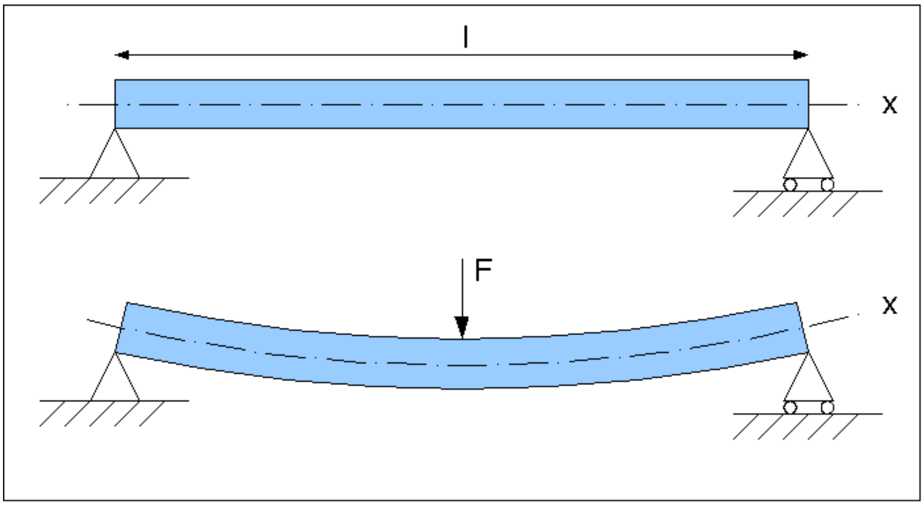
Temaøvelse: Nedbøjning af bjælker

Denne temaopgave omhandler bøjning af bjælker. Bjælkemodellen optræder i mange ingeniørrelaterede sammenhænge, lige fra biobjælker i de biotekniske fag til bærende konstruktioner i produktions og byggetekniske fag.

0. Introduktion

I denne opgave undersøges hvilken betydning udformningen af bjælkens tværsnit har for nedbøjningen af en simpelt understøttet belastet bjælke. Figur 0 viser en skitse af situationen.

Hvis vi ønsker at krydse en bred å, kan vi lægge en træplanke over åen og bruge den som bro. Hvis vi stiller os midt på planken bøjer den ned på midten. Hvis bjælken har et rektangulært tværsnit, har alle nok en fornemmelse af at planken bøjer mere end hvis vi lægger den på den flade side. Men hvad er egentlig afgørende for hvor meget den bøjer ned? Det viser sig at det er tværsnittets *inertimoment* der bliver afgørende. Det er undersøgelsen af dette temaøvelsen handler om.



Figur 0: Nedbøjet bjælke

For en simpelt understøttet lineær elastisk bjælke som på midten er belastet af en kraft F, gælder at den masimale nedbøjning δ på midten kan findes af formlen:

$$\delta = \frac{1}{48} \frac{F \cdot L^3}{E_0 \cdot I} \quad (0)$$

hvor L er længden af bjælken, og produktet $E_0 \cdot I$ kaldes bøjningsstivheden. Fra udtrykket for δ kan vi se at større bøjningsstivhed giver mindre nedbøjning.

Konstanten E_0 kaldes elasticitetsmodulet og er en materialekonstant der siger noget om hvor meget modstand mod deformation der er i materialet.

Den anden faktor i bøjningsstivheden I er tværsnittets inertimoment som afhænger af tværsnittets udformning.

