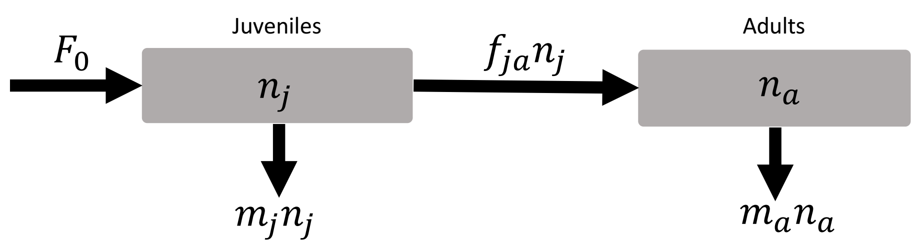
Optimering af fiskeudbytte, simpel populationsmodel

Matematisk beskrivelse af populationer af planter, dyr eller mennesker foretages ved hjælp af strukturerede populationmodeller. Modeller er formuleret som matrixligninger, almindeligvis henvist til som“livstabeller” eller “Leslie-matricer”.[1] Målet med denne øvelse er at konstruere en model af en strukturet population og løse den. Vi vil bruge modellen til at beregne stukturen af populationen og undersøge hvordan høst (skovhugst/fangst) har indflydelse på populationen.

En “struktureret” beskrivelse af en population er opdelt i livsstadier. I human demografi er livsstadierne typisk aldersgrupper, hvor hver gruppe omfatter et interval af aldre, så som 0-5 år, 5-10 år osv. Her vil vi strukturere population i to kategorier, unge og voksne. Modellen består af ligninger, der relaterer hvert livsstadie til nabolivsstadierne ved at hold rede på antallet af individer som indtræder i hvert livsstadie i et givet tidsinterval, antallet der forlader livsstadiet og antallet, der dør i det givne tidsinterval. At bestemme disse rater for en naturlig population er komplekst og er centrale elementer i populationsbiologi. Her antager vi at disse rater er givne og koncentrerer os om at udlede populationens struktur.

En simpel struktureret population

Den simpleste strukturerede model består af to livsstadier: Unge (juveniles) og voksne (adults):



Hyppigheden (antal af individer) i de to stadier er n_j og n_a. For de unge vil tre processer påvirke hyppigheden:

1. Antallet af nyfødte unge per tid er F_0.
2. Raten hvormed de unge bliver voksne er f_{ja}, så antallet af unge der modnes er $-f_{ja}n_j$. Bemærk fortegnet som indikerer et tab af unge.
3. Dødsraten for unge er m_j, så antallet af unge der dør per tid er $-m_jn_j$.

For en population i ligevægt skal disse tre processer balancere hverandre:

$$0 = F_0 - f_{ja}n_j - m_jn_j \Leftrightarrow n_j = \frac{F_0}{f_{ja} + m_j}.$$

Løsningen viser os hvordan hyppigheden af unge stiger proportionalt med antallet af nyfødte og aftager med dødeligheden og den rate, hvormed de unge modnes.

Opgave 1: Vi kan skrive ændringen i den voksne population på samme måde, som den unge population:

1. Unge der modnes: $+f_{ja}n_j$. Bemærk at dette er det samme led som unge, der forlader det unge livsstadie blot med modsat fortegn.
2. Voksne der dør: $-m_a n_a$.

Skriv en ligevægtsligning for voksne og løs den for den voksne population. Husk at indsætte resultatet for den unge population.

Opgave 2: Hvordan afhænger den voksne population af forholdet mellem dødeligheden af unge og modningsraten, f_{ja}/m_j?

Opgave 3: Balanceligningen for hvert livsstadie kan skrives på matrixform således:

$$\mathbf{s} = \mathbf{T}\mathbf{n}$$

hvor $\mathbf{T}$ er transitionsmatricen, $\mathbf{n}$ er vektoren af livsstadier, og $\mathbf{s}$ er kildevektoren. For eksemplet med den simple model, bliver matrixligningen:

$$\begin{bmatrix} -F_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{ja} - m_j & 0 \\ f_{ja} & -m_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_j \\ n_a \end{bmatrix}.$$

Løs denne matrixligning for $\mathbf{n}$ og check mod løsningen til Opgave 1.

En generel struktureret model

I eksemplet ovenfor, hvor vi kun betragtede to livsstadier, var det let at løse ligningssystemet direkte. Nu betragter en population med mange livsstadier, så som træer eller fisk, som starter livet som små frø eller larver og vokser adskillige størrelsesordener gennem livet. Balanceligningen for hvert stadie i består af et led der repræsenterer mindre individer, der vokser ind i det pågældende livsstadie, større individer, der vokser ud af stadiet, og af individer, der dør:

$$0 = f_{i-1.i}n_{i-1} - f_{i.i+1}n_i - m_i n_i.$$

Opgave 4: Tegn en skitse af den generelle fisk/træ model med 5 stadier – svarende til skitsen af den simple model – og skriv modellens matrix form. Husk, at første og sidste stadie er forskelligt fra de tre midterste stadier.

