Lineære andenordens differentialligninger
med konstante koefficienter

v./ CH, DTU Matematik, 16. november 2012

01008 Temaøvelser i Matematik 1

1 Introduktion

Denne del af temaøvelsen handler om differentialligninger på følgende form.

$$x''(t) + bx'(t) + cx(t) = q(t),$$

som kaldes lineære andenordens differentialligninger med konstante koefficienter.

Da dette er en lineær differentialligning, findes der en struktursætning for løsningerne. Hvis vi kan finde en løsning $x_p(t)$ så kan en vilkårlig løsning skrives $x_p(t) + x_h(t)$ hvor $x_h(t)$ er en løsning til den tilhørende homogene ligning

$$x''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0.$$

Der er altså interessant at løse denne homogene ligning, og heldigvis er der en løsningsformel. I løsningsformlen indgår rødderne til følgende polynomium

$$P(z) = z^2 + bz + c.$$

Løsningerne til differentialligningen har altå noget at gøre med rødderne i et polynomium.

Formålet med denne temaøvelse er at forstå, hvorfor rødderne i et polynomium har noget at gøre med løsningerne til differentialligningen. Denne forståelse tilvejebringes via faktorisering. Når polynomiet $P(z)$ kan faktoriseres i to førstegradsfaktorer så kan differentialligningen opslittes i to førsteordens differentialligninger.

Hvis vi regner komplekst kan et andengradspolynomium altid faktoriseres i to førstegradsfaktorer, og analogt kan vores andenordens differentialligning altid splittes op i to førsteorden differentialligninger. Dem kan vi løse ved at bruge panserformlen, og herved får vi etableret en eksistens- og entydighedssætning og løsningsformlen.

I næste sektion *notation og hovedresultater* fastlægger vi notationen, beviser struktursætningen og postulerer løsningsformlen, uden dog at bevise den.

I den følgende sektion, *faktorisering*, indser vi at der er en sammenhæng mellem at faktorisere $P(z)$ og splitte andenordens differentialligningen op i to førsteordens differentialligninger der kan løses ved hjælp af panserformlen.

Da et andengrads polynomium altid kan faktoriseres hvis vi regner komplekst, kan vi også altid splitte andenordens differentialligningen op i to komplekse førsteordens differentialligninger. Men hvad er en *kompleks* differentialligning egentligt? Den nødvendige teori for dette udvikles i sektion 4, *komplekse differentialligninger*.

Da vi nu ved hvordan vi kan omdanne en andenordens differentialligning til to førsteordens differentialligninger som vi kan løse ved hjælp af panserformlen, kan vi bevise eksistens og entydighedssætningen (det gør vi i sektion 5, *eksistens og entydighed*) og bevise løsningsformlen for den homogene differentialligning (det gør vi i sektion 6, *løsningsformel for den homogene ligning*).

2 Notation og hovedresultater

Lad b og c være konstanter og $q(t)$ en kontinuert funktion defineret på et interval I. En ligning på formen

$$x''(t) + bx'(t) + cx(t) = q(t), \ t \in I \tag{1}$$

kaldes en *lineær andenordens differentialligning med konstante koefficienter.*

At man siger at ligningen er af anden orden, skyldes at den anden afledede af x indgår. Den har konstante koefficienter fordi a og b er konstanter. Det ville give god mening at betragte ligningen hvor $a = a(t)$ og $b = b(t)$ er funktioner. Den situation ser vi bare ikke her, for at holde tingene enkle.

Hvorfor kalder man differentialligningen for lineær? For at forstå det definerer vi en differentialoperator $g : C^2(I) \to C^0$ givet ved

$$g(x(t)) = x''(t) + bx'(t) + cx(t).$$

Så kan ligning (1) skrives

$$g(x(t)) = q(t), \ t \in I,$$

og pointen er at g er lineær. Altså, differentialligningen (1) kaldes lineær fordi den tilhørende differentialoperator $g(x(t)) = x''(t) + bx'(t) + cx(t)$ er lineær.

Som sagt kan differentialligningen skrives $g(x) = q$ hvor g er lineær. Strukturen af løsningsrummet til en sådan differentialligning har vi allerede studeret. Den er givet ved struktursætningen som siger at vi får alle løsninger hvis vi til en løsning lægger kernen af g. Kernen af g er løsningsrummet til $g(x(t)) = 0$, som altså svarer til $x''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$. Dette kaldes den homogene differentialligning hørende til ligning (1). Vi har således følgende konsekvens af struktursætningen.

