Affine Afbildninger
Geometrisk Deformationsteori I

Temaopgave

v./ Steen Markvorsen, DTU Matematik, 7. oktober 2011

01008 Temaøvelser i Matematik 1 - TEMA 2, 2013

1 Alt flyder!

Deformationer kan observeres allevegne. Væsker, krystaller, bjælker, billeder, bogstaver, skaller, elastikker; alt *kan* deformeres – og alt *bliver* deformeret! Se blot:

http://en.wikipedia.org/wiki/Heraclitus

DTU-kurserne Kontinuum-fysik, Differentialgeometri, Fluid dynamik, Styrkelære, Krystallografi, Træteknologi, Ingeniørgeologi, Betonkonstruktioner, Beregninger på geometriske data, Billed-analyse, Transportprocesser, er blot nogle af mange eksempler på spændende kurser på DTU, hvor du kan lære at analysere, forstå, og anvende deformationer i de respektive sammenhænge.

Denne tema-opgave handler om de simplest mulige deformationer af de simplest mulige geometriske objekter, nemlig lineære afbildninger af plane trekanter. Specifikt vil vi undersøge om - og i givet fald hvordan - en given trekant kan deformeres (afbildes eller transformeres) over i en anden given trekant ved brug af en lineær afbildning.

Temaopgaven tager udgangspunkt i en fantastisk sætning, som viser, at enhver sådan deformation kan *sammensættes af elementar-deformationer*: rotationer om Origo og skaleringer i akseretningerne, se sætning 5.1 nedenfor.

Vi vil ikke bevise den sætning her, fordi det kræver nogle værktøjer, som først bliver introduceret i Matematik 1 til foråret, men vi vil se, hvordan vi kan *bruge* sætningen og dermed *forstå*, dels hvad den går ud på og dels hvorfor den er uundværlig i alle de kurser, der nævnes ovenfor. Senere – til sidst i dette kursus, i temaopgave 4 – vil vi gennemføre en generel behandling af lineære deformationer i rummet og der tilsvarende bevise det helt generelle resultat.

1.1 Forberedelse

Som individuel forberedelse (før gruppearbejdet) til denne temaopgave kan du med fordel se eller gense den video til 01005 Matematik (uge 6–7) med Kasper, Søren, og Niels Jørgen, som handler om *lineære afbildninger*: http://www.youtube.com/watch?v=ntbvcjD-F7s.

Derudover skal vi især bruge begreber og resultater fra eNote 6 (afsnit 6.8) og fra eNote 8 (afsnittene 8.2 og 8.5 samt eksempel 8.19). I denne tekst er der ialt 17 opgaver hvoraf 2 er frivillige. Det anbefales, at du som forberedelse kigger på de første 4 opgaver.

2 Affine afbildninger i planen

Vi vil bruge et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ i planen som i eNote 6 – se afsnit 6.8 i den eNote.

Affine afbildninger er sammensat af lineære afbildninger og parallelforskydninger. Vi får derfor også brug for beskrivelsen og gennemgangen af lineære afbildninger af vektorrummet bestående af geometriske vektorer i planen på sig selv som præsenteret i eNote 8 – se afsnittene 8.2 og 8.5 og eksempel 8.19 i det afsnit.

Vi vil bruge én og kun én basis til beskrivelse af de geometriske vektorer i planen, nemlig den der er givet ved det sædvanlige retvinklede koordinatsystem $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. De lineære afbildninger, parallelforskydningerne, vektorerne og deres billedvektorer vil alle blive beskrevet ved deres koordinater med hensyn til denne ene basis. Derfor vil vi undlade at 'garnere' vektorer og afbildnings-matricer med basis-referencer – som vi ellers burde – og simpelthen blot skrive $\mathbf{K}$ for ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{K}_{\mathrm{e}}$ og tilsvarende for de geometriske vektorer skriver vi $\mathbf{a}$ i stedet for ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{a}$.

2.1 Lineære afbildninger

En lineær afbildning f af mængden af geometriske vektorer i planen (afsat ud fra Origo O) ind i sig selv er som bekendt bestemt ved

$$f : \mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{K}\,\mathbf{x} \quad , \tag{1}$$

hvor $\mathbf{K}$ er *afbildningsmatricen* for den givne afbildning med hensyn til standardbasis.

