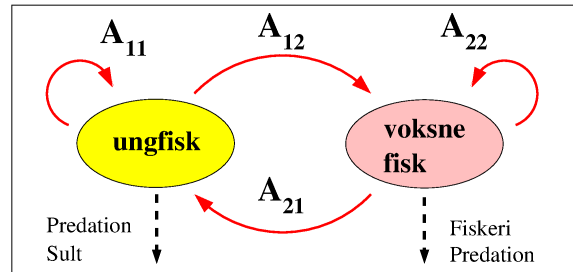


Hvor meget må fiskerne fiske ?

I denne opgave er I videnskabsfolkene, der skal hjælpe politikerne med at beslutte, hvor mange fisk fiskene må fange, uden at fiskebestanden bliver overfisket og kollapse. Vi vil beskrive en fiskebestand med en simpel lineær matrix-model, hvor der er ungfisk og voksne fisk, der kan fiskes:

- Hver voksen får i gennemsnit 1000 ungfisk pr. år
- Ungfisk bliver voksne efter to år i gennemsnit. Chancen for, at en ungfisk overlever et år er 0.1 %
- Risikoen for, at voksne fisk bliver spist af andre fisk er 30 % pr. år



1. Udfra de biologiske oplysninger ovenfor opstil en differensligning på matrixform med tidsskridt på eet år, der beskriver, hvordan bestanden udvikler sig fra år til år. Der fiskes ikke til at starte med.
2. Bestem om bestanden efter nogle år vokser eller aftager. Svar i % pr. år
3. Nu vil fiskene gerne fange nogle af de voksne fisk. Fiskeriet skal foregå ved slutningen af året. Modifier differensligningen fra før, så den inkluderer fiskerieffekten på bestanden (Tip: hvis andelen F fanges pr. år, hvad er chancen pr. år for at undslippe fiskeri ? Bemærk voksne fiske skal både undslippe fiskeri og rovfisk for at overleve).
4. Bestem nu, hvor mange % af fiskene må man fiske pr. år, hvis bestanden skal være i balance ? Opgaven kan løses på een af to måder:
 - Lav et plot, hvor fiskeri F i % er på x-aksen, og den største egen værdi for differensligningen (med fiskeri) er på y-aksen. Vælg 3-4 rimelige værdier for F (bemærk: $\bar{\lambda}$ afhænger af F). Udfra plottet, bestem ca. værdien af fiskeri, hvor bestanden er i balance.
 - (**Svær**) Find den største egen værdi for differensligningen med fiskeri F som ubekendt udfra reduktionsdeterminanten. Udfra resultatet, bestem den værdi af F , der gør at bestanden akkurat er i balance.
5. Det viser sig, at der er stor usikkerhed på, hvor mange fisk, der bliver spist af andre fisk, dvs. vi ved kun, at mellem 15 % og 45 % af de voksne fisk spises af andre fisk pr. år. Modifier dit råd til politikerne, så du inddrager denne usikkerhed, og angiv det maksimale fiskeri, der med sikkerhed undgår overfiskning
6. Diskuter de antagelser vi har gjort ovenfor, og giv et forslag til, hvordan vi kan forbedre den matematiske model, så den bliver mere præcis

```

#!/usr/bin/env python
# =====
# InterMat øvelsesopgave - ASCH løsninger
# =====

from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

# ----- opg 1: opstil matrix A i differensligning -----
A = array([[0.001*(1/2), 1000],
           [0.001*(1/2), 0.7]], float) # ingen fiskeri

# ----- opg 2: egenverdier for A -----
ev, evvec = linalg.eig(A) # (array([-0.43862582, 1.13912582]), array([[-9.99999904e-01, -9.99999352e-01],
                                                                    [0.001, 0.7]]))

a = 1
b = -(A[0,0]+A[1,1])
c = linalg.det(A)
d = b*b - 4*a*c
lam = (-b + array([-sqrt(d), +sqrt(d)]))/2 # via reduktionsdeterminant
# max(lambda) > 1 => Bestand vokser. Vækst pr år = 1.139125-1 = 13.9 %

# ----- opg 3: egenvektorer for A (udgår) -----
# mængdeforholdet mellem ungfisk og voksne fisk = u/v
#
# u,v = evvec[:,1] # fra linalg.eig, vektorer i søjler : u/v = 878.
#
# eller: løs A.x = lamda*x mht x = (u,v)
# (A[0,0]-ev[1])*u + A[0,1]*v = 0 => u/v = A[0,1]/(ev[1]-A[0,0]) = 878.
#
# ----- opg 4a: find max fiskeri udfra plot -----
#
Fset = arange(0, 0.99, 0.01)
maxev = []
for F in Fset:
    p = 1-F # chance for at undslippe fiskeri
    A = array([[0.001*(1/2), 1000],
               [0.001*(1/2), 0.7*p]], float) # NB: A afhænger af F, så lav A for hver værdi af F
    maxev.append(amax(linalg.eigvals(A))) # gem største egenværdi
plt.plot(Fset*100, maxev)
plt.show()

# vi ser på plot, at ved F ~ 28 % er bestanden akkurat i balance, dvs max fiskeri = 28 % pr. år

# ----- opg 4b: find max fiskeri udfra reduktionsdeterminant -----

A = array([[0.001*(1/2), 1000], [0.001*(1/2), 0.7]], float) # ingen fiskeri

```

```

A11, A12 = A[0,:]
A21, A22 = A[1,:]
# p = 1-F = chance for at undgå fiskeri pr. år
# reduktionsdeterminant = lam^2 - (A11+A22*p)*lam + (A11*A22*p - A12*A21) = 0
# lam^2 - lam*b + c = 1
# => maxlam = (b + sqrt(b*b-4*c))/2 = 1 (sidste lighedstegn er ligevægtsbetingelse)
# => b-c = A11 + A12*A21 + p*(A22-A11*A22) = 1
# => F = 1-p = (A22-A22*A11-1+A11+A12*A21)/A22/(1-A11) ~ 0.2861
#
# Dvs fiskerne må fange op til 29 % af bestanden pr. år

# ----- opg 5: indflydelse af usikkerhed -----

# maximal tilladt fiskeri falder, hvis voksne fisk spises af andre fisk
# Kan håndteres ved at sætte A22 = 1-0.45 = 0.55, i stedet for før

A22 = 0.55
Fmax = (A22-A22*A11-1+A11+A12*A21)/A22/(1-A11) # Fmax ~ 0.09136386375005687

# Dvs fiskerne må KUN fange 9 % af bestanden i stedet for 29 % af bestanden pga. usikkerhed på biolo

# ----- opg 6: diskussion -----
#
# 1) årlige variationer i oceanografiske forhold påvirker modelparametre
# 2) selvregulerings-effekter gør modelparametre afhængige af variable
# 3) yderligere detaljering af variable, fx. alder og størrelse og køn, har forskellige parametre
# modelparametre i simpel model er vægtet gennemsnit, der ændrer sig med variable
# 4) finere tidsskridt (fx. en måned) => giver bedre representation of livsprocesser
# 5) Eksplicit repræsentation af lag effekter => demografiske bølger; fx alle voksne er poolede => u

```