SÆTNING 2.1. *Lad $x_p(t), \ t \in I$ være en løsning til den inhomogene ligning*

$$x''(t) + bx'(t) + cx(t) = q(t), \ t \in I,$$

og lad L_{hom} være løsningsrummet til den homogene ligning

$$x''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0,\ t \in I.$$

Da er samtlige løsninger til den inhomogene ligning

$$x_p + L_{hom}.$$

F.eks. kan man verificere at funktionen $x_p(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$ løser ligningen

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Hvis vi kunne bestemme samtlige løsninger til den homogene ligning

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0,\ t \in \mathbb{R},$$

så ved vi, at vi kun få enhver løsning til den inhomogene ligning ved at lægge løsningerne til den homogene ligning til x_p.

Det viser sig at der er en formel til at løse den homogene ligning.

SÆTNING 2.2. *Lad $a, b \in \mathbb{R}$ være reelle konstanter og betragt den homogene differentialligning*

$$x''(t) + bx'(t) + cz(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Lad λ_1, λ_2 være rødderne i polynomiet $P(z) = z^2 + bz + c$. Der er tre tilfælde:

- *λ_1 og λ_2 er reelle og forskellige. Da er samtlige løsninger til differentialligningen givet ved*

$$k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t},\ t \in \mathbb{R},\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

- *$\lambda_1 = \lambda_2$ er dobbeltrod. Sæt $\lambda = \lambda_1$. Samtlige løsninger til differentialligningen er givet ved*

$$x(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t},\ t \in \mathbb{R},\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

- *λ_1 og λ_2 er ikke reelle. Skriv $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ med $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Så er samtlige løsninger til differentialligningen*

$$x(t) = k_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + k_2 e^{\alpha t} \sin \beta t,\ t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

EKSEMPEL 2.3. Vi kan bruge sætningen til at finde samtlige løsninger

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Vi har allerede postuleret at polynomiet $x_p(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$ er en løsning. Nu kigger vi på den homogene differentialligning

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Polynomiet $P(z) = z^2 + z - 2$ har rødderne 1 og -2. Ifølge løsningsformlen er samtlige løsninger til den homogene differentialligning derfor $x_h(t) = k_1 e^t + k_2 e^{-2t},\ t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Vi bruger struktursætningen til at konkludere at samlige løsninger til den inhomogene differentialligning er

$$x(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + k_1 e^t + k_2 e^{-2t},\ t \in \mathbb{R}$$

for $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Det gælder altså at rødderne i et bestemt polynomium har noget med løsningerne til en andenordens differentialligning at gøre. Det virker umiddelbart mærkeligt. For at forstå hvorfor der kommer et polynomium ind i billedet, så skal vi se at differentialoperatorer med konstante koefficienter opfører sig når man sammensætter dem, på samme måde som polynomier opfører sig, når man ganger dem samme. Det tager vi fat på i næste sektion.

3 Faktorisering

Det viser sig at man nogle gange kan løse en andenordens differentialligning ved at løse to førsteordens differentialligninger. Som et første eksempel se på ligningen

$$x''(t) = 0.$$

Man differentierer som bekendt to gange ved først at differentiere en gang, og så differentiere en gang til. Altså, hvis vi sætter $y(t) = x'(t)$ så skal vi løse ligningen $y'(t) = 0$. Ifølge panserformlen er samtlige løsninger til ligningen $y'(t) = 0$ konstanter $y(t) = c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$. Nu er $x'(t) = y(t) = c_1$ og ligningen $x'(t) = c_1$ har ifølge panserformlen løsningerne $c_1 t + c_2,\ t \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}$.

Løsningsrummet er udspændingen af de to funktioner 1 og t. Det der satte os i stand til at finde løsningen var at den dobbeltafledede findes ved at differentiere to gange. I symboler gælder $g : C^2(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ givet ved $g(x(t)) = x''(t)$ kunne skrives som $f(f(x(t))$ hvor $f(x(t)) = x'(t)$.

Vi kan nu løse en hel bunke forskellige andensordens differentialligninger, nemlig dem som vi, løst sagt, kan få ved at sammensætte to førsteordens differentialligninger. Vi har brug for mere notation for at være præcise. Definer f_λ ved

$$f_\lambda(x(t)) = x'(t) - \lambda x(t).$$

Så for eksempel er $f_{-2}(x(t)) = x'(t) + 2x(t)$ og $f_1(x(t)) = x'(t) - x(t)$. Hvis en andenordens differentialoperator g kan skrives som $f_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_1}$, da kan vi løse $g(x(t)) = q(t)$.