2.2 Trekanter

En *trekant* $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ i planen er – som beskrevet i eNote 6, afsnit 6.8.2 – givet ved to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ og et fælles fodpunkt $p = (p_1, p_2)$. Trekanten er så at sige udspændt af det *hængsel*, der har kantvektorerne $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ afsat ud fra ophængnings-punktet p, se figur 1 til højre. Den specielle trekant $\triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ vil vi kalde *basistrekanten* i planen, se figur 1 til venstre.

2.3 Affine afbildninger af trekanter

De punkter i planen som ligger inde i (eller på en kant af) basistrekanten $\triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ ønskes afbildet ind i (eller på en kant af) trekanten $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$. Det gør vi på følgende måde, se eNote 8, Definiton 8.15:

Først konstrueres matricen $\mathbf{K}$ ved hjælp af de to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$således:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad , \tag{2}$$

og dernæst betegner vi *stedvektoren* fra O til fodpunktet p med (ikke overraskende) $\mathbf{p}$.

Så vil afbildningen

$$\mathrm{A} : \mathbf{x} \to \mathrm{A}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{p} \tag{3}$$

afbilde hele basis-trekanten $\triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ på trekanten $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$. Med andre ord, hvis $\mathbf{x}$ er stedvektor til et punkt inde i (eller på en kant af) $\triangle(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ så er $\mathrm{A}(\mathbf{x})$ stedvektor til et punkt inde i (eller på en kant af) trekanten $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})$.

OPGAVE 1. Overvej detaljen i den påstand. Vink: Hvis $\mathbf{x}$ er en linearkombination af $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ således at $\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{i} + \beta \cdot \mathbf{j}$, så er $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathrm{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{p}$ en linearkombination (med de samme koefficienter α og β) af $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. De linearkombinationer, der er aktuelle for trekanterne har $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, og $\alpha + \beta \leq 1$.

DEFINITION 2.1. En afbildning A som er konstrueret på ovenstående måde ud fra to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ samt et punkt p kaldes en *affin afbildning* af planen ind i planen. En affin afbildning – en affin deformation – består altså af en lineær afbildning (givet ved matricen $\mathbf{K}$) efterfulgt af en translation (givet ved stedvektoren $\mathbf{p}$).

En vilkårlig figur i planen bliver altså ført over i en anden figur i planen ved at vi lader den affine afbildning 'virke' på alle stedvekorerne i figuren i henhold til afbildnings-forskriften A ovenfor.

I det følgende vil vi 'nøjes' med at betragte affine afbildningers 'virkning' på basistrekanter, og i forlængelse af notationen ovenfor vil vi simpelthen tillade os at skrive

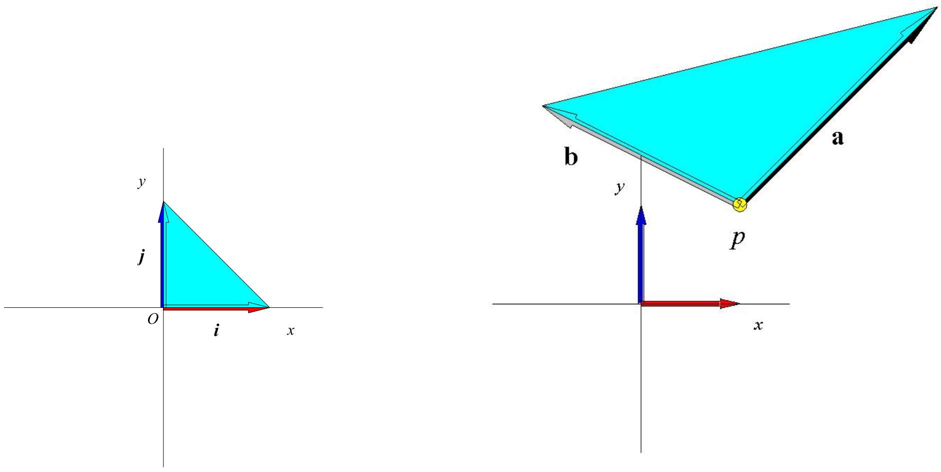
$$\triangle\,(p,\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{K} \triangle\,(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) + \mathbf{p} \quad . \tag{4}$$

Vi vil især beskæftige os de lineære afbildningsmatricer $\mathbf{K}$; det er dem, der indeholder den egentlige *deformation* af trekanterne.

OPGAVE 2. Vis, at arealet af den deformerede trekant $\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{K} \triangle\,(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) + \mathbf{p}$ er givet ved

$$\mathrm{Areal}(\triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b})) = \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{bmatrix})| = \frac{1}{2}|\det(\mathbf{K})| \quad . \tag{5}$$

Vink: Se eNote 6, Sætning 6.52.



