Miniprojekt til InterMat efterårsforløb

Modellering af rotte-populationer vha. Leslie-matricer

v. Karsten Schmidt 2018

- revideret af Andreas Obel-Jørgensen og Niels Erik Wegge 2024

Introduktion

Forestil jer at vi befinder os i et relativt herligt område for rotter, hvor de kan vokse og formere sig under konstante betingelser. Der er f.eks. ikke forskel i tilgængelig føde for enkeltindivider, og faren for at møde fjender (f.eks. katte, rottegift eller sygdomme) er ens fra år til år. I dette område betragter vi en mængde hunrotter svarende til ca. halvdelen af områdets rottebestand. Når vi i det følgende taler om rotter, mener vi udelukkende hunrotter. Men vi deler dem yderligere op i tre grupper:

Gruppe 1, de unge: Det er dem mellem 0 og 1 år. Deres *fødselsrate* er 0.28, dvs. at hver rotte i denne gruppe føder i gennemsnit 0.28 rotte. Deres *overlevelsesrate* er 0.51, dvs. at kun 51% af rotterne bliver mere end ét år gamle.

Gruppe 2, de voksne: Det er dem mellem 1 og 2 år. Deres fødselsrate er 1.2, mens deres overlevelsesrate er 0.81.

Gruppe 3, de gamle: Det er dem mellem 2 og 3 år. Deres fødselsrate er 0.5, mens deres overlevelsesrate er 0.

Formålet med denne gruppeøvelse er at bruge matrixregning til at undersøge hvordan de tre aldersgrupper udvikler sig under de givne omstændigheder.

Bemærk at denne type modelleringsopgave vil være oplagt at bruge i et SRP med matematik og enten biologi, geografi eller samfundsfag!

Opgave 1: Lyder de angivne rater fornuftige?

a) Hvad kan forklaringen være på at de unges overlevelsesrate er mindre end de voksnes?
   Biologen forklarer: Høj børnedødelighed er normalt for de fleste dyr, da der altid være en overproduktion af unger. Det er en af forudsætningerne for evolution og naturlig selektion, så der er nogle der kan dø og andre der kan overleve. Så der er nogen der bliver selekteret fra og til i den naturlige selektion.
b) Hvad vil det sige at overlevelsesraten for de gamle er 0?
   Der er ingen generation efter "de gamle", så alle de gamle dør.
c) Hvorfor er både de unges og de gamles fødselsrate mindre end de voksnes?
   Det er fordi ikke alle individer i grupperne "de unge" og "de gamle" kan føde. F.eks. indeholder gruppen "de unge" også rotter der ikke er kønsmodne endnu. Desuden vil fertiliteten stige indtil den rammer et maks. hos de voksne og derefter aftage igen. Hos mennesker er maks. fertilitet fra 18 til 29 år.

Opgave 2: At regne et år tilbage

Den 1. januar 2018 viste en optælling at der var 198 unge rotter, 51 voksne rotter og 81 gamle rotter. Vi skal finde ud af hvor mange der var i hver aldersgruppe året før, dvs. 1. januar 2017. Gå således frem:

a) Lad x_1 betegne antallet af unge pr. 1. januar 2017, og tilsvarende x_2 antallet af voksne og x_3 antallet af gamle. Opstil et ligningssystem der indeholder tre ligninger med de tre ubekendte x_1, x_2 og x_3, og som indeholder den information der er nødvendig for at finde de ubekendte.
b) Omskriv de tre ligninger til en enkelt matrixligning og kald koefficientmatricen $\boldsymbol{L}$.
c) Løs matrixligningen ved at gange igennem med $\boldsymbol{L}^{-1}$, den inverse matrix til $\boldsymbol{L}$ på dit CAS-værktøj.

Opgave 3: Fremskrivning ved hjælp Leslie-matricen

Den koefficientmatrix $\boldsymbol{L}$ vi opstillede i opgave 2 kaldes ***Leslie-matricen.*** Leslie-matricer er navngivet efter matematikeren og biologen Patrick H. Leslie, som i 1945 udgav artiklen ”*On the use of matrices in certain population mathematics*” (se ”Henvisninger”).