For at forstå dette ser vi først på et eksempel. Da $f_1(x(t)) = x'(t) - x(t)$ er

$$\begin{aligned} f_{-2} \circ f_1(x(t)) &= f_{-2}(x'(t) - x(t)) \\ &= x''(t) - x'(t) + 2(x'(t) - x(t)) \\ &= x''(t) + x'(t) - 2x(t). \end{aligned}$$

Derfor er differentialligningen

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = q(t)$$

ækvivalent med systemet af differentialligninger

$$f_1(x(t)) = x'(t) - x(t) = y(t),$$
$$f_{-2}(y(t)) = y'(t) + 2y(t) = q(t).$$

Systemet af differentialligninger kan vi løse ved at bruge panserformlen to gange. Lad os se på $q(t) = 0$ altså den homogene differentialligning. Ligningen $y'(t) + 2y(t) = 0$ har løsningene

$$y(t) = c_1 e^{-2t},\ t \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}.$$

Ligningen $x'(t) - x(t) = c_1 e^{-2t}$ har løsningerne

$$x(t) = e^t \left(c_2 + \int ce^{-t} e^{-2t}\, dt \right) = c_2 e^t - \frac{1}{3} ce^{-2t},$$

og hvis vi sætter $c_1 = -\frac{1}{3}c$

$$x(t) = c_2 e^t + c_1 e^{-2t},$$

hvor $t \in \mathbb{R}$ og $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

OPGAVE 1. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0.$$

Vink, vis først at g givet ved $g(x(t)) = x''(t) + 2x'(t) + x(t)$ kan faktoriseres som $g = f_{-1} \circ f_{-1}$. Med andre ord, andenordens differentialligningen svarer til de to førsteordens differentialligninger

$$x'(t) + x(t) = y(t),$$
$$y'(t) + y(t) = 0.$$

Ser løsningerne ud som du havde forestillet dig? Tjek med Maples dsolve.

Vi har set at vi kan løse differentialligningen (1) når vi kan skrive

$$g(x(t)) = x''(t) + bx'(t) + cx(t)$$

som en sammensætning af to førsteordens differentialoperatorer $f_{\lambda_1} \circ f_{\lambda_2}$. Hvornår kan vi det? Svaret er “altid”, ihvertfald hvis vi regner komplekst.

4 Komplekse differentialligninger

Lad $z : I \to \mathbb{C}$ være en kompleks funktion defineret på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Så kan vi skrive $z(t) = x(t) + iy(t)$, hvor x og y er reelle funktioner. Når de to funktioner x og y er kontinuerte så siger man at z også er kontinuert. Hvis x og y er differentiable, så siger vi at z er differentiabel, og vi sætter $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Altså, den afledede af en kompleks funktion af en reel variabel er den afledede af realdelen plus i gange den afledede af imaginærdelen.

OPGAVE 2. Lad $\lambda \in \mathbb{C}$ betegne en konstant, og definer $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$z(t) = e^{\lambda t}.$$

Brug definitionen på den komplekse exponentialfunktion til at vise

$$z'(t) = \lambda e^{\lambda t}.$$

Analogt med det reelle tilfælde siger vi at $Z(t)$ er en stamfunktion til $z(t)$ hvis (og kun hvis) $Z'(t) = z(t)$. Vi bruger notationen $\int z(t)\,dt$ til at betegne en stamfunktion.

OPGAVE 3. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og antag at $q : I \to \mathbb{C}$ er kontinuert. Vis at løsningsmængden til ligningen

$$z'(t) = q(t), \ t \in I,$$

består af funktionerne

$$\int q(t)\,dt + c, \ t \in I, \ c \in \mathbb{C},$$

ved at skrive $q(t) = q_1(t) + iq_2(t)$ hvor q_1, q_2 er reelle og bruge teorien for reelle funktioner.

Der er klart at hvis $f : I \to \mathbb{C}$ og $g : I \to \mathbb{C}$ er differentiable, da er $f(t) + g(t)$ differentiabel med differentialkvotient $f'(t) + g'(t)$. Vi har også en produktregel der formelt er magen til det reelle tilfælde.

OPGAVE 4. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og antag at $f, g : I \to \mathbb{C}$ er differentiable i tallet $t_0 \in I$. Vis at da gælder

$$(fg)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0).$$

Vink. Skriv $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ og $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$.

Vi kan nu udvide forståelsen af en første ordens lineær differentialliging med konstante koefficienter

$$z'(t) - \lambda z(t) = q(t)$$

ved at tillade at konstanten λ er kompleks, og $q(t)$ er kompleks, for $t \in I$.