Figur 1: Basistrekanten til venstre og en deformeret trekant til højre.

Et af formålene med denne temaøvelse er at indse, at enhver lineær 2×2-afbildnings-matrix $\mathbf{K}$ kan dekomponeres i fire faktorer, nemlig to rotationer (om Origo) og to skaleringer (én i x-aksens retning og én i y-aksens retning).

Enhver ønsket trekant i planen kan derfor fremstilles og bygges op ud fra basistrekanten ved at bruge 5 elementar-deformationer: to rotationer, to skaleringer, og en parallelforskydning på basistrekanten. Den faktorisering, den proces, er illustreret med et konkret eksempel i figur 2.

For at få præcis fat i, hvad der foregår i den animation vil vi først se på og præcisere de lineære afbildninger, som vi kalder *rotationer* og *skaleringer*.

3 Rotationer omkring Origo

Rotationerne, dvs. drejningerne af vektorerne i planen, er behandlet i eNote 8 Eksempel 8.19.

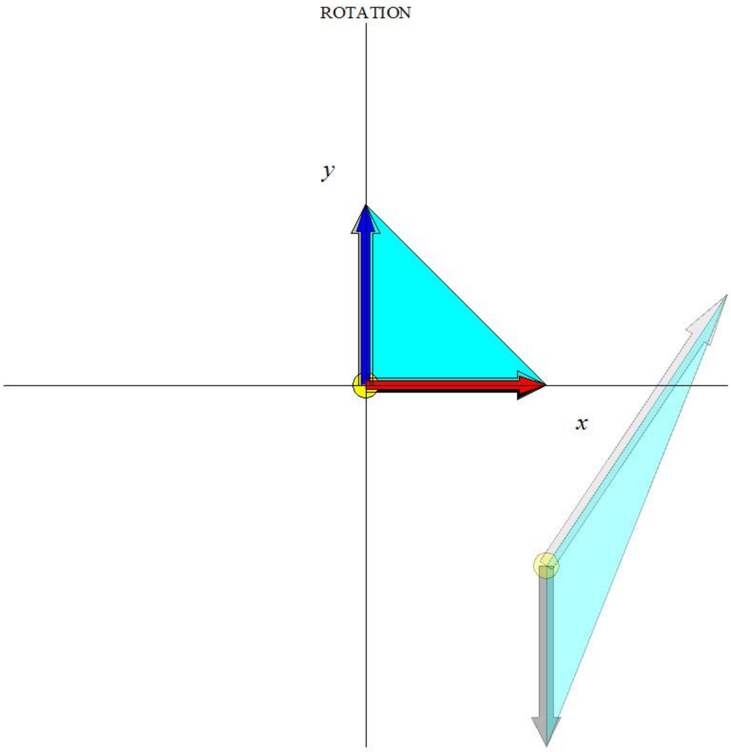
Rotationsmatricer er specielle typer af deformationsmatricer.

DEFINITION 3.1. En 2D rotationsmatrix er bestemt ud fra en rotations-vinkel φ således:

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad , \tag{6}$$

hvor φ er en vinkel i intervallet $[-\pi, \pi]$.

Hvis vi benytter $\mathbf{R}_\varphi$ som afbildningsmatrix på en vektor $\mathbf{x}$ i planen (afsat ud fra Origo), så er resultatet $\mathbf{R}_\varphi\mathbf{x}$ en vektor, der fremkommer ved at dreje $\mathbf{x}$ vinklen φ omkring Origo. Hvis $\varphi > 0$ så roterer $\mathbf{R}_\varphi$ vektorer i positiv omløbsretning i planen – altså imod uret, se figur 3; hvis $\varphi < 0$ så roterer $\mathbf{R}_\varphi$ vektorer i negativ omløbsretning – altså med uret.



Figur 2: Sætning 5.1 i aktion i planen. En Affin afbildning fra basistrekant til givet trekant. Animeret. Klik på figuren.

I figur 3 vises rotation af en trekant igennem rotationsintervallet $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

OPGAVE 3. Lad $\mathbf{a}$ betegne vektoren $\mathbf{a} = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta))$ for en given værdi af θ. Vis, at så er $\mathbf{R}_\varphi \mathbf{a} = (2\cos(\theta+\varphi), 2\sin(\theta+\varphi))$ for enhver værdi af φ.