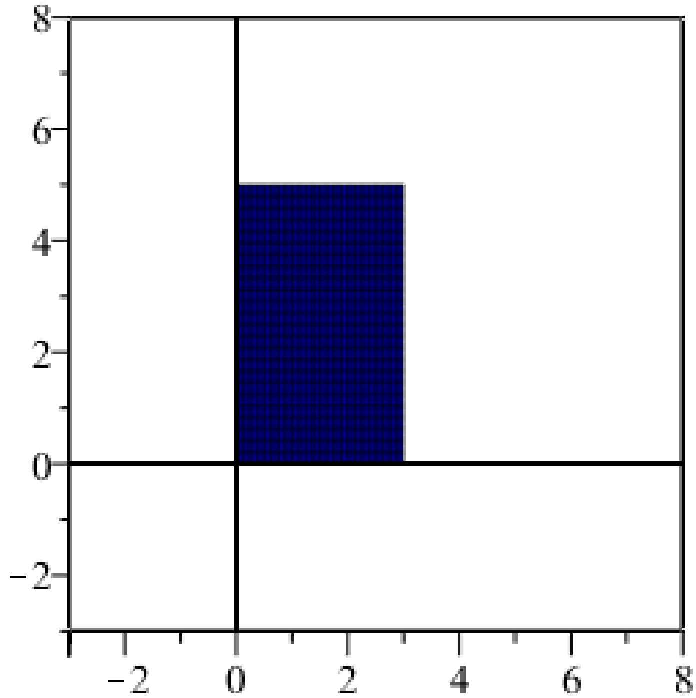
Når vi antager at træplanken er 4 meter lang, 30 cm bred og 5 cm høj, at den ligger på den flade led, og at den er belastet af en person på 100 kg, har vi disse typiske værdier for træplanken: $E_0 = 10000\ 10^6 Pa$, $I = 3,125\ 10^6 mm^4$. Dette giver en nedbøjning på$\delta = 5mm$.

Hvis planken placeres på den høje led, ændres tværsnittets inertimoment til værdien $I = 112,5\ 10^6 mm^4$. Dette giver en nedbøjning på $\delta = 0,1mm$.

For at udregne inertimomentet får vi brug for at finde det vægtede tværsnits-massemidtpunkt.

1. Det vægtede tværsnitsareal

Vi betragter en bjælke med rektangulært tværsnit. På figur 1 er tværsnittet B lagt ind i et (x,y)-koordinatsystem.



Figur 1: Rektangulært tværsnit

Det vægtede tværsnitsareal A defineres som følgende fladeintegral over området B:

$$A = \int_B \frac{E}{E_0} d\mu \, .$$

Heraf ses at områder med en stor værdi af elasticitetsmodulet E vægtes højere end områder med en lav værdi af elasticitetsmodulet.

Det vægtede tværsnittets massemidtpunkt (α, β) defineres ved:

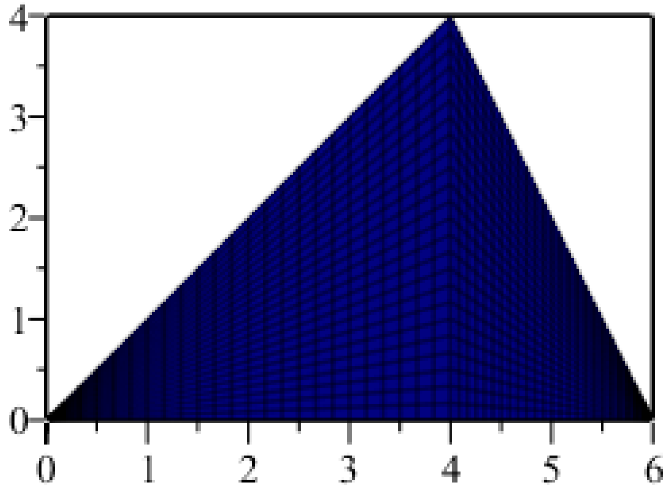
$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{A} \left(\int_B x \frac{E}{E_0} d\mu, \int_B y \frac{E}{E_0} d\mu \right) \, .$$

Opgave 1.1

Find massemidtpunktet af det rektangulære tværsnit på figur 1, hvis det antages at tværsnittet er homogent med værdien af $E = E_0$ i alle punkter.

Opgave 1.2

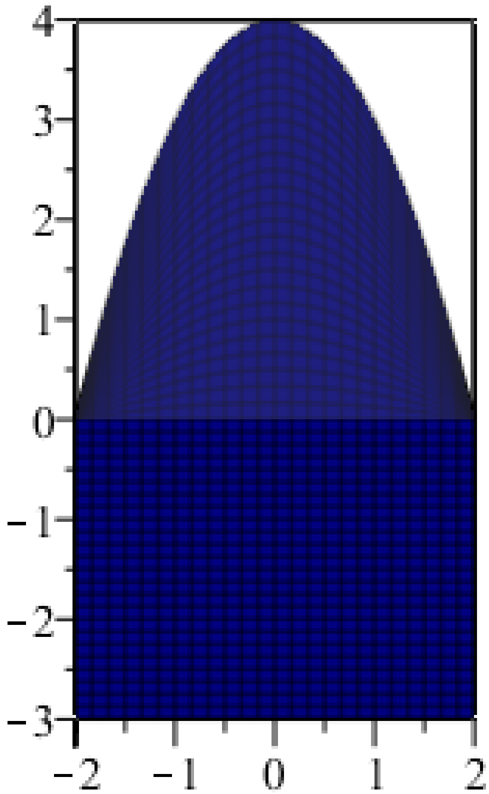
Find massemidtpunktet af det trekantsformede tværsnit som er vist på figur 2, hvor det antages at tværsnittet er homogent med værdien af $E = E_0$ i alle punkter.



