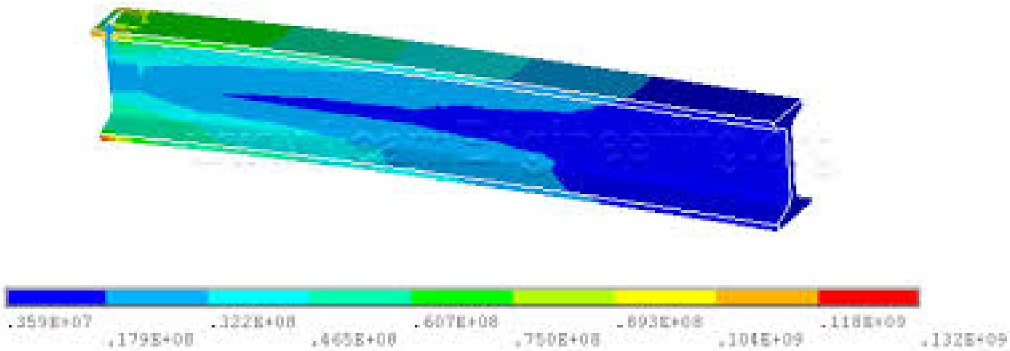
Brudbetingelser for materialer

Temaøvelsesopgave



Billede fra Comsol

Indledning

Vi skal i denne temaopgave se på modeller som ingeniører bruger når de skal afgøre hvor meget et materiale kan holde til uden at der sker brud.
Den brudmodel denne opgave omhandler, kaldes von Mises brudhypotese.
Emner fra Matematik 1 som bruges i denne tema opgave, er:
Funktioner af flere variable, niveaukurver, gradienter, retningsafledet, basisskifte ved ortogonal substitution, samt keglesnit.

Spændinger

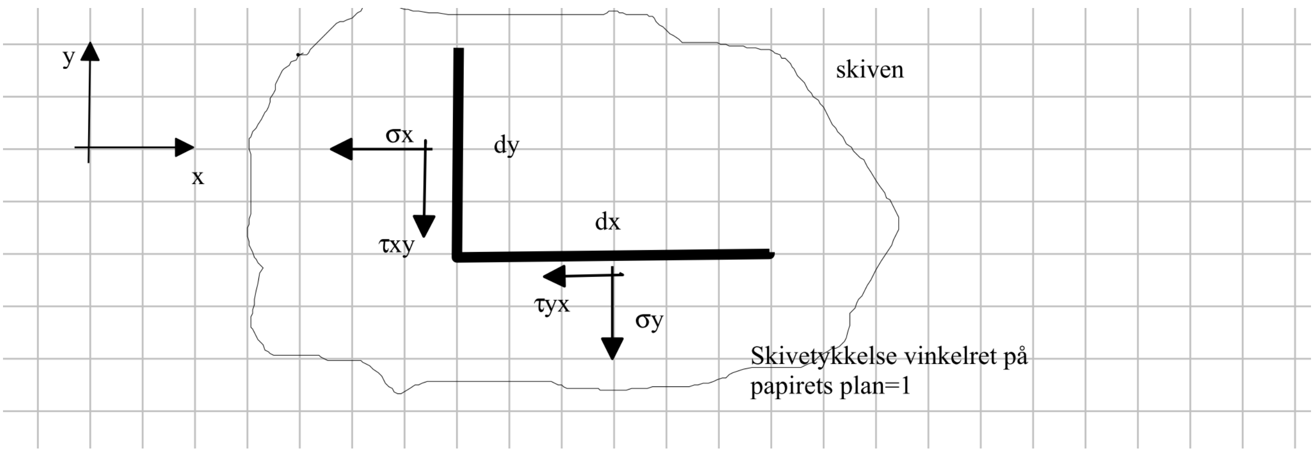
En kraft repræsenterer vi i fysikken ved en vektor, altså en længde og en retning.
Vi tænker os nu at et lille arealelement, ΔA, er påvirket af en kraft $\Delta\mathbf{F}$. Ved spændingen i et indre punkt i ΔA forstås grænseværdien:

$$\sigma = lim(\Delta\mathbf{F})/(\Delta A) \text{ for } \Delta A \to 0$$

Grænseværdien tages på en sådan måde at punktet hele tiden ligger i ΔA under grænseovergangen.
Så en spænding er altså en kraft pr. arealenhed, men den har også stadig en retning. $\boldsymbol{\sigma}$ er altså en vektor.