OPGAVE 4. Vis, at enhver rotationsmatrix $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\varphi$ som givet ved ligningen (6) har følgende egenskaber

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{R}) &= 1 \\ \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} &= \mathbf{E} \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

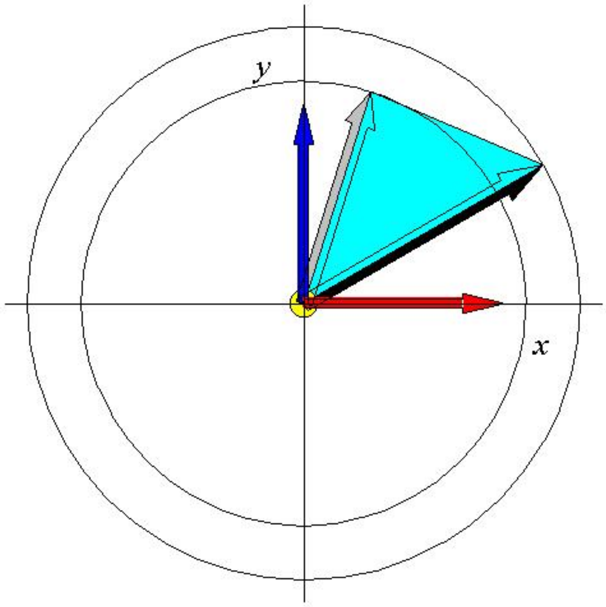
OPGAVE 5. Vis omvendt, at hvis en matrix $\mathbf{P}$ tilfredsstiller de to betingelser i (7)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P}) &= 1 \\ \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P} &= \mathbf{E} \quad , \end{aligned} \tag{8}$$

så er $\mathbf{P}$ en rotationsmatrix, dvs. så findes der en vinkel $\varphi \in [-\pi, \pi]$ sådan at

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad . \tag{9}$$

Vink: Vis først – ved kun at bruge (7) – at de to søjlevektorer i $\mathbf{P}$ begge har længden 1 og at de er vinkelrette på hinanden (med hensyn til det sædvanlige skalar-produkt



Figur 3: Rotation af hængsel. Animeret.

i planen. Og husk, at hvis en vektor har længden 1, så *kan* den skrives på formen $(\cos(*), \sin(*))$.

OPGAVE 6. Vis, at hvis $\mathbf{R}_\varphi$ er en rotationsmatrix, så er den transponerede matrix $\mathbf{R}_\varphi^\top$ også en rotationsmatrix og

$$\mathbf{R}_\varphi^\top = \mathbf{R}_{-\varphi} = \mathbf{R}_\varphi^{-1} \quad . \tag{10}$$

OPGAVE 7. Skalarproduktet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ af to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ bevares ved rotation:

$$\left(\mathbf{R}_\varphi \mathbf{a}\right) \cdot \left(\mathbf{R}_\varphi \mathbf{b}\right) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad . \tag{11}$$

Bevis den påstand. Vink: Bemærk, og brug eventuelt, at et skalarprodukt kan skrives som et matrix-produkt:

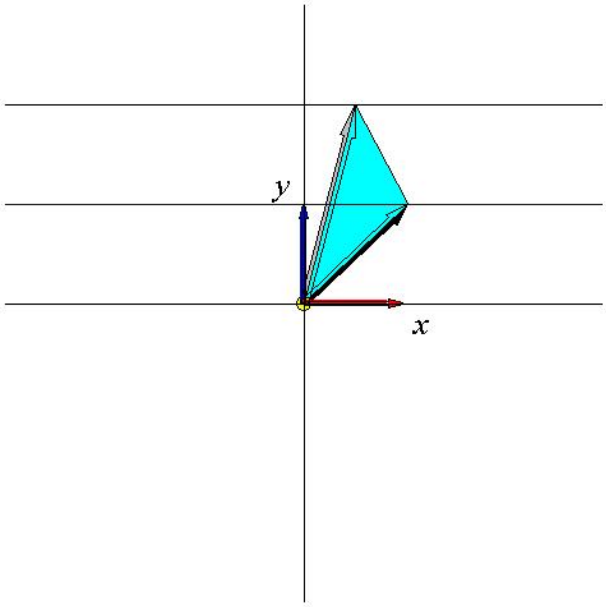
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Omvendt gælder, at bevarelse af skalarprodukter er (næsten) en karakteriserende egenskab ved rotationsmatricer:

OPGAVE 8. Hvis en lineær afbildning med matrix $\mathbf{P}$ bevarer skalarproduktet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ af ethvert par af vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, altså $(\mathbf{Pa}) \cdot (\mathbf{Pb}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, og hvis $\det(\mathbf{P}) > 0$, så er $\mathbf{P}$ en rotationsmatrix, dvs. der findes en vinkel $\varphi \in [-\pi, \pi]$ sådan at

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad . \tag{13}$$

Bevis den påstand.