SÆTNING 4.1. *Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ og $q : I \to \mathbb{C}$ være kontinuert. Løsningsmængden til differentialligningen*

$$z'(t) - \lambda z(t) = q(t)$$

består af funktionerne

$$z(t) = e^{\lambda t}\left(\int e^{-\lambda t} q(t)\,dt + c\right), \ t \in I, \ c \in \mathbb{C}.$$

Bevis. Arbejdet med at bevise sætningen er allerede gjort i de foregående tre opgaver.

Da eksponentialfunktionen aldrig giver nul, svarer ligningen til

$$e^{-\lambda t}z'(t) - \lambda e^{-\lambda t}z(t) = e^{-\lambda t}q(t). \tag{2}$$

Vi viser nu at venstresiden er lig $\left(e^{-\lambda t}z(t)\right)'$. Ifølge produktreglen (opgave 4) gælder $\left(e^{-\lambda t}z(t)\right)' = e^{-\lambda t}z'(t) + (e^{-\lambda t})'z(t)$. Ifølge opgave 2 er $(e^{-\lambda t})'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$. Derfor er venstresiden i ligning (2) lig med $\left(e^{-\lambda t}z(t)\right)'$.

Sætter vi $h(t) = e^{-\lambda t}z(t)$, kan vi skrive ligningen

$$h'(t) = e^{-\lambda t}q(t).$$

Ifølge opgave 3 er samtlige løsninger $h(t) = \int e^{-\lambda t}q(t)\,dt + c$, $t \in I$, $c \in \mathbb{C}$.

Til sidst husker vi at $h(t) = e^{-\lambda t}z(t)$ og kommer frem til løsningsformlen. □

Ligesom med førsteordens differentialligninger, kan vi også udvide begrebet *andenordens lineære differentialligninger med konstante koefficienter* til at omfatte ligninger på formen

$$z''(t) + bz'(t) + cz(t) = q(t)$$

hvor vi nu tillader b, c og $q(t)$ at være komplekse.

Fordelen ved at tillade komplekse differentialligninger er at vi nu altid kan reducere en lineær andenordens differentialligning med konstante koefficienter til to førsteordens differentialligninger med konstante koefficienter. Det har pudsigt nok noget med faktorisering af andengradspolynomier at gøre.

Lad $g(z(t)) = z''(t) + bz'(t) + cz(t)$ være givet. Vi udregner

$$\begin{aligned} f_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_1}(z(t)) &= f_{\lambda_2}(z'(t) - \lambda_1 z(t)) \\ &= z''(t) - (\lambda_1 + \lambda_2)z'(t) + \lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

Det betyder at $g = f_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_1}$ hvis og kun hvis $b = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ og $c = \lambda_1\lambda_2$. Se nu på polynomiet

$$(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) = z^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)z + \lambda_1\lambda_2$$

Så polynomiet $(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$ er lig polynomiet $z^2 + bz + c$ hvis og kun hvis $b = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ og $c = \lambda_1\lambda_2$. Men det er jo den samme betingelse som for at $g = f_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_1}$.

Vi har altså bevist følgende resultat.

Observation 4.2. Operatoren g givet ved

$$g(z(t)) = z''(t) + bz'(t) + cz(t)$$

er lig $f_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_1}$, hvor

$$f_\lambda(z(t)) = z'(t) - \lambda z(t)$$

hvis og kun hvis der gælder følgende lighed mellem polynomier

$$z^2 + bz + c = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2).$$

Men vi ved jo alt om at faktorisere andengradspolynomier. Det kan altid lade sig gøre over de komplekse tal, jævnfør følgende opgave.

OPGAVE 5. Vis at andengrads polynomiet $z^2 + bz + c$ kan skrives $(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$ hvor λ_1, λ_2 er de to, ikke nødvendigvis forskellige, rødder i polynomiet.

Specielt kan vi altid skrive g som en sammensætning af to førsteordens differentialoperatorer f_{λ_1} og f_{λ_2}.

Vi finder konstanterne λ_1 og λ_2 ved at faktorisere $z^2 + bz + c$. Det er altså et vigtigt polynomium som det kan betale sig at give et navn til. Navnet er *det karakteristiske polynomium* hørende til g. Generelt defineres følgende

DEFINITION 4.3. Lad

$$h(z(t)) = z^{(n)}(t) + a_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 z'(t) + a_0 z(t).$$

Så er det karakteristiske polynomium $P_h(z)$ der hører til h givet ved

$$P_h(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Med denne definition har vi at

$$P_g(z) = z^2 + bz + c,$$

og

$$P_{f_\lambda}(z) = z - \lambda.$$

Læg mærke til at observationen 4.2 svarer til

$$g = f_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_1}$$

hvis og kun hvis

$$P_g = P_{\lambda_2} P_{\lambda_1}.$$

Hvis vi har lineære differentialoperatorer med konstante koefficienter kan vi addere dem og sammensætte dem. Hvis vi har polynomier kan vi addere og gange dem sammen. Tænk over, at det der lå bag ved observation 4.2 var at de to typer objekter opfører sig algebraisk på samme måde.