Plan spændingstilstand:

Lad os starte med at se på en plan skive med tykkelse 1, og lad os sige at der kun forkommer kræfter i papirets plan.
Lad os indlægge skiven i et (x, y)-koordinatsystem. Lad os se på 2 lodrette snit i skiven markeret med optrukket sort.
dx og dy er infinitesimale størrelser så spændingerne kan regnes konstante på hver af snitfladernes sider. Snitfladen med længden dx, har altså arealet $dx \cdot 1$.
Vi bruger den konvention i opgaven, at spændinger, som jo er vektorer, angives med fed skrift f.eks. $\boldsymbol{\sigma}_x$. Længden af vektoren $\boldsymbol{\sigma}_x$ angives med normal tykkelse skrift: $|\boldsymbol{\sigma}_x| = \sigma_x$. På nedenstående figur er spændingerne angivet med deres retning, som er pilenes retning, samt deres længde som er påført ud for pilen.



skitse af situationen

På figuren ses at indre spændinger deles op i komposanter vinkelret og parallelt med snittes flader. Spændingerne vinkelret på snittets flader, σ_x og σ_y, kaldes normalspændinger, og spændinger parallelle med snittes flader τ_{xy} og τ_{yx} kaldes forskydningspændinger. (Vigtigt: Bemærk at $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Dette skyldes momentligevægt for snittet, dette skal ikke vises).

Den samlede kraft på fladen med længden dy og højden 1, består af en vektor $\sigma_x \cdot dy \cdot 1$ i x-aksens negative retning og en vektor $\tau_{xy} \cdot dy \cdot 1$ i y-aksens negative retning.

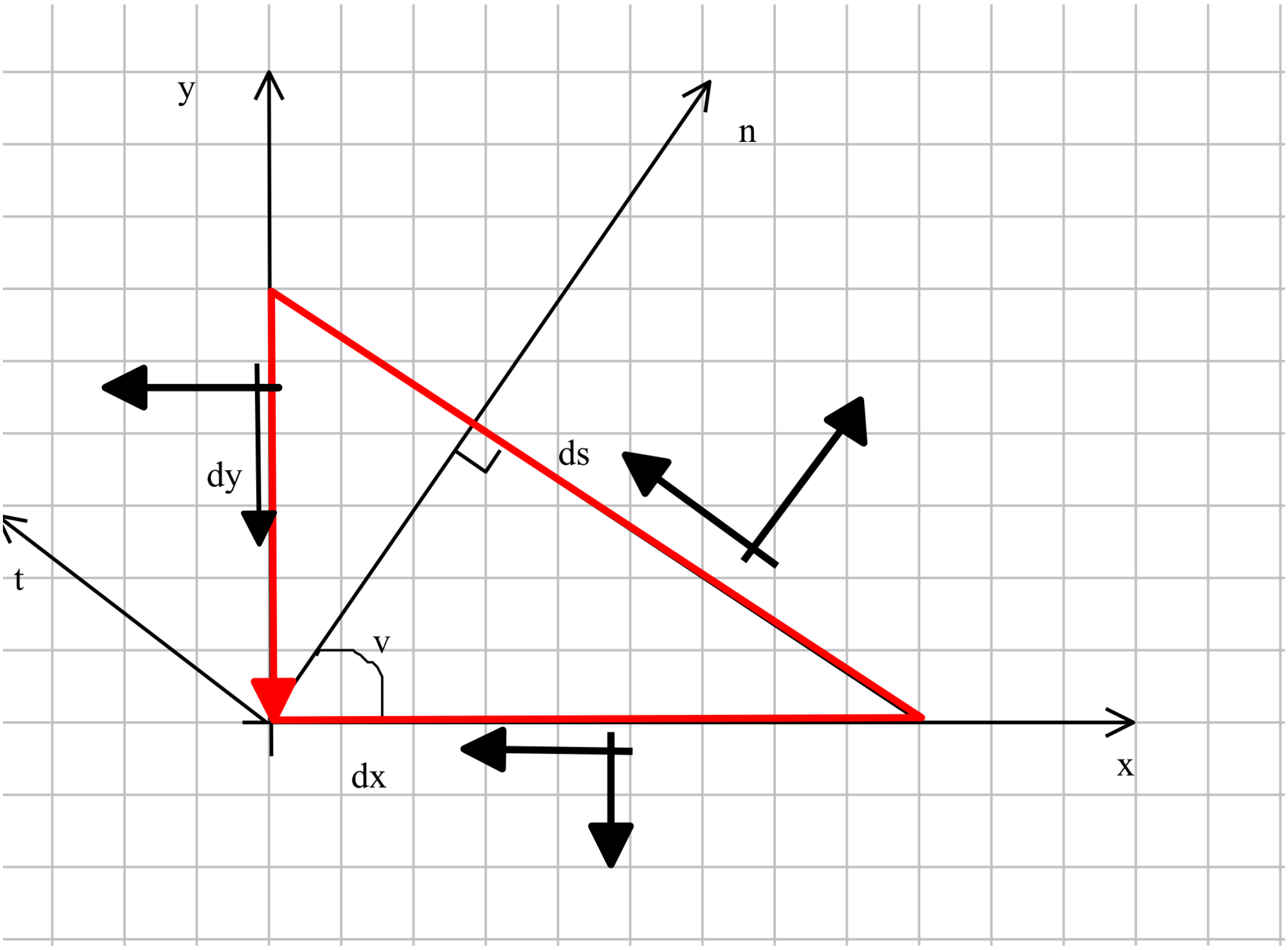
Den samlede kraft på fladen med længden dx og højden 1, består af en vektor $\sigma_y \cdot dx \cdot 1$ i y-aksens negative retning og en vektor $\tau_{yx} \cdot dx \cdot 1$ i x-aksens negative retning.