Figur 4: Skalering af hængsel i $x-$akse-retning med faktorer $\sigma_1 \in [1,3]$. Animeret.

4 Skaleringer i akseretningerne

Skaleringsmatricerne for skalering i henholdsvis $x-$akse-retning og i $y-$akse-retning er, med givne skaleringskonstanter σ_1 og σ_2 langt simplere end rotationsmatricer:

$$\mathbf{S}^x_{\sigma_1} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{14}$$

og

$$\mathbf{S}^y_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad . \tag{15}$$

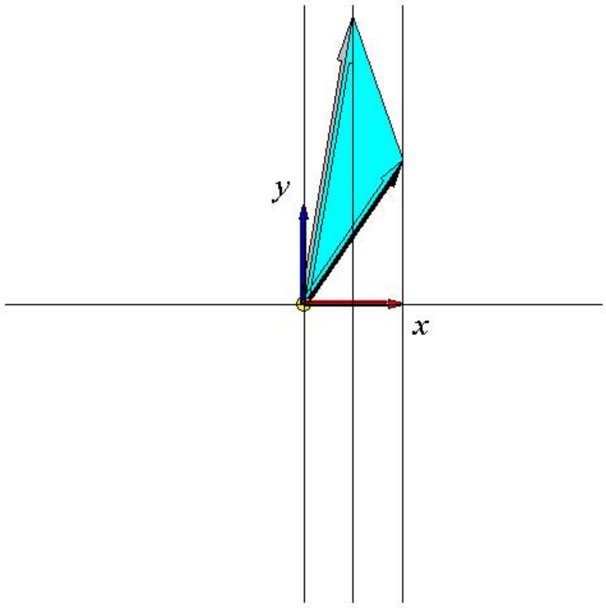
Bemærk, at vi kan udføre begge skaleringer på een gang ved:

$$\mathbf{S}^{x,y}_{\sigma_1,\sigma_2} = \mathbf{S}^x_{\sigma_1} \cdot \mathbf{S}^y_{\sigma_2} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad . \tag{16}$$

Se animationerne af de to typer skaleringer i figurerne 4 og 5.

OPGAVE 9. Lad $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ betegne vektorerne $\mathbf{a} = (1,1)$ og $\mathbf{b} = (1,2)$. Bestem længderne $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{S}^x_3\mathbf{a}|$, $|\mathbf{S}^x_3\mathbf{b}|$. Argumentér for, at skalering i x-akseretning (og i y-akseretning) sædvanligvis *ikke* bevarer skalarprodukt af vektorer. Hvorfor kan vi kun skrive 'sædvanligvis' her?

OPGAVE 10. Vis, at $\mathbf{S}^x_{\sigma_1} \cdot \mathbf{S}^y_{\sigma_2} = \mathbf{S}^y_{\sigma_2} \cdot \mathbf{S}^x_{\sigma_1}$.



Figur 5: Skalering af hængsel i $y-$akse-retning med faktorer $\sigma_2 \in [-1,1]$. Animeret.

5 Hovedsætning for 2D (deformations-)matricer

Der gælder et fantastisk resultat om alle matricer, som vi foreløbig vil nøjes med at formulere her for regulære $2 \times 2-$matricer (med positiv determinant) - for at få en første fornemmelse af, hvad det hele går ud på.

Bemærk, at vi ikke her *beviser* sætningen – det kommer senere i kurset når vi har flere værktøjer til rådighed fra lineær algebra. Faktisk gælder en tilsvarende sætning om *alle matricer* – de behøver ikke engang at være kvadratiske, men det vender vi også tilbage til i tema-opgave 4 til foråret! Det helt generelle resultat kendes under navnet SVD som står for *Singular Value Decomposition*. En god reference til dette er [4].

