Temaøvelse 2

Strømmene i elektriske netværk

I denne temaøvelse modelleres elektriske netværk med kendte modstande, hvor der påtrykkes en spænding (med et batteri, ikke vist på figuren) i to givne knudepunkter i netværket. Der bruges lineære ligningssystemer, og vi bemærker specielt at i en anvendelse som denne er de tilhørende koefficientmatricerne født kvadratiske og regulære. Vi ønsker derfor at løse ligningssystemerne med en direkte løsningsformel der går under navnet Cramers formel, se eNote 9sætning 9.24 og de efterfølgende eksempler. I første del af temaøvelsen udvikler vi derfor vores egen Maple procedure til løsning af denne type ligningssystemer. På Lille Dag i semesteruge 7 arbejdes der videre i Möbius TA med opgaverne, og der kan også være nye opgaver inden for samme område.

2.1 Cramers løsningsformel

Læs om Cramers formel i eNote 9, sætning 9.24 og de efterfølgende eksempler. Vi vil udvikle en Maple *procedure* baseret på Cramers formel der kan løse matrixligningen

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}\ \text{ hvor }\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\ \text{ og }\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}9\\ 8\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Vi bemærker at $\mathbf{A}$ er kvadratisk og regulær. Senere udvider vi proceduren så den kan anvendes på vilkårlige matrixligninger $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ hvor $\mathbf{A}$ er en regulær $n\times n$ matrix.

a) Vi går straks igang med at finde førstekoordinaten x_1 til den ubekendte vektor $\mathbf{x}$ i eksempel (1). Afprøv følgende Maple session hvor $\mathbf{M}$ er en tom 2×2 matrix som vi udfylder plads for plads:

```
> restart:
> with(LinearAlgebra):
> A:=<1,3;2,4>
> b:=<9,8>
> M:=Matrix(2,2)
> M[1,1]:=b[1]:
```

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

```
  M[2,1]:=b[2]:
  M[1,2]:=A[1,2]:
  M[2,2]:=A[2,2]:
> M
> x[1]:=Determinant(M)/Determinant(A)
```

Find nu andenkoordinaten x_2 ved passende substitutioner i Maple sessionen.

b) I den følgende Maple session automatiserer vi indsætningen af de fire elementer i den tomme matrix **M** . Bemærk specielt:

1. Indeks i angiver rækkenummer og j søjlenummer.
2. Vi indsætter en do-løkke i anden do-løkke. Først fastholder vi j på første søjle og udfylder med i de to tilsvarende rækker. Så skifter j til anden søjle, og vi udfylder med i de hertil svarende to rækker.
3. Udfyldning udføres med en if...then...else kommando.
4. Alle do-løkker skal afsluttes med end do som kan forkortes od . Alle if kommandoer skal afsluttes med end if som kan forkortes fi.

```
> for j from 1 to 2 do
  for i from 1 to 2 do
  if j=1 then M[i,j]:=b[i] else M[i,j]:=A[i,j]:
  fi:
  od:
  od:
```

Afprøv sessionen og tjek den dannede matrix **M** og find x_1 . Du behøver kun ændre et enkelt tal i sessionen for også at kunne bruge den til x_2 , hvilket?

c) Vi automatiserer yderligere så vi kan bestemme x_1 og x_2 i én Maple session. Det sker ved at vi indsætter en tredje do-løkke med indekset k . Endvidere ønsker vi at programmet skal lagre løsningerne x_1 og x_2 . Hvad skal vi erstatte NA med for at gøre det muligt?

```
> for k from 1 to 2 do
  for j from 1 to 2 do
  for i from 1 to 2 do
  if j=k then M[i,j]:=b[i] else M[i,j]:=A[i,j]:
  fi:
  od:
  od:
  x[NA]:=Determinant(M)/Determinant(A):
  od:
```

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Formulér den rolle k spiller, og tjek at de to elementer i løsningen er lagret. Lav en ny version af programmet så det kan bruges til at løse et vilkårligt ligningssystem bestående af tre ligninger med tre ubekendte, hvor den tilhørende koefficientmatrix er regulær. Løs opgave 9.26 i eNote 9 ved hjælp af programmet.

d) Til slut skal vi formulere en færdig Maple procedure til løsning af systemer af n lineære ligninger med n ubekendte hvis tilhørende koefficientmatrix er regulær. Først øver vi os med mere elementære Maple procedurer.