Figur 2. Trekantsformet tværsnit

Opgave 1.3

Find massemidtpunktet af det parabelformede tværsnit på figur 3, hvor det antages at tværsnittet er homogent med værdien af $E = E_0$ i alle punkter. Den øvre afgrænsende kurve er graf for funktionen $f(x) = 4 - x^2$.



Figur 3: Parabelformet tværsnit

Hvis det tværsnit vi betragter, enten er sammensat af flere geometriske figurer, eller integranden varierer diskontinuert, kan integrationsområdet splittes op i mindre disjunkte områder (overlapper evt. på områder med areal 0). Det samlede planintegral fås så ved at addere integralerne over de mindre områder.

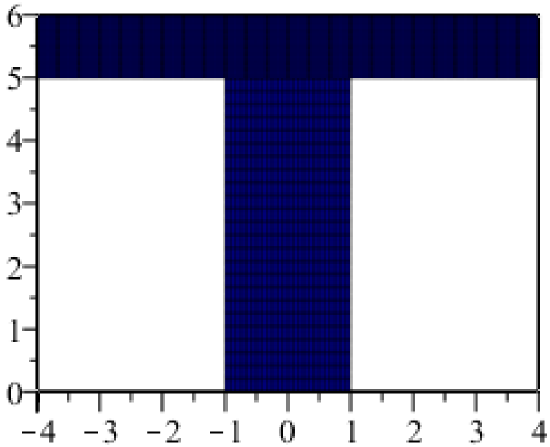
$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

Så fås

$$\int_B f d\mu = \int_{B_1} f d\mu + \int_{B_2} f d\mu + \int_{B_3} f d\mu \,.$$

Opgave 1.4

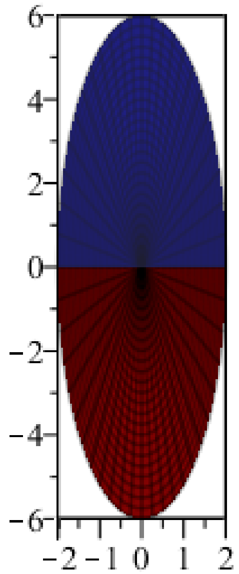
Find massemidtpunktet af det T-formede tværsnit på figur 4, hvor det antages at tværsnittet er homogent med værdien af $E = E_0$ i alle punkter.



Figur 4: T-formet tværsnit

Opgave 1.5

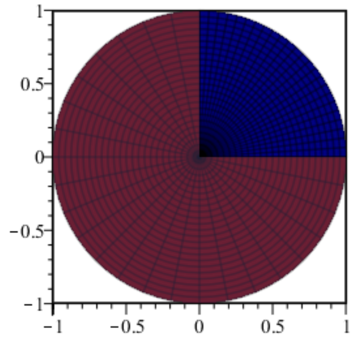
Find massemidtpunktet af det ellipseformede tværsnit på figur 5, hvor det antages at tværsnittet er sammensat af to homogene områder. Det blå med værdien af $E = 3 \cdot E_0$, og det røde med værdien af $E = E_0$.



Figur 5: Ellipseformet tværsnit

Opgave 1.6

Find massemidtpunktet af det cirkelformede tværsnit på figur 6, hvor det antages at tværsnittet er sammensat af to homogene områder. Det blå med værdien af $E = 2 \cdot E_0$, og det røde med værdien af $E = E_0$.



Figur 6: Cirkelformet tværsnit

2. Inertimoment om tyngdepunktsakse

En tyngdepunktsakse er en akse gennem det vægtede tværsnits massemidtpunkt.

Vi flytter nu vores (x,y)-koordinatsystem således at det vægtede tværsnits massemidtpunkt bliver sammenfaldende med Origo. Da vi kan rotere koordinatsystemet om Origo, er der uendeligt mange valg af placering. Vælg en placering som er hensigtsmæssig, for eksempel sammenfaldende med tværsnittets eventuelle symmetriakser.

