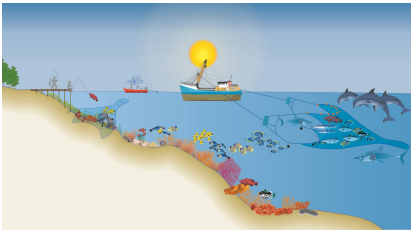


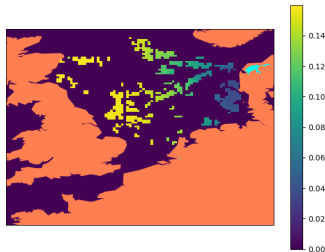
Matematikken bag bæredygtighed

Asbjørn Christensen - DTU Aqua





- Studieleder Ocean engineering
- Biogiske livscyklusmodeller and økosystemmodeller
- Simulering af transport med havstrømme

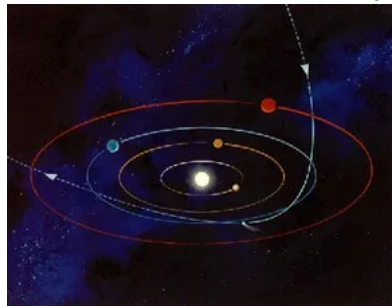
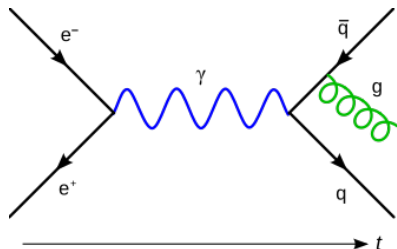


- Beskrive hvordan matematik anvendes i biologi
- Anvende matrixregning til sikre bæredygtig udnyttelse af naturressourcer



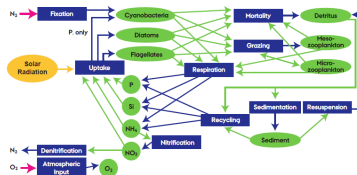
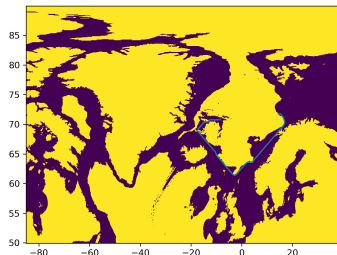
Hvordan er det med matematik i fysik ?

- Meget stærke (præcise) grundlove, bl.a.:
 - Newtons love
 - Elektromagnetisme
 - Termodynamik
 - Kvantemekanik
- Modeller af fysiske systemer (fx. biler, planetsystemer, molekyler) ekstremt præcise, fx
 - Finstrukturkonstant α :
fejl teori versus experiment =
 $1/10.000.000.000$
 - Kometers bane kan beregnes præcist 100+ år frem i tid



Hvordan er det med matematik i biologi ?

- **Ingen** stærke grundlove;
ofte udgangspunkt i:
 - **Individer** bevaret,
undtagen
fødsel/død/vandring
 - **Evolution:** individer
indrettet, så de optimerer
afkom/energiforbrug
 - **Kemi:** hold styr på stof-
og energiomsætninger
- **Udfordringer:**
 - Komplexitet
(sammensatte systemer,
ikke-linearitet, asymmetri,
procesdetaljer ukendte)
 - Starttilstande ukendte



Hold styr på antallet af individer

- Hvis vi ved, hvor mange individer der er i dag (N^1) kan vi så forudsige hvor mange der er næste år (N^2) ?

$$\begin{aligned} N^2 &= N^1 + f^1 N^1 - d^1 N^1 \\ &= A^1 N^1 \end{aligned}$$

hvor $A^1 = 1 + f^1 - d^1$

- Dette er en første ordens *differensligning*
- Hvis A^1 er konstant: N eksponentielt voksende/aftagende
- Selvregulering: A afhænger af N ... men det kan vi se bort fra i dag, hvis vi betragter kort tidsrække
- *Hvilken anden væsentlig antagelse har vi skjult ?*