Nu er vi endelig klar til at formulere og bevise denne sektions hovedsætning.

SÆTNING 4.4. *Se på differentialligningen*

$$z''(t) + bz'(t) + cz(t) = q(t), \; t \in I.$$

Lad λ_1 *og* λ_2 *være rødderne i det karakteristiske polynomium* $P(z) = z^2 + bz + c$ *(*$\lambda_1 = \lambda_2$ *hvis der er dobbeltrod). Så er differentialligningen ækvivalent med følgende system af differentialligninger*

$$\begin{aligned} z'(t) - \lambda_1 z(t) &= w(t) \\ w'(t) - \lambda_2 w(t) &= q(t). \end{aligned}$$

Bevis. Bemærk først at det karakteristiske polynomium $P(z) = z^2 + bz + c$ er lig $(z - \lambda_2)(z - \lambda_1)$. Ifølge observation 4.2 gælder derfor $g = f_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_1}$. Antag $g(z(t)) = q(t)$, og sæt $w(t) = f_{\lambda_1}(z(t))$. Så er $f_{\lambda_2}(w(t)) = g(z(t)) = q(t)$. Det vil sige at z og w opfylder

$$\begin{aligned} z'(t) - \lambda_1 z(t) &= w(t), \\ w'(t) - \lambda_2 w(t) &= q(t). \end{aligned}$$

Antag omvendt at disse to ligninger er opfyldt. Det betyder $w(t) = f_{\lambda_1}(z(t))$ og $f_{\lambda_2} w(t) = q(t)$. Derfor gælder

$$z''(t) + bz'(t) + cz(t) = g(z(t)) = f_{\lambda_2} \circ f_{\lambda_1}(z(t)) = f_{\lambda_2}(w(t)) = q(t).$$

□

EKSEMPEL 4.5. Differentialligningen $z''(t) + z(t) = 0$ svarer til systemet af differentialligninger

$$\begin{aligned} z'(t) + iz(t) &= w(t), \\ w'(t) - iw(t) &= 0. \end{aligned}$$

OPGAVE 6. Del 1. Find de reelle løsninger til differentialligningen $z''(t) + z(t) = 0$ ved at bruge sætning 2.2. Find dernæst den løsning der opfylder $z(0) = 0, z'(0) = 1$.

Del 2. Løs systemet af differentialligigner

$$\begin{aligned} z'(t) + iz(t) &= w(t), \\ w'(t) - iw(t) &= 0. \end{aligned}$$

ved at bruge sætning 4.1 to gange. Det kan godt betale sig at starte med at løse for $w(t)$ (den nederste ligning). Find den løsning der opfylder $z(0) = 0, z'(0) = 1$.

Hvad har løsningen fra del 1 og del 2 med hinanden at gøre?

I denne sektion har vi set hvordan vi kan differentiere en funktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, altså en kompleks funktion i en reel variabel. Man kan tænke over hvad man skal forstå ved den afledede af en funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, altså en kompleks funktion af en kompleks variabel. Det vil vi ikke beskæftige os med i denne temaøvelse.

5 Eksistens og entydighed

Vi har eftervist at en andenordens differentialligning kan opløses i to førsteordens differentialligninger som vi kan løse hver for sig. Det har som konsekvens at vi ved at der er løsninger. Når vi bruger panserformlen får vi ikke bare én løsning, men en én-parameter familie af løsninger. Når vi nu får løsningen til en andenordens ligning ved at anvende panserformlen to gange, kunne man gætte på at der skal to parametre til at parametrisere løsningsrummet. Og det er rigtigt.

Først opfrisker vi hvad der gælder for førsteordens ligninger.

Lemma 5.1. *Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, og $t_0 \in I$. Lad $z_0 \in \mathbb{C}$ være en konstant, og $q : I \to \mathbb{C}$ være kontinuert. Så har differentialligningen*

$$z'(t) - \lambda z(t) = q(t), \ t \in I,$$

hvor λ er en konstant, en og kun én løsning der opfylder $z(t_0) = z_0$.

Bemærk at lemmaet siger to ting. At der på den ene side er løsninger, men på den anden side ikke er så mange løsninger. Hvis vi tegner graferne for to forskellige løsninger defineret på samme interval I så kan de ikke skære hinanden. For hvis de skar hinanden i et punkt (t_0, z_0) så ville de stemme overens for alle $t \in I$.

