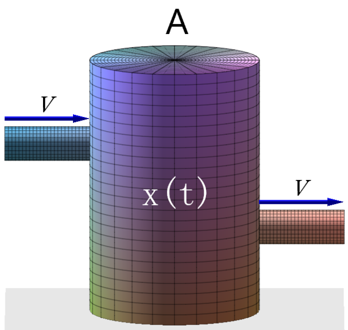
Temaøvelse 4

Koblede væskebeholdere

I alle ingeniørvidenskaber findes der real life problems som modelleres vha. systemer af differentialligninger. Helt oplagte eksempler er elektriske netværk eller svingninger i bygningskonstruktioner. I alle tilfælde er den matematiske udfordring den samme: Først drejer det drejer sig om at kunne modellere det givne problem, tænke ud af boksen så at sige, og derefter at bruge de matematiske løsningsmetoder der er til rådighed. I denne temaøvelse har vi valgt at beskrive udviklingen af saltkoncentrationer i systemer af koblede væskebeholdere, og vi indskrænker os til systemer af lineære førsteordens differentialligning med konstante koefficienter. Som en introduktion til modelleringsarbejdet analyserer vi først en enkelt (ikke koblet) væskebeholder.



På figuren ser vi en beholder A med volumen 100, som er fuld af vand tilsat salt. Til tiden $t = 0$ åbnes der for en indstrømning i beholderen af saltholdigt vand (samme slags salt) med konstant koncentration k. Indstrømninghastigheden (som fx måles i Liter/Sek) betegnes v. Der sker en tilsvarende udstrømning fra beholderen med strømningshastighed v.

Saltkoncentrationen i beholderen betegnes $x(t)$, den er ens overalt i beholderen på

Temaøvelsesopgaven fortsætter $\longmapsto$

grund af omrøring. Vi ønsker et funktionsudtryk for $x(t)$ således at vi til ehvert tidspunkt kender saltkoncentrationen. Men det kan vi ikke trække ud af de givne informationer. Vi er nødt til at gå indirekte frem. Det viser sig muligt at tænke sig frem til et udtryk for den hastighed $x'(t)$ hvormed saltkoncentrationen i beholderen ændres. Det er problemets matematiske model, og når vi har opstillet den, kan vi gå videre og håbe på at vi kan finde løsninger, dvs. vil sige finde $x(t)$. I den følgende indledende opgave skal modellen opstilles helt fra bunden.

|||| Opgave 1 Øvelse med opstillling af matematisk model og løsning

Lad δt betegne et lille tidsinterval, og besvar følgende spørgsmål:

a) Hvor meget vand strømmer der ind/ud af beholderen i løbet af δt ?

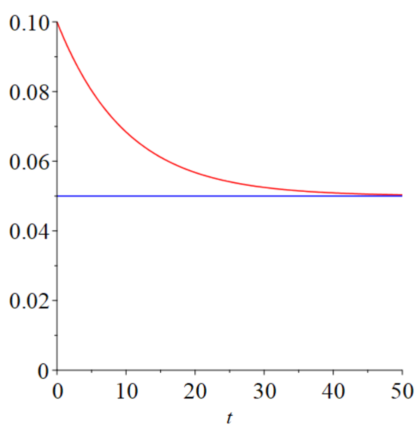
b) Hvor meget salt strømmer der ind i beholderen i løbet af δt ?

c) Hvor meget salt strømmer der ud af beholderen i løbet af δt , idet vi antager at udløbsvandets koncentration er $x(t)$?

d) Hvor stor er ændringen δx i beholderens saltkoncentration i løbet af δt (beholderens volumen er som ovenfor nævnt sat til 100)?

e) Find på basis af spørgsmål a) til d) et udtryk for $x'(t)$, det er en førsteordens lineær differentialligning. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen, idet vi sætter $k = \frac{1}{20}$ og $v = 10$.

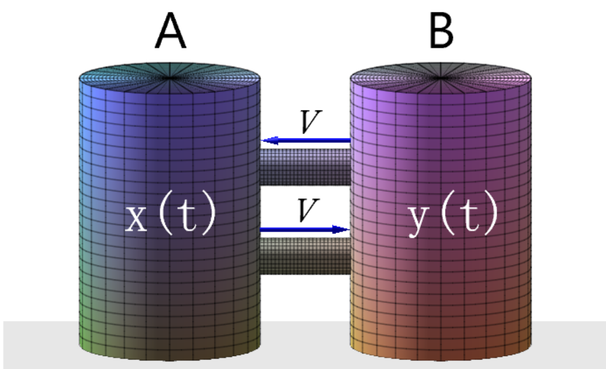
f) Den løsning til differentialligningen som opfylder begyndelsesværdibetingelsen, at saltkoncentrationen til tiden $t = 0$ er $\frac{1}{10}$, er her plottet vha. Maple med farven rød:



Find funtionsudtrykket for den betingede løsning, og beskriv med ord hvordan saltkoncentrationen udvikler sig!

