Temaøvelse 1

Grænseværdi af brøker og størrelsesorden

Temaøvelsen består af en række eksempler på bestemmelse af grænseværdier ved hjælp af anvendelse af taylor-approksimation eller L'Hospitals regel. Vi præsenterer her nogle opgaver som kan bruges til forberedelse. På Lille Dag i semesteruge 4 arbejdes der videre i Maple TA med opgaverne, og der kan også være nye opgaver inden for det samme område.

Opgave 1 Bestemmelse af tallet e

Tallet e er et af de allervigtigste i den matematiske analyse. Det er et *trancendentalt* tal, så det er ikke enkelt at afgøre hvor stort det er. Men hvor stort er det, hvordan kan vi sammenligne det med andre tal? Vi må udvikle det som decimaltal! Det gør vi i denne opave ved hjælp af Taylor-approksimation.

Intro: Tallet e er grundtallet for den naturlige eksponentialfunktion exp. Exp indføres ofte som dén eksponentielt voksende funktion hvis hældningskoefficient i 0 er 1. Det er (relativt) nemt at vise, at en vilkårlig eksponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a > 0$ har den afledede $f'(x) = f'(0) \cdot a^x$. Det følger heraf at

$$\exp'(x) = \exp'(0) \cdot \exp(x) = 1 \cdot \exp(x) = \exp(x)\,.$$

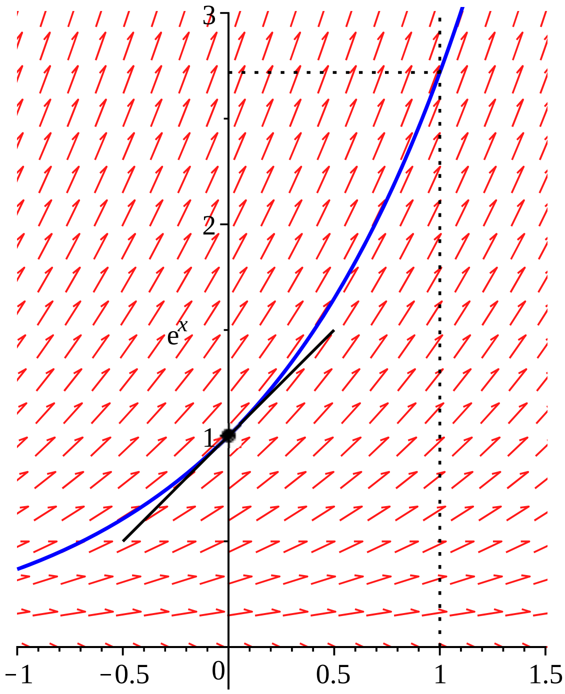
Kort sagt: Hældningskofficienten er altid den samme som funktionsværdien. Når grafen for $y = \exp(x)$ kommer op i højden $y = 2$, skal dens tangent have hældningen 2, osv. Det kan man bruge til at skitsere en graf for $\exp$ ud fra dens mulige tangenter, som det er vist på figuren nedenfor.

Videre: Tallet e er funktionsværdien for $\exp(x)$ i $x = 1$, da $\exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. Ud fra figuren tilllader vi os at konkludere at

$$\mathrm{e} < 3\,.$$

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Dette resultat må benyttes i det følgende hvor vi skal bestemme e nærmere.



Lad $P_n(x)$ betegne det approksimerende polynomium af grad n for $\exp(x)$ med udviklingspunktet $x_0 = 0$.

a) Opstil det approksimerende polynomium $P_3(x)$. Vis ved vurdering af den til $P_3(x)$ hørende restfunktion $R_3(x)$ at den fejl man højst risikerer at begå, hvis man benytter approksimationen $\mathrm{e} \approx P_3(1)$, er mindre end $\frac{1}{8} = 0.1250$.

b) Gør rede for at der generelt gælder at den fejl man højst risikerer at begå, hvis man benytter approksimationen $\mathrm{e} \approx P_n(1)$, er mindre end $\frac{3}{(n+1)!}$.

|||| Opgave 2 Grænseværdi af brøker vha. Taylors Grænseformel

Vi skal i denne opgave undersøge funktioner af typen $\frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \mathbb{R}$, hvor såvel tælleren $f(x)$ som nævneren $g(x)$ er glatte funktioner som går i mod 0 når x går imod 0.