Bevis. Lad $h(t) = \int e^{-\lambda t} q(t)\, dt$ være en stamfunktion. Ifølge panserformlen er løsningsmængden $z(t) = e^{\lambda t}(c + h(t))$, $t \in I$, $c \in \mathbb{C}$, og der er en og kun én værdi af c så $z(t_0) = z_0$. □

Bevæbnet med dette lemma kan vi nu gå igang med at vise eksistens og entydighed for andenordens differentialligninger.

SÆTNING 5.2. *Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og $t_0 \in I$. Antag $z_0, z_1, b, c \in \mathbb{C}$ er konstanter, og $q : I \to \mathbb{C}$ er en kontinuert funktion. Så har differentialligningen*

$$z''(t) + bz'(t) + cz(t) = q(t), \ t \in I,$$

en og kun en løsning der opfylder $z(t_0) = z_0$ og $z'(t_0) = z_1$.

Desuden gælder, at hvis $z_0, z_1, b, c \in \mathbb{R}$ og $q(t) \in \mathbb{R}$ for alle $t \in I$, da er den entydigt bestemte løsning reel. Altså $z(t) \in \mathbb{R}$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

Før vi begynder at bevise sætningen kunne vi måske stille os selv det kætterske spørgsmål "hvad kan vi bruge eksistens- og entydighedssætningen til?" I praktiske sammenhænge, hvis vi har opstillet en differentialligning til at beskrive f.eks. hvordan en bil bevæger sig i et sving, så ved vi at bilen vil bevæge sig på en eller anden måde i et sving. Det vi er interesserede i at vide er blot *hvordan.* Altså, det vi søger er hvad løsningen er, ikke om der er løsninger. Men denne tankegang, selvom den er forfriskende, er også for simpel. Vi kunne have opstillet en differentialligning uden løsning til at beskrive situationen; denne differentialligning ville nok så blot have været en dårlig model. Lige så vigtigt, og ganske overraskende, er det at en teoretisk sætning som 5.2 er til betydelig hjælp i det praktiske arbejde med at finde løsninger. Når vi kommer frem til en løsningsformel for reelle andensordens homogene differentialligninger, så letter eksistens- og entydighedssætningen arbejdet væsentligt. Men det må vente til næste sektion, for nu går vi til beviset.

Bevis. Først viser vi entydighed. Differentialligningen svarer til

$$z'(t) - \lambda_1 z(t) = w(t)$$
$$w'(t) - \lambda_2 w(t) = q(t).$$

Kravene at $z(t_0) = z_0$ og $z'(t_0) = z_1$ bestemmer entydigt $w(t_0)$ ifølge den første ligning. Derfor er $w(t)$ entydigt bestemt af den anden ligning. Vender vi tilbage til den første ligning, er nu $w(t)$ givet, og derfor fastlægger $z(t_0) = z_0$ løsningen $z(t)$ entydigt. Så der er højst en løsning $z(t)$ der opfylder de to krav $z(t_0) = z_0$ og $z'(t_0) = z_1$.

Nu viser vi eksistens, og lader $w(t)$ betegne løsningen til den anden ligning hvor $w(t_0) = z_1 - \lambda_1 z_0$. Der er en løsning til første ligning der opfylder $z(t_0) = z_0$. Ved at sætte $t = t_0$ i $z'(t) - \lambda_1 z(t) = w(t)$ ses at $z'(t_0) = z_1$. Hermed har vi vist eksistens af en løsning der opfylder kravene.

Vi mangler at se på hvad der sker hvis alle konstanter og funktioner der ingår er reelle. Lad $z(t)$ være den entydigt bestemte komplekse løsning, og sæt $x(t) = \Re(z(t))$. Ved at tage real-delen på begge sider at ligningen $z''(t) + bz'(t) + cz(t) = q(t)$ ses at $x(t)$ er en løsning til den samme differentialligning. Da $x(t_0) = z(t_0)$ og $x'(t_0) = z'(t_0)$ gælder ifølge den entydighed vi lige har bevist, $x(t) = z(t)$ for alle $t \in I$, og vi konkluderer $z(t) \in \mathbb{R}$ for alle $t \in \mathbb{R}$. □

I det foregående bevis benyttede vi at hvis $z(t)$ er en løsning til $z''(t) + bz'(t) + cz(z) = q(t)$, og $a, b \in \mathbb{R}$, da er $x(t) = \Re(z(t))$ en løsning til ligningen $x''(t) + bx'(t) + cx(t) = \Re(q(t))$. Man kan indse dette ved at tage realdelen på begge sider af lighedstegnet i den komplekse differentialligning. Denne lille observation har ført til en hel metode til at bestemme løsninger til lineære differentialligninger der er ultrarelevant for ingeniørfagene. Metoden kaldes den komplekse gættemetode, og den ser vi på i en anden sammenhæng. Her kommer vi frem til en formel for løsningerne til en homogen differentialligning.