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Vi betragter nu et system af to beholdere A og B, se figuren.



A har volumen R_1 og B volumen R_2, og de er fyldt af samme saltopløsning, men med forskellig koncentration. Til tiden $t = 0$ forbindes de med to rør, således at der i det ene strømmer væske fra A til B og i det andet væske fra B til A, i begge tilfælde med strømningshastigheden v. Vi ønsker at finde ud af hvordan saltudviklingen i hver af beholderne udvikler sig, dvs. finde et udtryk for saltkoncentrationen $x(t)$ i A og saltkoncentrationen $y(t)$ i B.

|||| Opgave 2 Matematisk model og løsning for to beholdere

a) Hvor stor er ændringen δx i A's saltkoncentration i løbet af tiden δt ? Og hvor stor er ændringen δy i B's saltkoncentration i løbet af tiden δt ?

b) Opstil nu den matematiske model ved på basis af spørgsmål a) at finde udtryk for $x'(t)$ og $y'(t)$. Vink: Modellen er et system af to koblede første ordens lineære differentialligninger med konstante koefficenter.

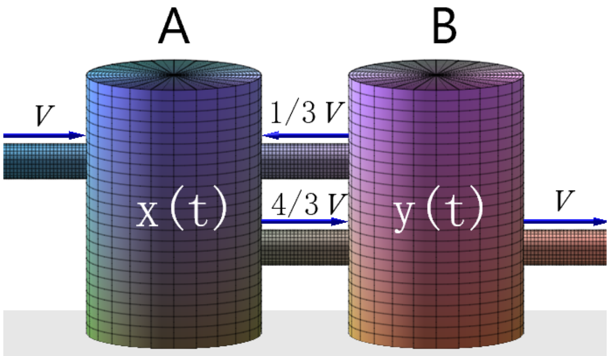
Vi sætter nu $R_1 = R_2 = 100$ og $v = 2$.

c) Opstil ligningssystemet på matrixform, og find egenværdier og tilhørende egenrum for systemmatricen. Bestem den fuldstændige løsning for systemet på matrixform.

d) Illustrér i samme plot de løsninger $x(t)$ og $y(t)$ til systemet der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix}$.

I forhold til det forrige scenarie bliver der nu tilført rent vand udefra til beholder A med strømningshastigheden v . Tilsvarende løber der saltopløsning ud af systemet fra beholder B med strømningshastigheden v . Strømmen fra A til B har hastigheden $4/3 \cdot v$, mens tilbageløbet fra B til A har hastigheden $1/3 \cdot v$, se figuren.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼



|||| Opgave 3 Homogent og inhomogent system

a) Hvor stor er ændringen δx i A's saltkoncentration i løbet af tiden δt? Og hvor stor er ændringen δy i B's saltkoncentration i løbet af tiden δt?

b) Opstil den matematiske model ved på basis af spørgsmål a) at finde udtryk for $x'(t)$ og $y'(t)$. Vink: Modellen er et homogent system af to koblede første ordens lineære differentialligninger med konstante koefficenter.

Vi sætter nu $R_1 = R_2 = 100$ og $v = 10$.

c) Find (gerne med Maple's dsolve), og illustrér i samme plot de løsninger $x(t)$ og $y(t)$ til systemet der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Udtryk i ord hvad der sker med saltopløsningerne i A og B.

Vi antager nu yderligere at den udefra tilførte væske til A ikke er rent vand, men en saltopløsning med den konstante koncentration $\frac{2}{5}$. Herved opnås et inhomogent system.

d) Find en partikulær løsning til systemet, ved at gætte på en løsning af formen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{hvor } a, b \in \mathbb{R}.$$

Bestem herefter den fuldstændige løsning til det inhomogene system vha. struktursætningen.

e) Find, og illustrér i samme plot de løsninger $x(t)$ og $y(t)$ til systemet der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Udtryk i ord hvad der sker med saltopløsningerne i A og B.

Temaøvelsesopgaven er slut