatser på hverken s_1 eller s_2):

$$G = \frac{8}{3}g \cdot a_1(\infty) + \frac{8}{3}(1-g) \cdot a_2(\infty) \quad , \quad (23)$$

hvor g er et givet reelt tal mellem 0 og 1, som fastsættes af kasinoet(!)

OPGAVE 14. Brug matricen $\mathbf{N} \cdot \mathbf{R}$ fra opgave 11 (eller \mathbf{P}^∞ direkte) til at finde gevinsten G for hver af følgende indsatser i afhængighed af den valgte værdi for g – f.eks. $g = 1/6$, $g = 1/3$, $g = 1/2$, $g = 2/3$, og $g = 5/6$:

1. $\mathbf{a}(0) = (0, 0, 1, 0, 0)$
2. $\mathbf{a}(0) = (0, 0, 0, 0, 1)$
3. $\mathbf{a}(0) = (0, 0, 1/2, 1/3, 1/6)$.

OPGAVE 15. Vis, at der uanset hvilken værdi for g , kasinoet vælger, så findes der *ikke* nogen fordeling af din indsats (på 1 million), som giver en gevinst på $G = 0$ (millioner). Du kommer altså altid hjem med noget af din indsats i behold.

Figur 6: *Animeret online*. Diffusion af en startfordeling ved Markov proces på 'lang linje' med absorberende endepunkter.

OPGAVE 16. De afgørende spørgsmål er nu:

1. Hvilke indsatses giver størst mulig G -gevinst for givne værdier af g ?
2. Kan gevinsten $G = 2$ opnås for nogen som helst kombination af indsats og g -værdi?

6 'Plat-eller-krone' med en udelelig mønt

I ovenstående analyse og beregninger var der ingen tilfældigheder på spil. Det var på forhånd helt klart og fuldt determineret hvad der skete med din million, når du først havde valgt indsatsen, og dermed kunne gevinsten – eller manglen på samme – beregnes eksakt allerede på forhånd! Og det er jo ikke sjovt – vil nogen sikkert mene.

Derfor er det heller ikke det, der foregår på et ordentligt kasino. Der kastes normalt med terninger, der blandes kort, og der rulles med kugler i roulette; *tilfældigheder* har en helt afgørende rolle at spille.

Men Markov-proces-*matematikken*, som vi har dyrket ovenfor, kan stadig bruges! Og den er stadig af uvurderlig betydning for at forstå hvad der foregår. Det er ikke svært at se, og for at illustrere det, behøver vi kun en enkelt mønt:

Placér mønten på een af de tre indre positioner (f.eks. s_3) på spillelinjen i kasinoet, som vi også besøgte ovenfor. Slå plat-eller-krone (eller få dealeren til det). Hvis plat så ryk én

plads til højre (i dette tilfælde til s_4), hvis krone så ryk én plads til venstre (i dette tilfælde til den absorberende position s_1). Vi antager, at det er en fair mønt dealeren bruger, så *sandsynligheden* for (efter dette første step med plat-eller-krone) at lande på s_4 er $p_{34} = 1/2$ og *sandsynligheden* for at lande på s_1 er $p_{31} = 1/2$, mens *sandsynligheden* for at lande på en af de andre positioner er (pr. antagelse) $p_{32} = p_{33} = p_{35} = 0$, altså præcis igen 3' die række i \mathbf{P} -matricen! *Sandsynligheden* for efter to gange plat-eller-krone ($k = 2$) at lande i position s_5 (stadig med indsatsen først placeret i s_3) er derefter givet ved det element i \mathbf{P}^2 som i den matrix står på pladsen med indices $(3, 5)$. For enhver værdi af k er *sandsynligheden* for at lande i position s_j fra position s_i efter k gange plat-eller-krone givet ved elementet på plads (i, j) i \mathbf{P}^k .

Spillet slutter selvfølgelig når mønten lander i en absorberende tilstand og der udbetales så en gevinst, f.eks. efter følgende forskrift: $8g/3$ (kroner) udbetales i gevinst hvis mønten lander i s_1 og $G = 8(1 - g)/3$ (kroner) udbetales i gevinst hvis mønten lander i s_2 .

Hvis vi som ovenfor antager, at mønten til start er sat ind på position s_3 , så er startfordelingen på spillelinjen givet ved $\mathbf{a}(0) = (0, 0, 1, 0, 0)$. *Sandsynligheden* for at mønten lander i den absorberende position s_1 (henholdsvis s_2) er så $a_1(\infty)$ (henholdsvis $a_2(\infty)$), hvor $\mathbf{a}(\infty) = \mathbf{a}(0) \cdot \mathbf{P}^\infty$ præcis som før.