De positive retninger for spændingerne som er angivet på figuren ovenfor, kan virke lidt tilfældig. Det er på ingen måde tilfældet vi vil dog ikke komme nærmere ind på disse retninger i dette projekt.

Koordinatskifte

Vi skal i dette afsnit opskrive vores normal- og forskydningsspændinger i et drejet koordinatsystem.

Vi indtegner derfor et sædvanligt (n,t)-koordinatsystem drejet v grader mod uret i forhold til (x,y)-systemet, se nedenstående figur hvorpå der vises et lille trekantstykke af skiven, med kantlængder dx, dy, ds (Trekantstykket er indtegnet med rødt på figuren nedenfor). t er parallel med siden ds.



Opgave 1.1

Indsæt på figurens pile de seks rigtige kræfter der virker på siderne af trekantstykket ovenfor, længden af de seks kræfter er:

$$F_1 = \sigma_x \cdot dy \cdot 1 \quad , \quad F_2 = \tau_{xy} \cdot dy \cdot 1 \quad , \quad F_3 = \sigma_y \cdot dx \cdot 1$$

$$F_4 = \tau_{yx} \cdot dx \cdot 1 \quad , \quad F_5 = \sigma_n \cdot ds \cdot 1 \quad \text{og} \quad F_6 = \tau_{nt} \cdot ds \cdot 1$$

(Bemærk at orienteringen af spændingerne skal være som på de to figurer ovenfor.)

Opgave 1.2

Find (x, y)-koordinaterne for de 6 kræfter i opgave 1.1.
F.eks. har vektoren $\mathbf{F}_1$ koordinaterne:

$$\mathbf{F}_1 = (-\sigma_x \cdot dy \cdot 1, 0) = (-\sigma_x \cdot dy, 0)$$

Opgave 1.3

Da trekantstykket er en lille del af den store skive og derfor ikke bevæger sig i forhold til hele skiven, må den vektorielle sum af de 6 kræfter, fra opgave 1.2 være lig med nulvektoren.

Vis at projektionen af alle 6 kræfter ind på den retning som er bestemt ved n-aksen giver anledning til projektionsligningen:

$$\sigma_n \cdot ds - \sigma_x \cdot dy \cdot cos(v) - \sigma_y \cdot dx \cdot sin(v) - \tau_{xy} \cdot dy \cdot sin(v) - \tau_{yx} \cdot dx \cdot cos(v) = 0$$

(Vink: Lav evt. en enhedsvektor $\mathbf{n}$, i n-aksens retning, $\mathbf{n} = (cos(v), sin(v))$, og projicér kraftvektorerne ind på denne).