6 Løsningsformel for den homogene ligning

I denne sektion vil vi bevise løsningsformlen til homogene andenordens differentialligninger fra sektion 2. Det viser sig, ikke overraskende, at det er en del lettere at finde en løsningsformel i det komplekse tilfælde.

SÆTNING 6.1. *Se på differentialligningen*

$$z''(t)+bz'(t)+cz(t)=0,\ t\in\mathbb{R},$$

hvor $b,c\in\mathbb{C}$ *er konstanter. Faktoriser det karakteristiske polynomium* $P(z)=z^2+bz+c=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)$*. Der er to muligheder:*

- *De to rødder er forskellige,* $\lambda_1\neq\lambda_2$*. Da er samtlige løsninger*

$$z(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t},\ t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2\in\mathbb{C}.$$

- *Der er dobbeltrod* $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$*. Da er samtlige løsninger*

$$z(t)=c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t},\ t\in\mathbb{R},\ c_1,c_2\in\mathbb{C}.$$

Løsningsmængden er altså i det ene tilfælde $\mathsf{span}(e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t})$ og i det andet tilfælde $\mathsf{span}(e^{\lambda t},te^{\lambda t})$.

Vi giver beviset i form af en nogle opgaver. Vi ved fra sætning 4.4 at andenordens differentialligningen svarer til følgende system af førsteordens differentialligninger.

$$\begin{aligned} z'(t)-\lambda_1 z(t)&=w(t)\\ w'(t)-\lambda_2 w(t)&=0. \end{aligned}$$

OPGAVE 7. Vis at samtlige løsninger til $w'(t)-\lambda_2 w(t)=0$ er givet ved

$$w(t)=c_3e^{\lambda_2 t}.$$

OPGAVE 8. Vis dernæst at samtlige løsninger til $z'(t)-\lambda_1 z(t)=w(t)$ (med $w(t)$ som vi fandt i sidste opgave) er

$$z(t)=e^{\lambda_1 t}\left(c_1+c_3\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\,dt\right).$$

OPGAVE 9. Find en stamfunktion til $\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\,dt$ for $\lambda_1\neq\lambda_2$ og for $\lambda_1=\lambda_2$.

Benyt dette til at færdiggøre beviset for sætning 6.1.

Sædvanligvis er fysiske størrelser reelle tal, og derfor ligger fokus i anvendelserne på reelle differentialligninger. Men ligesom reelle tal også er komplekse tal (med imaginærdel lig nul) kan vi anskue reelle differentialligninger som komplekse differentialligninger. Derfor hjælper sætning 6.1 os til at finde de reelle løsninger, og det vil vi bruge til at bevise den reelle løsningsformel (sætning 2.2).

Bevis. Vi undersøger differentialligningen

$$x''(t)+bx'(t)+cx(t)=0,\ t\in\mathbb{R},$$

hvor nu $b, c \in \mathbb{R}$. Diskriminanten af det karakteristiske polynomium er $D = b^2 - 4c$. Der er tre muligheder. Enten er diskriminanten positiv, lig nul, eller negativ.

Første tilfælde, $D > 0$. De to rødder i det karakteristiske polynomium er $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2}$ og $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2}$ og er altså reelle og forskellige. Samtlige komplekse løsninger er derfor

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},\ t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Hvis vi begrænser os til kun at tage reelle værdier for c_1 og c_2, får vi reelle løsninger. Vi har, med andre ord, vist at alle følgende funktioner er reelle løsinger.

$$k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t},\ t \in \mathbb{R},\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Men har vi fået alle løsninger med? Det har vi, og det kan vi bevise ved at bruge eksistens- og entydighedssætningen. Lad $x_p(t)$ være en vilkårlig løsning til differentialligningen, og sæt $x_0 = x_p(0)$ og $x_1 = x_p'(0)$. Sæt $x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$. Så er $x(0) = k_1 + k_2$ og $x'(0) = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$. Da matricen $\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ har determinant $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ er den regulær. Det følger at vi kan finde k_1 og k_2 så $x(0) = x_p(0)$ og $x'(0) = x_p'(0)$. Derfor siger eksistens- og entydighedssætningen at $x_p(t) = x(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Vi har netop vist at en vilkårlig reel løsning $x_p(t)$ kan skrives på formen $k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$ for $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, og kan konkludere at vi har fundet samtlige løsninger.