Den *forventede* gevinst G_f ved plat-eller-krone spillet på den korte linje er derfor:

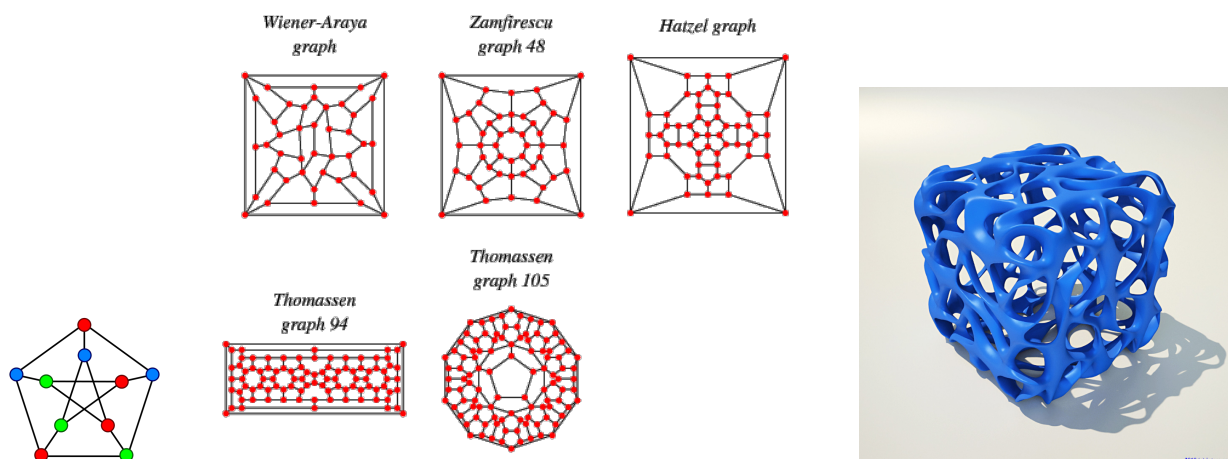
$$G_f = \frac{8}{3}g \cdot a_1(\infty) + \frac{8}{3}(1 - g) \cdot a_2(\infty) \quad . \quad (24)$$

Hvis man har tid nok kan man spille dette plat-eller-krone spil en million gange med hver enkelt af de 1 million en-kroner, som vi benyttede i afsnit 5 – placeret i de fordelinger på startpositionerne, som blev benyttet der. Den *forventede* gevinst er så for enhver af start-fordelingerne den samme som den, der blev garanteret ved Markov-processen der! Men bemærk: Gevinsten er (med plat-eller-krone spillet) kun *forventet*, ikke *garanteret* – det er forskellen!

7 Geometriske udvidelser af 'spillepladen'

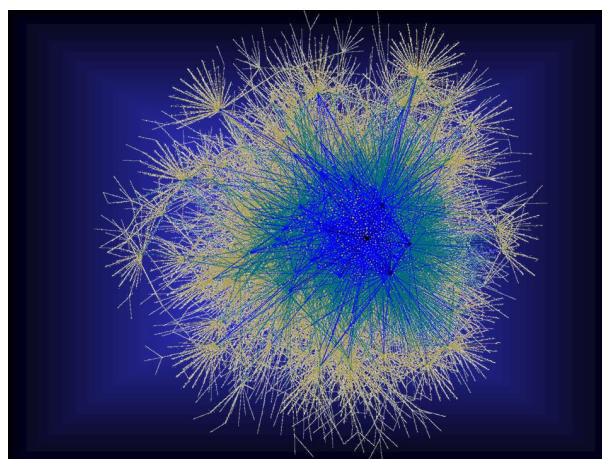
Den 'spilleplade' med kun 5 positioner, som vi har benyttet ovenfor kan naturligvis udvides til vilkårligt mere komplicerede geometrier og netværk, som for eksempel graferne og geometrierne i figur 7. Nogle af knudepunkterne skal blot vælges (i afhængighed af anvendelsen) som *indre* (spredende positioner) og resten som *rand*-knudepunkter (absorberende positioner). Markov-spredningsmatricen skal tilsvarende vælges (igen afhængig af anvendelsen) således at det for en given masse i et givet knudepunkt er veldefineret og klart hvordan massen skal spredes til hver af de respektive naboer i netværket (dvs. til de knudepunkter, der er forbundet med en kant til det betragtede knudepunkt).

Den lille bog [2] er en kort og særdeles anbefalelsesværdig introduktion til de interessante anvendelser og spørgsmål, som denne geometriske udvidelse af 'spillepladen' meget hurtigt giver anledning til. (Den er skrevet på stort set samme niveau som denne tema-opgave-tekst.)