Vis at projektionen af alle 6 kræfter ind på den retning som er bestemt ved t-aksen giver anledning til projektionsligningen:

$$\tau_{nt} \cdot ds + \sigma_x \cdot dy \cdot sin(v) - \sigma_y \cdot dx \cdot cos(v) - \tau_{xy} \cdot dy \cdot cos(v) + \tau_{yx} \cdot dx \cdot sin(v) = 0$$

Opgave 1.4

Udnyt at $dx = ds \cdot sin(v)$ og $dy = ds \cdot cos(v)$ og husk $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Vis at ligningerne fra opgave 1.3 er udtryk for σ_n og τ_{nt} bestemt ved σ_x, σ_y, τ_{xy} samt v.

Ved at udnytte formler for $cos(2v)$ og $sin(2v)$, kan ligningerne i opgave 1.4 skrives, (skal ikke vises):

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot cos^2(v) + \sigma_y \cdot sin^2(v) + \tau_{xy} \cdot sin(2v)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{1}{2} \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot sin(2v) + \tau_{xy} \cdot cos(2v)$$

Man kan nu se på et nyt trekantstykke med t-aksen som udadgående normal, og gentage opgave 1.1-1.4 for dette trekantstykke og herved opnå følgende udtryk for σ_t (skal ikke vises):

$$\sigma_t = \sigma_x \cdot sin^2(v) + \sigma_y \cdot cos^2(v) - \tau_{xy} \cdot sin(2v)$$

Hovedspændingsretninger

Opgave 2.1

Vis at der findes et (n, t)-koordinatsystem hvor $\tau_{nt} = 0$, og angiv den tilsvarende vinkel v for dette. Dette koordinatsystem kaldes hovedaksesystemet. (Der er flere muligheder for v, overvej hvorfor).

Opgave 2.2

Vi betragter nu et taleksempel:

$$\tau_{xy} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sigma_x = 2 \quad , \quad \sigma_y = 1$$

Find for disse værdier beliggenheden af hovedaksesystemet.

Opgave 2.3

I det i opg. 2.2 fundne (n, t)-koordinatsystem, er $\tau_{nt} = 0$.
Find σ_n og σ_t.
Den største af σ_n og σ_t kaldes førstehovedspænding σ_1 og den mindste andenhovedspænding σ_2. Det vil senere blive klart at førstehovedspændingen er den største og andenhovedspændeningen den mindste af de normalspændinger der kan forekomme i et snit.

Opgave 2.4

Vis at ligningerne i opgave 1.4 kan skrives som matrixligningen:
$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ hvor $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ er givet ved:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{nt} \\ \tau_{nt} & \sigma_t \end{bmatrix}$$

desuden er $\mathbf{Q}$ en positiv ortogonal matrix givet ved:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix}$$

Opgave 2.5

Vi ser nu igen på talværdierne fra opgave 2.2.
Vis at egenværdierne for matrix **A** er identiske med værdierne for første- og andenhovedspænding fundet i opgave 2.3.
Vis herefter at egenvektorerne for matrix **A** er parallelle med akseretningerne i hovedspændingssystemet fra opgave 2.3.

Opgave 2.6

Vi er nu tilbage i det generelle tilfælde.
Forklar hvorfor egenværdierne for matrix **A** er identiske med værdierne for første- og andenhovedspænding fundet i opgave 2.2.
Forklar herefter hvorfor egenvektorerne for matrix **A** er parallelle med akseretningerne i hovedspændingssystemet opgave 2.1.

(Vink:Forsøg ikke at vise at udtrykkene er ens ved direkte udregning, dette fører til ret vanskelige beregninger, tænk istedet over hvorfor τ_{nt} netop bliver nul når søjlerne i **Q** er egenvektorer.)

Find nu et udtryk for første- og andenhovedspænding σ_1 og σ_2.

Opgave 2.7

I denne opgave skal vi se på nogle konkrete eksempler.

Spændingstilstanden enakset tryk defineres ved: $\sigma_x = -\sigma, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$. Hvor σ er et positivt tal.

Spændingstilstanden enakset træk defineres ved: $\sigma_x = \sigma, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$. Hvor σ er et positivt tal.

Spændingstilstanden ren forskydning defineres ved: $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau$. Hvor τ er et positivt tal.

Find størrelsen af første- og andenhovedspændingen i situationen ren forskydning og bestem den tilsvarende beliggenhed af hovedspændingssystemet (kort sagt: Angiv v i radianer). Gør herefter det samme for spændingstilstanden enakset tryk.

Opgave 2.8

I et rumligt materiale er der også spændingskomposanter i z-aksens retning, spændingerne kan som i det plane tilfælde samles i en spændingsmatrix:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad , \quad \text{hvor} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Man kan vise, som i det plane tilfælde, at der findes en rotation af koordinatsystemet som kun giver normalspændinger i snit vinkelret på disse akseretninger. (Forskydningsspændinger i disse snit er altså nul).