a) Find de følgende grænseværdier ved at bruge Taylors Grænseformel på såvel tæller som nævner:

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{\sin(x)}$ og $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{e^x - x - 1}$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$ og $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2+\cos(2x)-1}{x^4}$.
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x+x^3)-x}{x^5}$.

|||| Opgave 3 Grænseværdi af brøker vha. L'Hospitals regel

En alternativ metode til at finde grænseværdierne i opgave 2 er at benytte følgende sætning (uden bevis):

|||| Sætning 1.1 L'Hospitals regel

Antag at funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable og går mod 0 når x går mod 0. Så gælder

1) Hvis $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to c$ når $x \to 0$ så gælder også $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to c$ når $x \to 0$

1) Hvis $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$ når $x \to 0$, så gælder også $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$ når $x \to 0$.

Aprøv L'Hospitals regel på nogle af spørgsmålene i opgave 2.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Opgave 4 Om reelle funktioners størrelsesorden

I denne opgave ser vi på reelle funktioner som vokser ud over alle grænser. Kan vi sige noget om deres *relative vækst*? Mere præcist drejer det sig om at undersøge hvordan funktionsbrøker, hvor såvel tæller som nævner går mod uendelig, opfører sig. Vi starter med følgende definition:

Definition 1.2 Relativ vækst

Lad c være et positivt reelt tal, og antag at funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ går imod uendelig når x gør det. Vi indfører følgende talemåder:

- Hvis $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to c$ når $x \to \infty$ er $f(x)$ og $g(x)$ af *samme størrelsesorden*.
- Hvis $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \infty$ når $x \to \infty$ er $f(x)$ er af *højere størrelsesorden* end $g(x)$.

Det første punkt i Definition 1.1 er ækvivalent med:

Hvis $\dfrac{g(x)}{f(x)} \to 0$ når $x \to \infty$ er $f(x)$ af højere størrelsesorden end $g(x)$.

Det følgende spørgsmål kan afgøres ved simple brøk-manipulationer:

a) Undersøg den relative vækst af de følgende par af funktioner

1. e^{2x} og e^{x}.
2. 2^{x} og e^{x}.
3. $3x^2$ og x^2+1.

Vi angiver nu (uden bevis) følgende variant af L'Hospitals regel.

Temaøvelsesopgaven fortsætter $\longmapsto$

Sætning 1.3 Variant af L'Hospitals regel

Antag at funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable og går mod uendelig når x går mod uendelig. Antag endvidere at $g'(x) \neq 0$ når x er tilstrækkelig stor. Så gælder

1) Hvis $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to c$ når $x \to \infty$ så gælder også $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to c$ når $x \to \infty$

1) Hvis $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to \infty$ når $x \to \infty$ så gælder også $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \infty$ når $x \to \infty$.

Brug den viste variant af L'Hospitals regel til at afgøre det følgende spørgsmål:

b) Undersøg den relative vækst for de følgende par af funktioner

1. e^x og x.
2. $\ln(5x)$ og $\ln(x)$.
3. $\ln(x)$ og x^a hvor $a > 0$.
4. a^x og x^2 hvor $a > 1$.

Der gælder følgende generelle sætning om kendte funktioners størrelsesorden:

Sætning 1.4 Kendte funtioners størrelsesorden

Lad a være et vilkårligt reelt tal større end 1, og lad b og k vilkårlige relle tal større end 0. Forudsæt endvidere $x > 0$. Så gælder:

- Eksponentialfunktionen a^x er af højere størrelsesorden end potensfunktionen x^b.
- Potensfunktionen x^b er af højere størrelsesorden end funktionen $\big(\ln(x)\big)^k$.

c) Bevis Sætning 1.4. Vink:

Sidste påstand: Brug omskrivningen $\dfrac{\big(\ln(x)\big)^k}{x^b} = \left(\dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{b}{k}}}\right)^k$ og benyt et tidligere resultat.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Første påstand: Sæt $y = a^x \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}$, og bemærk at $y \to \infty$ når $x \to \infty$. Brug herefter omskrivningen $\dfrac{x^b}{a^x} = \dfrac{\left(\frac{\ln(y)}{\ln(a)}\right)^b}{y} = \dfrac{1}{\big(\ln(a)\big)^b} \cdot \dfrac{\big(\ln(y)\big)^b}{y}$ og benyt til sidst et tidligere resultat.

Temaøvelsesopgaven er slut