Figur 7: *Farver online*. Eksempler. Grafer og geometrier.

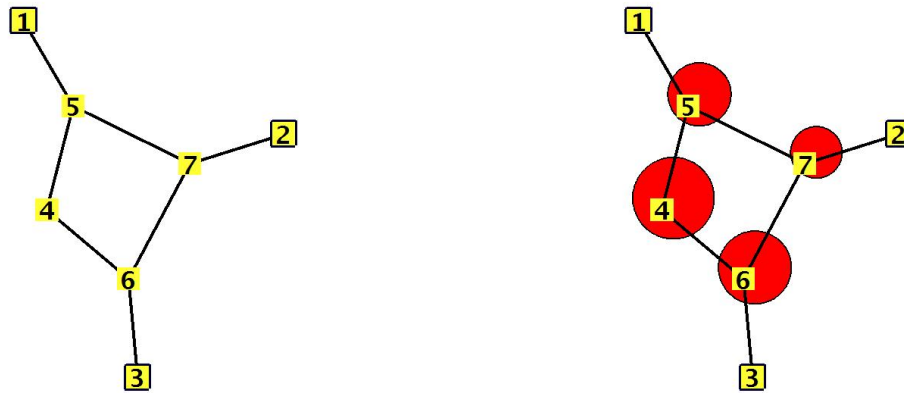
En af de største og mest komplicerede grafer, som i disse år analyseres intenst ved brug af Markov-processer er www-internetgrafen, som er forsøgt antydnet i figur 8. Se evt. [1], som giver et indblik i den aktuelle forskning på det område.



Figur 8: *Farver online*. En del af www-grafen.

7.1 Eksempler

For at illustrere Markov-processerne på disse geometrisk interessante og mere komplekse situationer ser vi først på en (stadig forholdsvis lille) 'spilleplade' med ialt 7 positioner, hvoraf 3 er absorberende, se figur 9.



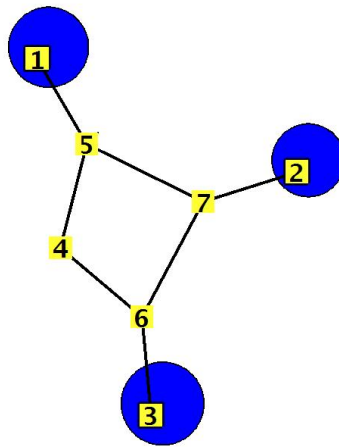
Figur 9: *Farver online*. En graf med 3 absorberende positioner og en start-vægt-fordeling på de indre 4 positioner.

Den tilhørende Markov-spredningsmatrix er her:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

OPGAVE 17. Argumentér for, at den relevante spredningsmatrix ser ud som i (25) når der (som tidligere) skal spredes lige meget til alle naboer fra ethvert givet indre knudepunkt på den 'spilleplade', der er defineret i figur 9.

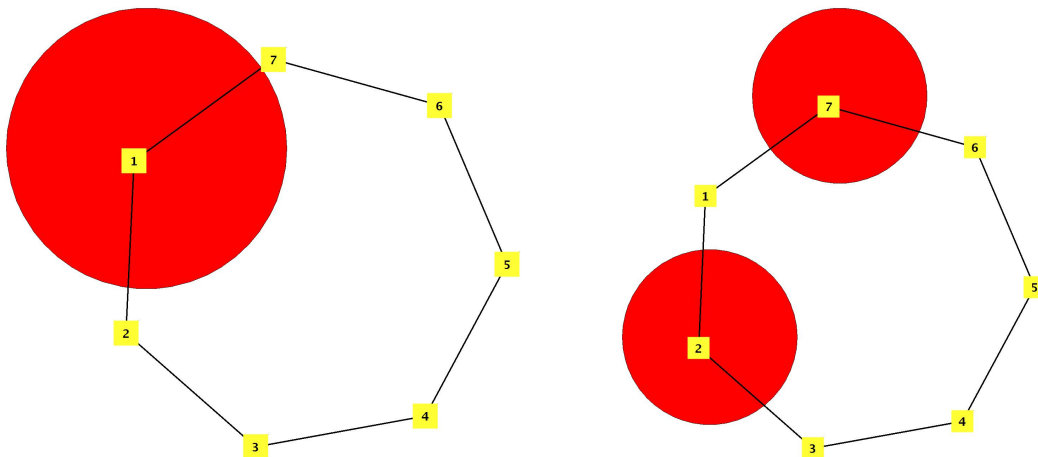
1. Identificér matricerne \mathbf{Q} og \mathbf{R} i denne \mathbf{P} -matrix.
2. Vis, at \mathbf{Q} har egenskaben (*).
3. Beregn $\mathbf{N} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1}$ og $\mathbf{N} \cdot \mathbf{R}$. Vink: Som i opgave 11.
4. Bestem slut-vægtfordelingen i de absorberende positioner, når start-vægt-fordelingen er givet ved $\mathbf{a}(0) = (0, 0, 0, 5/14, 3/14, 2/7, 1/7)$. Disse fordelinger svarer til dem, der er vist i figur 9 (til højre) og i figur 10.