SÆTNING 5.1. *Enhver regulær* 2×2*-(deformations-)matrix* $\mathbf{K}$ *med positiv determinant kan skrives som et produkt af* 3 *matricer (*3 *elementar-deformationer) således:*

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^\top \quad , \tag{17}$$

hvor $\mathbf{U}$ *og* $\mathbf{V}$ *er rotationsmatricer og hvor* $\mathbf{\Sigma}$ *er en entydig bestemt diagonalmatrix med positive diagonalelementer* $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$*:*

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \qquad \textit{hvor} \quad \varphi \in [-\pi, \pi] \quad , \tag{18}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \qquad \textit{hvor} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 > 0 \quad , \tag{19}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \qquad \textit{hvor} \quad \psi \in [-\pi, \pi] \quad . \tag{20}$$

NB: Den transponerede matrix, som skal benyttes i (17), ser derfor således ud:

$$\mathbf{V}^{\top} = \mathbf{R}_{-\psi} = \mathbf{R}_{\psi}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \quad . \tag{21}$$

Det er denne sætning, der garanterer, at enhver affin afbildning af planen kan fremstilles som to rotationer, to skaleringer og en parallelforskydning, i passende rækkefølge, som lovet ovenfor; fordi nu kan vi jo skrive:

$$\begin{aligned} \triangle(p,\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \mathbf{K}\,\triangle\,(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) + \mathbf{p} \\ &= \left(\mathbf{U}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{V}^{\top}\right)\triangle\,(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) + \mathbf{p} \\ &= \left(\mathbf{R}_{\varphi}\cdot\mathbf{S}^{y}_{\sigma_2}\cdot\mathbf{S}^{x}_{\sigma_1}\cdot\mathbf{R}_{-\psi}\right)\triangle\,(O,\mathbf{i},\mathbf{j}) + \mathbf{p} \quad , \end{aligned} \tag{22}$$

og dernæst udføre hver enkelt af elementar-deformationerne i den rækkefølge på basistrekanten som eksemplificeret i figur 2.

Som sagt vil vi antage at sætningen er korrekt, og så iøvrigt se på hvordan vi *ved hjælp af sætningen* kan få oplysninger om, hvor meget der skal roteres og hvilke skaleringsfaktorer, der skal bruges, når vi kun har kendskab til konkret givne deformationsmatricer **K** – for eksempel med henblik på at konstruere deformationsfilmen i figur 2 – jvf. Opgave 15.

Læg mærke til, at der er lige så mange uafhængige 'oplysninger' i **K**, nemlig de 4 matrixelementer k_{ij}, som der er parametre at gøre godt med på højresiden i ligningen (17), nemlig φ, ψ, σ_1, og σ_2. Så pengene passer! I den forstand udkrystalliserer sætningen det geometriske indhold af de 4 givne elementer i **K**.

5.1 Bestemmelse af elementar-deformationerne

Med henblik på i ethvert konkret tilfælde at kunne splitte en deformationsmatrix **K** op i de 4 elementar-deformationer må vi derfor nu finde ud af, hvordan vi kan bestemme φ, ψ, σ_1, og σ_2 direkte ud fra **K**.

Først definerer vi (se [2, p. 120]):

DEFINITION 5.2. *Cauchy–Green matricen* for den lineære afbildning, der har afbildningsmatrix **K**, er defineret ved:

$$\mathbf{G} = \mathbf{K}^{\top}\cdot\mathbf{K} \tag{23}$$

OPGAVE 11. Vis, at **G** er symmetrisk:

$$\mathbf{G}^{\top} = \mathbf{G} \quad . \tag{24}$$

Ved hjælp af **G** kan vi nu finde skaleringskonstanterne σ_1 og σ_2:

OPGAVE 12. Bestemmelse af σ_1 og σ_2: Vis, at

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G}) &= \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \\ \mathrm{spor}(\mathbf{G}) &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad . \end{aligned} \tag{25}$$

Her er et ret detaljeret *vink* til at finde sporet (og determinanten) af $\mathbf{G}$ udtrykt alene ved σ_1 og σ_2:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \left(\mathbf{U}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{V}^\top\right)^\top \cdot \left(\mathbf{U}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{V}^\top\right) \\ &= \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{U}^\top\right) \cdot \left(\mathbf{U}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{V}^\top\right) \\ &= \mathbf{V}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\left(\mathbf{U}^\top\cdot\mathbf{U}\right)\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{V}^\top \\ &= \mathbf{V}\cdot\mathbf{\Sigma}^2\cdot\mathbf{V}^\top \quad . \end{aligned} \tag{26}$$

Ovenfor i (26) har vi brugt, at $\mathbf{\Sigma}$ er symmetrisk og at $\mathbf{U}$ er en rotationsmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}^\top &= \mathbf{\Sigma} \\ \left(\mathbf{U}^\top\cdot\mathbf{U}\right) &= \mathbf{E} \quad . \end{aligned} \tag{27}$$

Den sidste ligning i (26) viser, at $\mathbf{G}$ ikke afhænger af φ men kan udtrykkes udelukkende ved brug af ψ, σ_1, og σ_2:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \tag{28}$$

Udregn dette matrixprodukt og aflæs direkte, at sporet af $\mathbf{G}$ er $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Desuden fås determinanten af $\mathbf{G}$ også umiddelbart fra (28).