Vi ønsker at få hypotenusen i en retvinklet trekant som output når vi har de to kateter som input. Vi skal bruge kommandoen proc. Vi er endvidere nødt til at erklære evt. lokale variable som indgår i progrogrammet, det sker med local.

```
> hypotenuse:=proc(a,b)
  local C, c:
  C := a^2 + b^2 :
  c := sqrt(C) :
  return c :
  end proc :
```

Afprøv proceduren med hypotenuse(3, 4) og hypotenuse(5, 12). Lav nu en procedure Prik(a,b) som udregner skalarproduktet af to givne vektorer i rummet a og b. Vink: Førstekoordinaten i en vektor v trækkes ud med v[1], tilsvarende med andenkoordinaten osv.

e) Vi har nu alle del-elementerne til den færdige Maple procedure:

```
> Lsn:=proc(X,y)
  local n,M,i,j,k,x:
  n:=RowDimension(X):
  M:=Matrix(n,n):
  for k from 1 to n do
  for j from 1 to n do
  for i from 1 to n do
  if j=k then M[i,j]:=y[i] else M[i,j]:=X[i,j]:
  fi:
  od:
  od:
  x[k]:=simplify(Determinant(M)/Determinant(X)):
  od:
  return <seq(x[i],i=1..n)>:
  end proc:
```

Læs proceduren grundigt igennem og forvent opfølgende spørgsmål. Løs igen opgave 9.26 i eNote 9 ved hjælp af af den færdige procedure.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

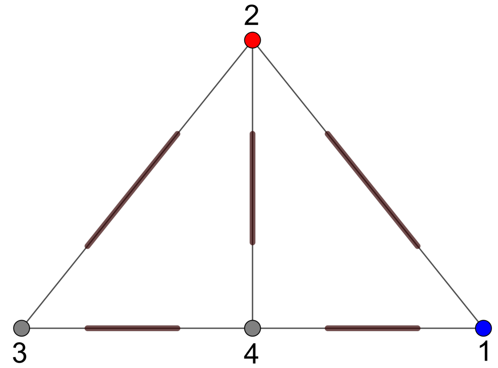
2.2 Elektriske netværk

Vi indfører følgende regler og konventioner:

- Spændingen i det knudepunkt P_i der på figurerne har nummer i, kaldes V_i.
- Specielt sættes spændingen i knudepunktet P_1 til $V_1 = 1$.
- Der vælges et andet knudepunkt P_a hvori spændingen sættes til $V_a = 0$. Værdien af a oplyses nedenfor.
- Hvis der findes en kant fra P_i til P_j så er modstanden i den kant givet ved $R_{ij} = R_{ji}$. Værdien af R_{ij} oplyses nedenfor.
- Ohm's lov giver strømstyrken I_{ij} i kanten (hvis der er en) fra P_i til P_j ved ligningen:
$$V_i - V_j = R_{ij} \cdot I_{ij}\,.$$
Bemærk at der derfor gælder $I_{ji} = -I_{ij}$. Man kan vælge konsekvent at omskrive strømme med faldende indeks til stigende indeks, hvis blot man skifter fortegnet, fx $-I_{24}$ i stedet for I_{42}.
- Kirchhoff's strømlov siger, at der ikke ophobes ladning i et *indre* knudepunkt P_i (indre vil sige at $i \neq 1, a$). Tager man strømmene i alle de kanter der har det indre punkt som endepunkt, og orienterer strømmene mod punktet, vil summen af dem derfor være 0.