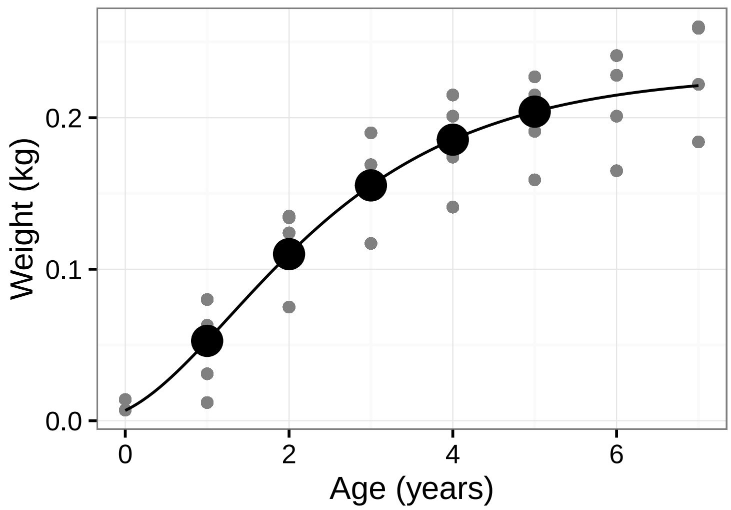
Opgave 5: Indtast matricen i Maple. Find populationstrukturen $\mathbf{n}$ for konstant vækstrate $f_{i-1.i} = f_0$ og konstant dødelighed $m_i = m_0$.

Figur 1: Biologen Ray Beverton (bagerst) og matematikeren Sidney Holt (forrest) designede teorien om strukturerede populationer som bruges i fiskeridrift. Sidney bruger et Brunsviga regneapparat med håndsving for at løse matrixligningerne numerisk. Tingesten i baggrunden er en model i pap af fiskeriudbyttet som funktion af alderen ved hvilken fiskeriet starter og dødeligheden forårsaget af fiskeriet. Foto af Michael Graham, 1949.

Hvordan optimerer vi fiskeriudbytte?

Et centralt problem i fiskeri og skovbrug er at optimere driften, så den største mængde af protein eller træ per tid bliver produceret. Ydermere skal produktionen være bæredygtig i den forstand at produktionen kan opretholdes i fremtiden. Dette er sammenfattet i begrebet "Maximum Sustainable Yield", MSY. Der er to apsekter i dette problem: Hvor intensivt skal vi høste populationen (hvilken mortalitet), og hvilke livsstadier skal vi høste.

Opgave 6: Skovbrug og fiskeri satser sædvanligvis på de største og mest værdifulde individer. Høst (træhugst/fangst) kan repræsenteres af en additionel dødelighed, i.e., $m_i = m_0 + m_{h.i}$. Hvad er virkningen af at høste de to største stadier i populationsstrukturen? Plot populationsstrukturen af den høstede population sammen med den ikke-høstede population (sæt $F_0 = 1$ og vælg en værdi af $m_{h.i}$).



Figur 2: Vægten (weight) i kg af Nordsø sild som funktion af alder (age) i år (years) (grå punkter). Linien er et fit til en von Bertalanffy vækstmodel med parametrene: asymptotisk vægt $W_\infty = 0.23$ kg, vækstkoefficient $K = 0.58$ år^{-1}, og alders-offset $i_0 = 0.63$. Sorte punkter viser de fem aldersklasser brugt i denne model.

Opgave 7: Høstudbyttet (biomasse per tid) er beregnet som høstdødelighed ganget med biomassen og opsummeret over alle høstede livsstadier:

$$Y = \sum_i m_{h.i} n_i w_i,$$

hvor w_i er individernes vægt i det i'te livsstadium. Fisks vægt er modelleret ved hjælp af en von Bertalanffy vækstmodel:

$$w(i) = W_\infty [1 - \exp(-K(i + i_0)]^3. \tag{1}$$

Parametre for Northsø sild er vist i figur 2. Hvad er udbyttet, når de to sidste stadier bliver høstet med samme rate? Hvordan afhænger raten af høstdødeligheden? – Plot Y som funktion af m_h.

Opgave 8: Hvordan opnår vi det højeste udbytte: Ved at høste unge (tidlige stadier) eller voksne(sene stadier)?