Det andet tilfælde, $D = 0$. Så er $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2}$ en reel dobbeltrod. Da de to rødder er lig hinanden skriver vi bare λ. Som før følger det af den komplekse løsningsformel at

$$x(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t},\ t \in \mathbb{R},\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

er reelle løsninger til differentialligningen. Og igen som før følger det af eksistens- og entydighedssætningen at her har vi fået alle reelle løsninger med. Vi overlader detaljerne til læseren.

Det tredje og mest interessante tilfælde er hvis $D < 0$. De to rødder er $\lambda_1 = \frac{-b+i\sqrt{-D}}{2}$ og $\lambda_2 = \frac{-b-i\sqrt{-D}}{2} = \bar{\lambda}_1$. Vi sætter $\lambda = \lambda_1$, og skriver $\lambda = \alpha + i\beta$. Det følger af den komplekse løsningsformlen at funktionerne $z(t) = ce^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, alle er komplekse løsninger til den reelle differentialligning

$$z''(t) + bz'(t) + cz(t) = 0. \tag{3}$$

Sæt $x(t) = \Re(z(t))$ og $y(t) = \Im(z(t))$ således at $z(t) = x(t) + iy(t)$ hvor $x(t), y(t)$ er reelle funktioner. Tager vi realdelen af ligning (3) får vi

$$x''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0,$$

idet vi benytter at b og c er reelle. Derfor er $x(t)$ en reel løsning til differentialligningen. Vi sætter $c = k_1 - ik_2$ og udregner

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re\left((k_1 - ik_2)e^{(\alpha+i\beta)t}\right) \\ &= \Re\left((k_1 - ik_2)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)\right) \\ &= k_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + k_2 e^{\alpha t}\sin\beta t. \end{aligned}$$

Vi har fået vist at

$$x(t) = k_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + k_2 e^{\alpha t}\sin\beta t,\ t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

alle er reelle løsninger. I lyset af følgende opgave har vi fundet samtlige løsninger. □

OPGAVE 10. Vi bruger notationen fra ovenstående bevis. Vi viste at når rødderne i det karakteristiske polynomium ikke var reelle, så var

$$x(t) = k_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + k_2 e^{\alpha t}\sin\beta t,\ t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

løsninger til differentialligningen. Denne opgave går ud på at vise at vi hermed har fundet alle løsningerne også i dette tilfælde. Lad derfor $x_p : I \to \mathbb{R}$ være en vilkårlig løsning. Bevis at der findes k_1 og k_2 så $x(0) = x_p(0)$ og $x'(0) = x'_p(0)$. Brug eksistens og entydigshedssætningen til at vise der derfor gælder $x(t) = x_p(t)$ for alle $t \in I$. Konkluder at en vilkårlig løsning kan skrives på formen $x(t)$.

Sidste opgave åben.

OPGAVE 11. I professor Fimbeldunkels dagbogsnotater har man fundet løsningsformler til den komplekse inhomogene differentialligning $z''(t) + bz'(t) + cz(t) = q(t)$, nemlig

$$z(t) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\int \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} q(t)\,dt + c_1\right) + \frac{\mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\int \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} q(t)\,dt + c_2\right)$$

eller

$$z(t) = t\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\int \mathrm{e}^{-\lambda t} q(t)\,dt + c_1\right) - \mathrm{e}^{\lambda t}\left(\int t\mathrm{e}^{-\lambda t} q(t)\,dt + c_2\right).$$

Hvornår mon den ene formel gælder og hvornår den anden? Hvad mon der skal gælde om konstanterne λ_1, λ_2 og λ? Hvad med c_1 og c_2? Bemærk symmetrien i første formel og der ganges med t henholdsvis indenfor og udenfor integrationstegnet i de to led i anden formel; formlerne er smukke ikke sandt? Kan I bevise at formlerne gælder? Prøv evt. at starte med tilfældet $q(t) = 0$. Brug gerne Maple.

Vi har i denne temaøvelse taget hul på det store og vigtige emne differentialligninger. Selvom vi har begrænset os til ligninger af første- og andenorden med konstante koefficienter, skulle vi tænke en del igennem for at forstå løsningernes struktur, etablere eksistens og entydighed af løsninger og finde en løsningsformel. De resultater vi har fundet generaliserer umiddelbart til n'te ordens lineære differentialligninger med konstante koefficienter. Med *umiddelbart* mener vi at selvom der skal arbejdes noget for at bevise de analoge sætninger for højere ordens differentialligninger, så skal der ikke nogle nye ideer til. Der sker ikke noget konceptuelt nyt ved at betragte n'te ordens ligninger i stedet for blot andenordens ligninger.