Vi definerer nu 3 momenter.

Innertimomentet om x-aksen:

$$I_x = \int_B y^2 \cdot \frac{E}{E_0} d\mu \quad (1)$$

Inertimomentet om y-aksen:

$$I_y = \int_B x^2 \cdot \frac{E}{E_0} d\mu \quad (2)$$

Centrifugalmomentet mht x og y-aksen:

$$Z_{xy} = \int_B x \cdot y \cdot \frac{E}{E_0} d\mu \quad (3)$$

Bemærk at et tværsnits inertimomentet siger noget om hvordan materialet i tværsnittet er fordelt i forhold til x-aksen. I_x er nemlig et samlet mål for kvadratet på afstanden til x-aksen over hele tværsnittet. Det vil sige at hvis det meste af materialet er placeret langt fra x-aksen, så bliver I_x stor. Det kan f.eks opnås ved at udforme tværsnittet som en H-profil.

Opgave 2.1

Find de 3 momenter for det rektangulære tværsnit på figur 1.

Opgave 2.2

Find de 3 momenter for T-tværsnittet på figur 4.

Opgave 2.3

Find de 3 momenter for det trekantsformede tværsnit på figur 2.

Opgave 2.4

Find de 3 momenter for det cirkelformede tværsnit på figur 6. Find også de 3 momenter for et tilsvarende cirkelformet homogent tværsnit med værdien af $E = E_0$ overalt.

3. Hovedinertimomenter

Vi ønsker nu at finde det største og mindste inertimoment omkring en tyngdepunktsakse for et givet tværsnit. Vi drejer vores koordinatsystem en vinkel på v omkring tværsnittets tyngdepunktet som er placeret i Origo. Det drejede koordinatsystem har akserne p og q.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Opgave 3.1

Vis ved indsættelse i formlerne for momenterne (1), (2) og (3):

$$I_p = I_y \cdot \sin^2(v) + I_x \cdot \cos^2(v) - Z_{xy} \cdot \sin(2v)$$

$$I_q = I_y \cdot \cos^2(v) + I_x \cdot \sin^2(v) + Z_{xy} \cdot \sin(2v)$$

$$Z_{pq} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cdot \sin(2v) + Z_{xy} \cdot \cos(2v)$$

Opgave 3.2

Bestem udtryk for differentialkvotienterne $\frac{\partial I_p}{\partial v}$ og $\frac{\partial I_q}{\partial v}$. Vis ved hjælp af disse at maksimums- og minimumsværdierne for inertimomenterne I_p og I_q findes ved vinklen v bestemt af udtrykket:

$$\tan(2v) = \frac{-2Z_{xy}}{I_x - I_y}$$

(Hvad gør vi hvis $I_x = I_y$?)

Inertimomenter svarende til denne værdi af v kaldes hovedinertimomenter. Det er det største, henholdsvis det mindste inertimoment der forekommer i tværsnittet. Disse benævnes I_1 og I_2.

Opgave 3.3

Bestem hovedinertimomenterne for det rektangulære tværsnit på figur 1. Beskriv også hovedaksernes beliggenhed.

Opgave 3.4

Bestem hovedinertimomenterne for det trekantsformede tværsnit på figur 2. Beskriv også hovedaksernes beliggenhed.

Opgave 3.5

Bestem hovedinertimomenterne for det cirkulære tværsnit på figur 6. Beskriv også hovedaksernes beliggenhed.

4. Nedbøjningen af en rektangulær bjælke

Vi er nu klar til at besvare spørgsmålet som var formuleret i indledningen.

Opgave 4.1

En bjælke med rektangulært tværsnit som på figur 1 påvirkes på midten af en kraft F. Vi forestiller os to nedbøjningssituationer: 1) Vi bøjer bjælken om en akse svarende til den laveste værdi af inertimomentet, og 2) Vi bøjer bjælken om den akse der har den største værdi af inertimomentet. Brug formlen (0) til at vurdere hvor mange procent nedbøjningen om den svage akse er større end nedbøjningen om den stærke akse.

Opgave 4.2

Lav et rektangulært tværsnit med samme højde og samme areal som det T-formede tværsnit på figur 4. Hvor mange procent nedbøjes den rektangulære bjælke mere end den T-formede bjælke?