Da sætning 5.1 jo garanterer, at σ_1 og σ_2 er positive, kan de derefter for en given matrix $\mathbf{K}$ bestemmes direkte ud fra de to ligninger i (25) - ved simpelthen at løse en 2.grads-ligning:

Sæt $x = \sigma_1^2$ og $y = \sigma_2^2$, så er

$$\begin{aligned} x\cdot y &= \det(\mathbf{G}) \\ y &= \mathrm{spor}(\mathbf{G}) - x \quad , \end{aligned} \tag{29}$$

sådan at det specielt følger heraf, at

$$x\cdot(\mathrm{spor}(\mathbf{G}) - x) = \det(\mathbf{G}) \quad , \tag{30}$$

og dermed, at x er løsning til ligningen:

$$x^2 - \mathrm{spor}(\mathbf{G})\cdot x + \det(\mathbf{G}) = 0 \quad , \tag{31}$$

hvorefter y kan findes fra den sidste ligning i (29) – eller ved at bemærke, at y *også* er (den anden) løsning til (31)!

OPGAVE 13. Lad $\mathbf{K}$ betegne følgende matricer og bestem σ_1 og σ_2 i hvert enkelt tilfælde. Husk, at $x = \sigma_1^2$ og $y = \sigma_2^2$ når du løser ligningerne ovenfor, og husk, at $\mathbf{G} = \mathbf{K}^\top \cdot \mathbf{K}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad .\end{aligned} \tag{32}$$

OPGAVE (Frivillig) 14. Bestemmelse af vinklerne φ og ψ: Når vi som ovenfor har fundet σ_1 og σ_2 ud fra $\mathbf{K}$, så kan ψ bestemmes ud fra 28. Hvordan? Til sidst kan φ bestemmes ud fra dekompositionen (17). Hvordan? Bestem værdier af φ og ψ for hver enkelt af de tre deformationsmatricer $\mathbf{K}_i$ fra opgave 13 ovenfor.

OPGAVE (Frivillig) 15. I figur 2 konstrueres følgende trekant ved deformation af en basistrekant:

$$\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad , \tag{33}$$

hvor $p = (1, -1)$, $\mathbf{a} = (0, -1)$, og $\mathbf{b} = (1, 3/2)$. Bestem skaleringsfaktorerne σ_1 og σ_2 og vinklerne φ, ψ, som 'optræder' i denne animation. Numeriske beregninger med et par betydende decimaler er OK.

6 Hvad koster det?

Vi forestiller os en *fabrik* M_P, der omdanner basis-trekanter $\triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ til deformerede trekanter $\triangle(O, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{K} \triangle (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ efter vilkårlige deformations-matricer $\mathbf{K}$, som defineres af kunderne. Basistrekanterne haves på lager en masse og er gratis! Men hvad koster deformationerne? Fabrikken har maskiner, der kan rotere om O og skalere i akseretningerne.

Det er kun skaleringerne der *ikke* er gratis på den fabrik:

DEFINITION 6.1. Prisen på hver enkelt deformeret trekant (dvs. et mål for den *energi* det koster at deformere et standard hængsel med deformationsmatricen $\mathbf{K}$) er på fabrikken M_P bestemt ved σ-værdierne for $\mathbf{K}$, altså $\sigma_1 = \sigma_1(\mathbf{K})$ og $\sigma_2 = \sigma_2(\mathbf{K})$ således:

$$P(\mathbf{K}) = (1 - \sigma_1(\mathbf{K}))^2 + (1 - \sigma_2(\mathbf{K}))^2 \quad . \tag{34}$$

En anden, konkurrerende, fabrik M_Q prissætter deformationerne på en lidt anden måde. Basistrekanterne haves også her på lager og er stadig gratis:

DEFINITION 6.2. Prisen på hver enkelt deformeret basis-trekant (givet ved deformationsmatricen $\mathbf{K}$) fra fabrikken M_Q defineres også her ud fra σ-værdierne for $\mathbf{K}$, men nu efter følgende formel:

$$Q(\mathbf{K}) = \left(\frac{1}{\sigma_1(\mathbf{K})} - \sigma_1(\mathbf{K}) \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_2(\mathbf{K})} - \sigma_2(\mathbf{K}) \right)^2 \quad . \tag{35}$$

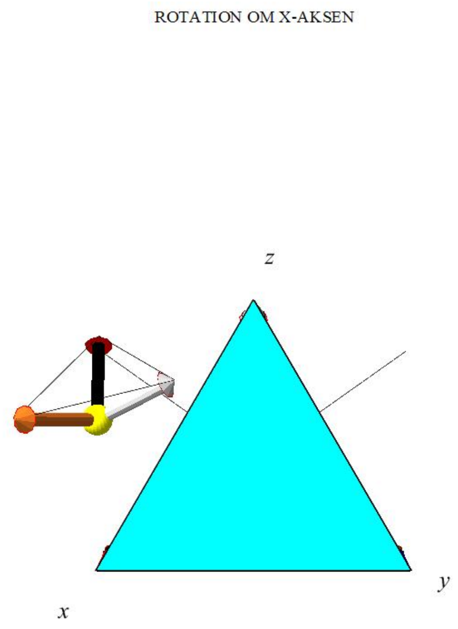
OPGAVE 16. Hvilken fabrik er i hvert enkelt tilfælde billigst ved produktionen af de trekanter, der fremkommer ved brug af de 3 deformationsmatricer $\mathbf{K}_i$, der er angivet i opgave 13?

OPGAVE 17. Gælder det, at uanset hvilken trekant kunden ønsker konstrueret, så er det altid den *samme* fabrik (af de to betragtede), der kan gøre det billigst?

I materialeforskningen spiller Cauchy–Green matricerne og de tilhørende σ_i-værdier for deformationsmatricerne $\mathbf{K}$ en fundamental rolle for beskrivelsen af hvordan forskellige materialer reagerer under ekstern påvirkning og dermed for hvor meget energi (den pris) det *koster* at deformere materialet, se f.eks. [2].
I analysen af punkt-konfigurationer i rummet (såkaldte shape spaces) er der tilsvarende andre dybtliggende anvendelser af SVD-faktoriseringer. Hvis vi f.eks. tegner to trekanter a og b i planen, kan vi så definere et godt *afstandsmål* $d(a,b)$ i mængden af trekanter, altså et mål for hvor meget trekanter 'ligner hinanden'? Sådan et d skal selvfølgelig opfylde trekantsuligheden $d(a,b)+d(b,c) \geq d(a,c)$ for alle tripler af trekanter a, b, og c; desuden skal $d(a,b) = 0$ hvis (og kun hvis) de to trekanter er ens $a = b$, og det skal være symmetrisk og positivt $d(a,b) = d(b,a) \geq 0$. Med andre ord: mængden af trekanter med dette afstandsmål skal være et *metrisk rum*. Spørgsmål af denne type giver anledning til overraskende resultater og et væld af nye spørgsmål, som tilhører den aktuelle forskningsfront, se f.eks. [1, 5, 3].

7 3D Generaliseringer

I rummet, hvor det er rumlige figurer vi gerne vil deformere, er sagen selvsagt en anelse mere kompliceret end i 2D – især hvad rotationerne angår. Der kan vi jo rotere og dreje om både x-aksen, y-aksen, og z-aksen, og vi kan kombinere disse rotationer til sammensatte lineære afbildninger, der i en præcis forstand roterer om hver enkelt af koordinatakserne som vist i figur 6 sammen med de nødvendige skaleringer i hver af de tre akseretninger.



Figur 6: SVD i aktion i rummet. Animeret.

Litteratur

[1] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[2] Oscar Gonzalez and Andrew M. Stuart. *A first course in continuum mechanics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[3] Hui Ling Le and David G. Kendall. The Riemannian structure of Euclidean shape spaces: a novel environment for statistics. *Ann. Statist.*, 21(3):1225–1271, 1993.

[4] Ben Noble and James W. Daniel. *Applied linear algebra*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., second edition, 1977.

[5] Andrew Swann and Niels Holm Olsen. Linear transformation groups and shape space. *J. Math. Imaging Vision*, 19(1):49–62, 2003.