

▄▄▄ Temaøvelse 2

Strømmene i elektriske netværk

Temaøvelsen består af eksempler på modellering af elektriske netværk med kendte modstande. Der påtrykkes en spænding (med et batteri) i to givne knudepunkter i netværket. Batteriet bliver ikke vist på figurerne. Opgaverne handler om spændingen i de øvrige knudepunkter og den effektive strømstyrke. Der bruges lineære ligningssystemer og matrixregning til at finde de ubekendte strømme.

Vi indfører følgende regler og konventioner:

- Spændingen i det knudepunkt P_i der på figurerne har nummer i , kaldes V_i .
- Specielt sættes spændingen i knudepunktet P_1 til $V_1 = 1$.
- Der vælges et andet knudepunkt P_a hvori spændingen sættes til $V_a = 0$. Værdien af a oplyses nedenfor.
- Hvis der findes en kant fra P_i til P_j så er modstanden i den kant givet ved $R_{ij} = R_{ji}$. Værdien af R_{ij} oplyses nedenfor.
- Ohm's lov giver strømstyrken I_{ij} i kanten (hvis der er en) fra P_i til P_j ved ligningen:

$$V_i - V_j = R_{ij} \cdot I_{ij}.$$

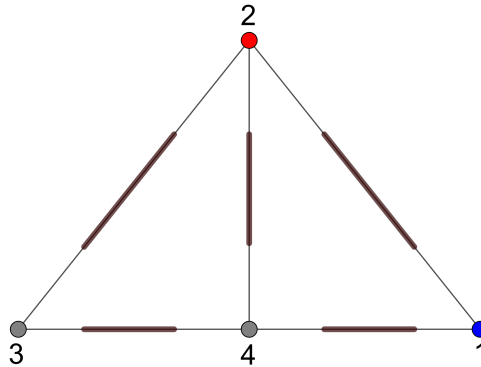
Bemærk at der derfor gælder $I_{ji} = -I_{ij}$. Man kan vælge konsekvent at omskrive strømme med faldende indeks til stigende indeks, hvis blot man skifter fortegnet, fx $-I_{24}$ i stedet for I_{42} .

- Kirchhoff's strømlov siger, at der ikke ophobes ladning i et *indre* knudepunkt P_i (indre vil sige at $i \neq 1, a$). Tager man strømmene i alle de kanter der har det indre punkt som endepunkt, og orienterer strømmene mod punktet, vil summen af dem derfor være 0.

Temaøvelsesopgaven fortsætter \mapsto

||| Opgave 1 Netværk med fire knudepunkter og fem kanter

Vi betragter et netværk hvor $a = 2$, $R_{12} = 2$ og $R_{ij} = 1$ for alle andre kanter i netværket.



- a) Opskriv ved hjælp af Ohm's lov en ligning for hver af de fem kanter i netværket. Vink: Som eksempel giver kanten fra P_1 til P_4 anledning til ligningen

$$V_1 - V_4 = R_{14} \cdot I_{14} \Leftrightarrow 1 - V_4 = 1 \cdot I_{14} \Leftrightarrow V_4 + I_{14} = 1.$$

- b) Opskriv ved hjælp af Kirchhoff's lov en ligning for hver af knudepunkterne P_3 og P_4 . Vink: Som eksempel giver knudepunktet P_3 anledning til ligningen

$$I_{23} + I_{43} = 0 \Leftrightarrow I_{23} - I_{34} = 0.$$

Ved denne fremgangsmåde opnås syv lineære ligninger med de syv ubekendte

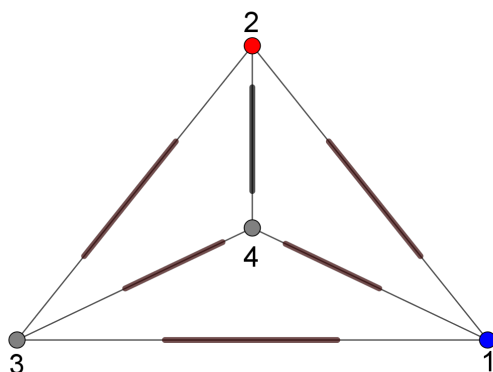
$$V_3, V_4, I_{12}, I_{14}, I_{23}, I_{24} \text{ og } I_{34}.$$

- c) Vis ved hjælp af rangen af henholdsvis total- og koefficientmatrix for systemet af de syv ligninger, at spændingen i hvert knudepunkt og strømstyrken i hver kant kan bestemmes entydigt ud fra de givne oplysninger, og angiv disse størrelser. *)
- d) Hvad er summen af strømmene som går væk fra P_1 ?
- e) Hvad er summen af strømmene som går hen mod P_2 ? Kommentér!