Normalspændingerne i disse snit kaldes hovedspændinger og benævnes: σ_1, σ_2 og σ_3. Bemærk vi vælger $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ i hele opgaven. σ_1, σ_2 og σ_3 er givet som egenværdierne af ovenstående matrix. Et koordinatsystem hvori forskydningsspændingerne er nul fås som en rotation af det oprindelige, svarende til den positive ortogonale substitution Q, der diagonaliserer ovenstående symmetriske spændingsmatrix.

Find de 3 hovedspændinger i følgende rumlige spændingstilstand:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \quad \text{og} \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau$$

von Mises brudhypotese

Vi ser nu på en funktion:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma 1)^2 - 2\sigma^2$$

"hvor $\sigma > 0$ betegner materialets enaksede trykstyrke, som er en for materialet karakteristisk konstant."

Vi forestiller os nu at spændingerne er nul, så er $f(0,0,0) = -2\sigma^2$ som er negativ. Vi lader nu spændingerne vokse. von Mises brudhypotese siger at brudet indtræffer når $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$.

Opgave 3.1

Find samtlige stationære punkter for f.

Opgave 3.2

Find Hessematricen for funktionen f, samt Hessematricens egenværdier i de stationære punkter.
Kan vi ud fra egenværdierne udtale os om eventuelle ekstremum i de stationære punkter?

Opgave 3.3

Argumenter direkte ud fra udtrykket for f, at f faktisk har en mindsteværdi på $-2\sigma^2$ i samtlige stationære punkter.

Opgave 3.4

Find et udtryk for niveaufladen for f hørende til nulniveauet.
Indsæt nye variable

$$\sigma_1 = x \cdot \sigma \quad , \quad \sigma_2 = y \cdot \sigma \quad \text{og} \quad \sigma_3 = z \cdot \sigma$$

ind i ligningen for vores niveauflade, og forkort $\sigma > 0$ ud af ligningen.

Opgave 3.5

Brug maples implicitplot3d til at plotte niveaufladen fra opgave 3.4, i et (x, y, z)-koordinatsystem. Beskriv fladen, samt plot fladens skæring med (x, y)-planen.

Opgave 3.6

Plot et par niveauflader mere ($f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = c \cdot \sigma^2$) svarende til $c \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

Indtegn også de stationære punkter i dette plot.

Opgave 3.7

Find gradienten af funktionen f.
Bestem prikproduktet mellem gradienten og vektoren $(1, 1, 1)$. Kan i forklare denne værdi?

Opgave 3.8

En del af forskriften for f er en kvadratisk form i 3 variable, find vha en positiv ortogonal substitution en ny ortonormal basis således at de blandede produktled forsvinder. Angiv den ortogonale matrix $\mathbf{Q}$.

Opgave 3.9

Opskriv et udtryk for nulniveauet mht de nye koordinater fra opgave 3.8. Angiv arten af den keglesnitsflade nulniveauet giver anledning til.

Opgave 3.10

Angiv art og beliggenhed af nulniveauet for f, i de oprindelige koordinater $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Opgave 3.11

Vi ser nu igen på en plan spændingstilstand (sæt $z = 0$ ind i udtrykket fundet i opgave 3.4), vis at brudhypotesen nu giver anledning til en ellipse.
Find en ligning for ellipsen i et koordinatsystem hvis akser indeholder ellipsens halvakser.
Find halvaksernes længde, samt den vinkel ellipsens akser er drejet iforhold til (x, y)-koordinatsystemet.

Opgave 3.12

Vi er nu klar til at undersøge om en spændingstilstand giver anledning til brud.

$$\sigma_x = \sigma_z = \frac{7}{24}\sigma \quad , \quad \sigma_y = -\frac{1}{3}\sigma \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \quad , \quad \tau_{xz} = \frac{1}{24}\sigma \quad (\sigma > 0)$$

Find σ_1,σ_2 og σ_3, og undersøg om disse giver anledning til brud.

Opgave 3.13

Find den retningsafledede af f i retningen bestemt af $(1, 0, 0)$, i punktet (σ_1,σ_2,σ_3) fra opgave 3.12. Argumenter udfra dennes fortegn for at vi fjerner os fra et brud hvis σ_1 øges.