Temaøvelse 3

Lineær transformation af trekanter

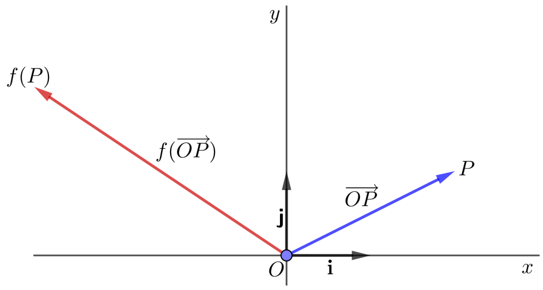
Deformationer findes allevegne. Væsker, krystaller, bjælker, billeder, bogstaver, skaller, elastikker - alt kan deformeres. Kontinuum-fysik, Differentialgeometri, Fluid dynamik, Styrkelære, Krystallografi, Træteknologi, Ingeniørgeologi, Betonkonstruktioner, Beregninger på geometriske data, Billed-analyse, Transportprocesser, er blot nogle af mange eksempler på spændende kurser på DTU, hvor du kan lære at analysere, forstå, og anvende deformationer i de respektive sammenhænge.

Denne tema-opgave handler om de simplest mulige deformationer af simple geometriske objekter, nemlig dem der beskrives ved lineære transformationer (afbildninger). Specifikt vil vi undersøge om - og i givet fald hvordan - en given trekant kan afbildes over i en anden given trekant ved brug af en lineær afbildning. Men hvad skal vi i det hele taget forstå ved en lineær afbildning af en plan punktmængde på en anden plan punktmængde?

Vi indfører følgende regler og konventioner:

- Vi betragter et standardkoordinatsystem $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ i planen.
- Koordinaterne for et vilkårligt punkt P i planen defineres som koordinaterne (x, y) for P's stedvektor $\overrightarrow{OP}$ mht. basis $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.
- Vi betragter nu en lineær afbildning f af mængden af vektorer i planen ind i mængden af vektorer i planen. Ved billedet $f(P)$ af punktet P vil vi forstå endepunktet af vektoren $f(\overrightarrow{OP})$ afsat ud fra Origo.

Temaøvelsesopgaven fortsætter $\longmapsto$



En punktmængde i planen, det kan fx være en kurve eller figur, bliver herved ført over i en anden punktmængde i planen ved at vi lader afbildningen 'virke' på alle punkterne i figuren efter afbildningskonventionen ovenfor.

|||| Opgave 1 Tranformation af linjer

Vi betragter linjestykket fra punktet $A = (1,1)$ til $B = (4,-2)$ og den lineære afbildning f som mht. standardbasis er givet ved afbildningsmatricen $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Find $f(A)$ og $f(B)$. Vis at ethvert punkt P på linjestykket fra A til B bliver afbildet på linjestykket fra $f(A)$ til $f(B)$, og at det deler linjestykket fra A til B i samme forhold som $f(P)$ deler linjestykket fra $f(A)$ til $f(B)$.

b) Vis at der generelt gælder at en lineær afbildning afbilder et ret linjestykke på et ret linjestykke, og at billedet af et punkt P deler billed-linjestykket i samme forhold som P deler det givne linjestykke.

|||| Opgave 2 Lineære transformationer i planen

Vi vedtager nu: En lineær afbildning kaldes regulær hvis den tilhørende afbildningsmatrix er regulær. For en ordens skyld vil vi ligeledes præcisere, at en trekant i det følgende betegner en 'rigtig' trekant, dvs. en trekant der ikke er udartet, altså en som har tre sider, hvor hvert par af sider har netop ét punkt fælles (et af hjørnepunkterne).

a) Vi betragter en vilkårlig trekant T_1 og en lineær afbildning. Gør rede for:

   1. at siderne i T_1 afbildes på siderne i en ny trekant T_2.
   2. at et indre punkt i T_1 afbildes på et indre punkt i T_2.
   3. at et indre punkt i T_2 er billedet af et indre punkt i T_1.

   Vink: Opgave 1, spørgsmål b.

b) En trekant T_1 har hjørnerne $(0,0)$, $(3,2)$ og $(1,4)$, mens en anden trekant T_2 har hjørnerne $(0,0)$, $(7,-1)$ og $(9,-7)$. Find afbildningsmatricen med hensyn til standardbasen for en lineær afbildning f som opfylder $f(T_1) = T_2$.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

c) Argumentér for at der generelt findes en lineær afbildning som afbilder en given trekant med det ene hjørne i Origo i en anden given trekant som også har et hjørne i Origo.

|||| Opgave 3 Illustration af itererede lineære transformationer

For et reelt tal $a \in [0, 1]$ er en lineær afbildning givet ved afbildningsmatricen

$$ {}_e\mathbf{F}_e = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . $$

Vi betragter trekanten T med hjørnene $(1, 1), (4, 1), (3, 4)$.

a) Opskriv en 2×3 matrix T_0 hvis søjler er hjørnerne i T i den angivne rækkefølge. Forklar hvordan matricen $T_1 = {}_e\mathbf{F}_e \cdot T_0$ beskriver billedet af T ved den angivne afbildning. Sæt $a = \frac{5}{6}$ og lav en illustration af T_0 og T_1 i samme Mapleplot med brug af polygonplots fra plots-pakken.
Vink til plot: skriv fx
p[0]:=polygonplot(T[0],color=[vælg selv]):
p[1]:=polygonplot(T[1],color=[vælg selv]):
display(p[0],p[1],scaling=constrained);

b) Sæt igen $a = \frac{5}{6}$ og skriv en do-løkke som laver 20 itererede afbildninger (med fortsat brug af ${}_e\mathbf{F}_e$). Illustrér de 21 trekanter i samme plot.
Vink: Du starter nok med for i from 1 to 20 do. Ved plottet vælger du måske at bruge seq i dit display.

c) Eksperimentér med forskellige værdier af a . Hvilke værdier af a giver en række af trekanter med stadigt større areal? Hvilke stadigt mindre?

d) Der ønskes nu lagt en begrænsning ind i do-løkken fra spørgsmål b). Vælg gerne igen værdien $a = \frac{5}{6}$. Vi sætter antal gennemløb op fra 20 til 100, men løkken skal stoppe hvis arealet af den sidst itererede trekant er mindre end $\frac{1}{2}$ eller større end 250 . Prøv også med print(...) at få oplyst hvilket nummer i rækken den sidst itererede trekant har. Illustrér de itererede trekanter i samme plot.
Vink: Brug for eksempel if ... then break: to gange. Eller indfør or så der kun behøves én if... sekvens.

Temaøvelsesopgaven er slut