Opgave 1 Netværk med fire knudepunkter og fem kanter

Vi betragter et netværk hvor $a = 2$, $R_{12} = 2$ og $R_{ij} = 1$ for alle andre kanter i netværket.



a) Opskriv ved hjælp af Ohm's lov en ligning for hver af de fem kanter i netværket. Vink: Som eksempel giver kanten fra P_1 til P_4 anledning til ligningen
$$V_1 - V_4 = R_{14} \cdot I_{14} \Leftrightarrow 1 - V_4 = 1 \cdot I_{14} \Leftrightarrow V_4 + I_{14} = 1\,.$$

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

b) Opskriv ved hjælp af Kirchhoff's lov en ligning for hver af knudepunkterne P_3 og P_4. Vink: Som eksempel giver knudepunktet P_3 anledning til ligningen

$$I_{23} + I_{43} = 0 \Leftrightarrow I_{23} - I_{34} = 0\,.$$

Ved denne fremgangsmåde opnås syv lineære ligninger med de syv ubekendte

$$V_3\,,\ V_4\,,\ I_{12}\,,\ I_{14}\,,\ I_{23}\,,\ I_{24} \text{ og } I_{34}\,.$$

c) Vis ved hjælp af rangen af henholdsvis total- og koefficentmatrix for systemet af de syv ligninger, at spændingen i hvert knudepunkt og strømstyrken i hver kant kan bestemmes entydigt ud fra de givne oplysninger, og find disse størrelser ved hjælp af Cramers formel (Lsn). Vink se *).

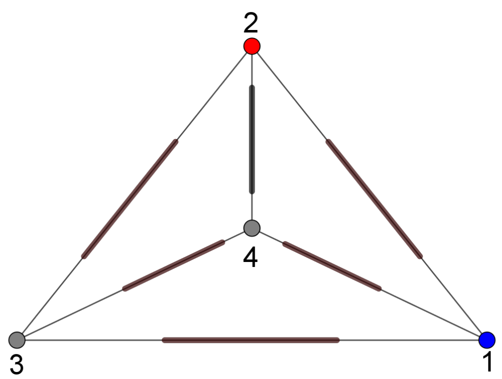
d) Hvad er summen af strømmene som går *væk fra* P_1?

e) Hvad er summen af strømmene som går *hen mod* P_2? Kommentér!

*) *Maple-teknisk bemærkning: Hvis man indtaster en matrix med tilstrækkeligt stort række- eller søjleantal, viser Maple ikke matricen på sædvanlig vis i output. Det kan man imidlertid gøre noget ved med kommandoen:* interface(rtablesize=[indsæt et tal])

|||| Opgave 2 Netværk med fire knudepunkter og seks kanter

a) I dette netværk sætter vi $a = 3$, $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 2$ og $R_{ij} = 1$ for de andre kanter i netværket.



b) Opskriv ved hjælp af Ohm's lov en ligning for hver kant i netværket.

c) Opskriv ved hjælp af Kirchhoff's lov en ligning for hvert af de knudepunkter som ikke er forbundet med batteriet.

Temaøvelsesopgaven fortsætter ⟼

Ved denne fremgangsmåde opnås otte lineære ligninger med de otte ubekendte

$$V_2\,,\ V_4\,,\ I_{12}\,,\ I_{13}\,,\ I_{14}\,,\ I_{23}\,, I_{24}\ \text{ og }\ I_{34}\,.$$

d) Tjek at summen af strømmene som går fra P_1, er lig med summen af dem som går mod P_3.

e) Strømmen fra P_2 til P_4 er i dette netværk nul. Hvorfor? Ændres det hvis vi udskifter R_{24} med en anden (positiv) modstand?

f) Strømmen fra P_2 til P_4 kan ændres, hvis vi fx udskifter R_{12}. Hvilken værdi skal R_{12} have, hvis vi ønsker

$$I_{24} = \frac{1}{10}\,?$$

g) Kan vi også vende strømmen fra P_2 til P_4 ved at regulere R_{12}? Hvilken værdi skal R_{12} have, hvis vi ønsker

$$I_{24} = -\frac{1}{10}\,?$$

Temaøvelsesopgaven er slut