Alle er ikke ens

- Skelne mellem store og små individer (har fx. forskellige f, d)
 - Skelne mellem gamle og unge individer (har fx. forskellige f, d)
 - Skelne mellem forskellige opholdssteder (steder har fx. forskellige f, d)
-
- Fra een til flere tilstandsvariable for systemet: $N^k \rightarrow N_i^k$

Differenslining med mange variable

- Een variabel

$$N^{k+1} = A N^k$$

- Flere variable: krydspåvirkning

$$N_i^{k+1} = \sum_j A_{ij} N_j^k$$

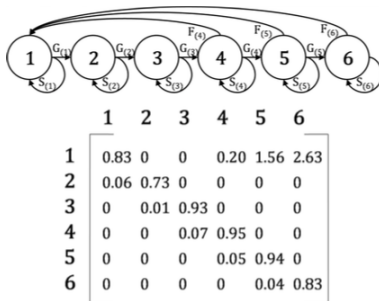
- A_{ij} :
 - Hvordan variabel j bidrager til i i næste tidsskridt pr. individ
 - Bidrag er uafhængige af hinanden (lineære)
- Men højre side er jo netop et matrix-vektor produkt skrevet ud for række i :

$$\overline{N}^{k+1} = \overline{A} \overline{N}^k$$

- Ligning beskriver system fra tidskridt k til $k + 1$

Hvordan finder vi $\bar{A}$?

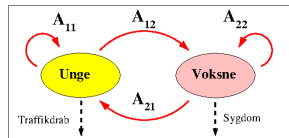
- For at gøre det enkelt: subskript = aldersgruppe, afkom starter i gruppe 1



- Første række over diagonal: fødselsrater
- Andre led A_{ij} : sandsynlighed for at gå fra aldersgruppe j til i i næste tidsskridt
- Nuller andre steder i subdiagonaler

Eksempel

- Befolkning med to grupper: unge og voksne
- Tidsskridt = et år
- Voksne får i gennemsnit 0.05 børn pr. år (midlet over køn)
- Unge bliver voksne efter ca. 18 år
- 0.2 % af unge dør i trafikken
- Voksne lever ca. 50 år (som voksne)

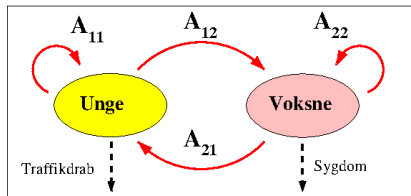


- 1 Opstil 2×2 matricen $\bar{A}$ ud fra oplysningerne
- 2 Hvis der er 40 unge og 60 voksne te år, hvad er så fordelingen næste år ?

- Tip: Hvis opholdstid i gruppe er T år $\rightarrow$ exit sandsynlighed $\sim 1/T$ pr. år

Eksempel - løsning

- Unges overlevelseschance pr år: 99.8 % = 0.998
- Opholdstid i gruppe er T år $\rightarrow$ exit sandsynlighed $\sim 1/T$ pr. år



- 1 Find $\bar{A}$:

$0.998 \cdot (17/18)$	0.05
$0.998 \cdot (1/18)$	49/50

 =

0.9426	0.05
0.0554	0.98

- 2 Find (unge, voksne) næste år: $\bar{N}^1 = \bar{A} \bar{N}^0$

0.9426	0.05	40
0.0554	0.98	60

 =

40.702
61.018

Eigenverdier/egenvektorer 1

- $\bar{\bar{A}}$ er 2×2 matrix
- Så eksisterer der 2 par $(\bar{x}_1, \lambda_1)$ og $(\bar{x}_2, \lambda_2)$:

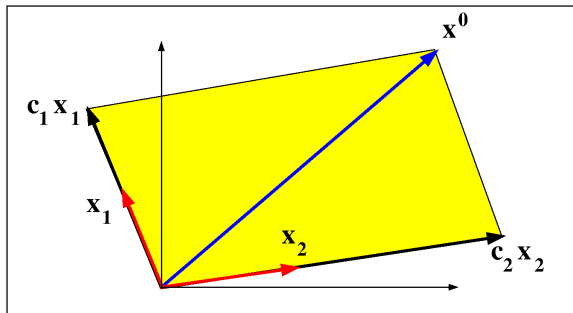
$$\begin{aligned}\bar{\bar{A}} \bar{x}_1 &= \lambda_1 \bar{x}_1 \\ \bar{\bar{A}} \bar{x}_2 &= \lambda_2 \bar{x}_2\end{aligned}$$

- $\bar{\bar{A}}$ har luttet positive elementer: **Perron-Frobenius** teorem
- 1 $\lambda_1 < \lambda_2$ og $0 < \lambda_2$
 - 2 $\bar{x}_1$ og $\bar{x}_2$ stritter i forskellige retninger
 - 3 $\bar{x}_2$ kan vælges positiv

Eigenverdier/egenvektorer 2

- Enhver begyndelsesvektor $\bar{x}^0$ kan opløses efter $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

$$\bar{x}^0 = c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2$$



- Hvad er befolkningen i næste tidskridt (distributiv egenskab)?

$$\bar{x}^1 = \bar{A} \bar{x}^0 = c_1 \lambda_1 \bar{x}_1 + c_2 \lambda_2 \bar{x}_2$$

- Vi fortsætter: hvad er befolkningen i m^{te} tidskridt ?

$$\bar{x}^m = (\bar{A})^m \bar{x}^0 = c_1 (\lambda_1)^m \bar{x}_1 + c_2 (\lambda_2)^m \bar{x}_2 \sim c_2 (\lambda_2)^m \bar{x}_2$$

- 1 λ_2 bestemmer befolkningstilvæksten
- 2 $\bar{x}^m \propto \bar{x}_2$ *uanset* hvor vi starter ($\bar{x}^0$)
- 3 $\lambda_2 > 1$: voksende befolkning
- 4 $\lambda_2 = 1$: befolkning i ligevægt
- 5 $\lambda_2 < 1$: aftagende befolkning

Eksempel fra før

- 1 Bestem egenverdier for $\bar{A}$

0.9426	0.05
0.0554	0.98

- 2 Er befolkningen voksende/aftagende ?

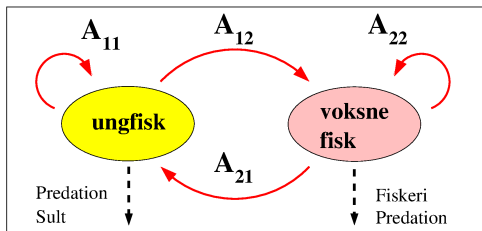
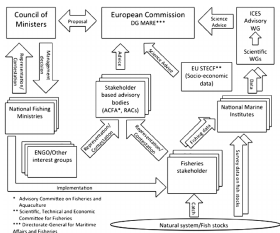
① Bestem egenverdier for $\bar{\bar{A}}$:

- PC-redskab, fx. `numpy.linalg.eigvals(A)` eller
- Reduktionsdeterminant:

$$(A_{11} - \lambda) (A_{22} - \lambda) - A_{12} A_{21} = 0 \Rightarrow \lambda = (0.905, 1.017)$$

② Er befolkningen voksende/aftagende ?
 $\max(\lambda) > 1 \Rightarrow$ befolkning voksende

I øvelsen er I videnskabsfolkene, der skal hjælpe politikerne med at beslutte, hvormange fisk fiskene må fange, uden at fiskebestanden bliver overfisket og kollapse.



- Videnskabelig rådgivning er en kompliceret proces
- Fiskebestanden beskrives med 2 variable: ungfisk og voksne

Link til disse slides