Figur 10: *Farver online*. Slut-vægt-fordelingen hørende til start-fordelingen i figur 9.

7.2 Spredning uden absorbtion

Det er naturligt at spørge: Hvad sker der hvis der ikke er nogen absorberende positioner på den geometriske spilleplade? Det kan vi illustrere med en lokaliseret startfordeling på en 7-kant som vist i figur 11. Den anvendte Markov-sprednings-matrix \mathbf{P} er (stadig) forholdsvis simpel: $p_{ij} = 1/2$ hvis position s_i er forbundet med position s_j med en kant i 7-kanten, ellers er $p_{ij} = 0$.



Figur 11: *Farver online*. En graf (7-kant) uden absorberende positioner og med en start-vægt-fordeling lokaliseret i position s_1 . Til højre vises det første step i Markov-spredningsprocessen.

Efter kort 'tid' k opnås en næsten jævn og konstant fordeling af massen, dvs. Markov-spredningen uden absorberende positioner har *i dette tilfælde* en udjævnende egenskab, se animationen i figur 12.

Figur 12: *Animeret online*. Udjævning af en startfordeling ved Markov proces på en 'cirkel' uden absorberende positioner.

OPGAVE (Frivillig) 18. Vi betragter specielt den spredningsmatrix \mathbf{P} , der er benyttet i figur 11 og i figur 12. Vi sætter $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$, fordi der jo ikke er absorberende positioner på denne 'spilleplade'. Men nu er situationen anderledes for \mathbf{Q} i forhold til ovenfor:

1. Vis, at \mathbf{Q}^k *ikke* går imod $\mathbf{0}$ når k går mod uendelig. Se evt. næste del-spørgsmål, som indeholder dette.
2. Eksperimentér med påstanden: *Alle* elementerne i \mathbf{Q}^k er positive for k tilstrækkelig stor.
3. Eksperimentér med påstanden: I dette tilfælde findes en matrix \mathbf{Q}^∞ således at $\mathbf{Q}^k \rightarrow \mathbf{Q}^\infty$ for $k \rightarrow \infty$.
4. Vis, at matricen $(\mathbf{E} - \mathbf{Q})$ *ikke* er regulær. Dvs. der findes ikke nogen invers matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1}$.

Det kan vises, at hvis en Markov-spredningsmatrix \mathbf{P} er *stokastisk regulær* (som per definition betyder, at \mathbf{P} har en potens-matrix \mathbf{P}^k (for et eller andet k) hvori alle elementerne er positive), så findes der en grænsematrix med positive elementer \mathbf{P}^∞ , således at $\mathbf{P}^k \rightarrow \mathbf{P}^\infty$ for $k \rightarrow \infty$ og den kan beregnes direkte ud fra egenskaber ved \mathbf{P} , som har at gøre med de såkaldte egenverdier og egenvektorer for \mathbf{P} . De begreber er meget vigtige i en mangfoldighed af andre sammenhænge og vil blive dyrket grundigt senere i kurset. Se evt. [4, Chapter IV] eller [3, Chapter III, §6]. Sammenlign med opgave 11.

Litteratur

- [1] Fan Chung. A local graph partitioning algorithm using heat kernel PageRank. In *Algorithms and models for the web-graph*, volume 5427 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 62–75. Springer, Berlin, 2009.
- [2] Peter G. Doyle and J. Laurie Snell. *Random walks and electric networks*, volume 22 of *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984.
- [3] F. R. Gantmacher. *Applications of the theory of matrices*. Translated by J. L. Brenner, with the assistance of D. W. Bushaw and S. Evanusa. Interscience Publishers, Inc., New York, 1959.
- [4] John G. Kemeny and J. Laurie Snell. *Finite Markov chains*. Springer-Verlag, New York, 1976. Reprinting of the 1960 original, Undergraduate Texts in Mathematics.
- [5] Steen Markvorsen. Minimal webs in Riemannian manifolds. *Geom. Dedicata*, 133:7–34, 2008.
- [6] Steen Markvorsen, Sean McGuinness, and Carsten Thomassen. Transient random walks on graphs and metric spaces with applications to hyperbolic surfaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 64(1):1–20, 1992.