*) Maple-teknisk bemærkning: Hvis man indtaster en matrix med tilstrækkeligt stort række- eller søjleantal, viser Maple ikke matricen på sædvanlig vis i output. Det kan man imidlertid gøre noget ved med kommandoen: `interface(rtablesize=[indsæt et tal])`

||| Opgave 2 Netværk med fire knudepunkter og seks kanter

- a) I dette netværk sætter vi $a = 3$, $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 2$ og $R_{ij} = 1$ for de andre kanter i netværket.



- b) Opskriv ved hjælp af Ohm's lov en ligning for hver kant i netværket.
- c) Opskriv ved hjælp af Kirchhoff's lov en ligning for hvert af de knudepunkter som ikke er forbundet med batteriet.

Ved denne fremgangsmåde opnås otte lineære ligninger med de otte ubekendte

$$V_2, V_4, I_{12}, I_{13}, I_{14}, I_{23}, I_{24} \text{ og } I_{34}.$$

- d) Tjek at summen af strømmene som går fra P_1 , er lig med summen af dem som går mod P_3 .
- e) Strømmen fra P_2 til P_4 er i dette netværk nul. Hvorfor? Ændres det hvis vi udskifter R_{24} med en anden (positiv) modstand?
- f) Strømmen fra P_2 til P_4 kan ændres, hvis vi fx udskifter R_{12} . Hvilken værdi skal R_{12} have, hvis vi ønsker

$$I_{24} = \frac{1}{10} ?$$

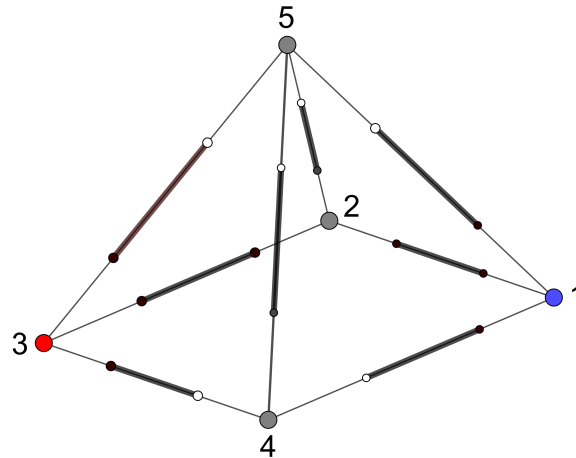
- g) Kan vi også vende strømmen fra P_2 til P_4 ved at regulere R_{12} ? Hvilken værdi skal R_{12} have, hvis vi ønsker

$$I_{24} = -\frac{1}{10} ?$$

Temaøvelsesopgaven fortsætter \longleftarrow

||| Opgave 3 Netværk med fem kundepunkter og otte kanter

I dette netværk sætter vi $a = 3$, $R_{12} = 2$ og $R_{23} = \frac{1}{2}$. Videre sættes $R_{15} = x$ og $R_{45} = y$ hvor $x, y \in \mathbb{R}_+$. Endelig er $R_{ij} = 1$ for de andre kanter i netværket.



- Tjek at summen af strømmene som går fra P_1 , er lig med summen af dem som går mod P_3 . Den er netværkets *effektive strømstyrke* og betegnes nedenfor I_e .
- Sæt $x = 1$. Hvor meget er det muligt at ændre på I_e , ved at variere y ?
- Sæt $y = 1$. Hvor meget er det muligt at ændre på I_e , ved at variere x ? Hvorfor er der den forskel, jf. foregående spørgsmål?
- Sæt $x = y = 1$. Hvordan ændres I_e hvis vi fjerner en kant, fx den fra P_1 til P_4 ?
- Sæt igen $x = y = 1$, og sæt kanten fra P_1 til P_4 på igen. Hvordan ændres I_e hvis vi indsætter en ekstra kant i netværket, fx fra P_2 til P_4 med $R_{24} = \frac{1}{2}$? Hvorfor er der den forskel, jf. foregående spørgsmål?