Matricen $\boldsymbol{L}$ indeholder al nødvendig information om de tre aldersgruppers fødsels- og overlevelsesrater. Vi skal nu bruge matricen til at fremskrive udviklingen, idet vi udnævner 2017 til begyndelsesår.

a) Opskriv vektoren

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

med de ovenfor fundne værdier for 2017. Gør rede for at vi kan genfinde populationsvektoren

$$\begin{bmatrix} 198 \\ 51 \\ 81 \end{bmatrix} \quad (2)$$

for 2018 (dvs.1 år efter begyndelsesåret) ved at udføre matrix-vektor-produktet $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{b}$.

b) Lad nu $\boldsymbol{f}(n)$ betegne populationsvektoren n år efter begyndelsesåret 2017. Gør rede for at

$$\boldsymbol{f}(n) = \boldsymbol{L}^n \cdot \boldsymbol{b} \quad (3)$$

c) I år 0 (dvs. 2017) har vi set der er lige mange unge, voksne og gamle, nemlig 100 af hver. Hvem er der flest af, næstflest af og færrest af efter 1 år, efter 2 år, efter 10 år, 15 år, 20 år, 25 år? Lav et punktplot for hver alderskategori.

<u>*Hjælp til Nspire*</u>*:* Funktionen $g(i, \boldsymbol{m}) := (\boldsymbol{m}[i])[1,1]$ tager den i'te koordinat ud af vektoren $\boldsymbol{m}$. Eksempelvis vil $g(1, \boldsymbol{f}(10))$ give antallet af unge rotter, når $n = 10$ i ligning 3.

d) Plottene fra opgave 3c svinger i starten og ser derefter ud til at nærme sig en eksponentiel vækst. Lav en eksponentiel regression på hver af de 3 kategorier af rotter (undlad evt. de første år, hvor antallet svinger meget). Bestem fremskrivningsfaktorerne for hver alderskategori.

Opgave 4: Eksponentiel vækst og egenværdiproblemet

Introduktion

Vi observerer at de tre kategoriers vækst hver for sig med god tilnærmelse kan beskrives som eksponentielle og endda med en fælles fremskrivningsfaktor, som vi betegner a.

Vi ved fra gymnasiet, at for eksponentielle udviklinger $f(x) = b \cdot a^x$ gælder

$$f(x+1) = b \cdot a^{x+1} = b \cdot (a \cdot a^x) = a \cdot (b \cdot a^x) = a \cdot f(x) \quad (4)$$

Man kan altså beregne funktionsværdien en generation frem ved at gange med fremskrivningsfaktoren a.

Analogien til denne sammenhæng er i vores tilfælde givet ved fremskrivning med Leslie-matricen:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{bmatrix} = \boldsymbol{L} \cdot \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Hvis væksten af de tre kategorier skal kunne beskrives ved en eksponentiel udvikling med en fælles fremskrivningsfaktor a, må følgende være opfyldt:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Kombineres ligningerne 5 og 6, får vi:

$$\boldsymbol{L} \cdot \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix} \qquad 7$$

hvilket netop er egenværdiproblemet for $\boldsymbol{L}$. Bemærk at ligning 7 viser, at en fælles fremskrivningsfaktor a må være en egenværdien λ for Leslie-matricen (hvor vi har skrevet a i stedet for det traditionelle λ).

Bestemmelse af egenværdi

a) Bestem det karakteristiske polynomium for Leslie-matricen ved at beregne determinanten

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0.28-\lambda & 1.2 & 0.5 \\ 0.51 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0.81 & -\lambda \end{bmatrix}\right) \qquad 8$$

Svar: $p(a) = -\lambda^3 + 0.28\lambda^2 + 0.612\lambda + 0.20655$

b) Bestem egenværdien λ ved at løse $p(\lambda) = 0$ og sammenlign med den fremskrivningsfaktor a du fandt tidligere (i opgave 3d).

Bestemmelse af egenvektor

Plottene i opgave 3d tog udgangspunkt i en startfordeling af rotter fra 2017 givet ved

$$\boldsymbol{f}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} \qquad 9$$

Denne startfordeling gav udsving i starten. Hvis vi ønsker en ren eksponentiel udvikling helt fra starten, skal vi finde en startfordeling af rotter som passer ind i ligningen

$$\boldsymbol{L} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \qquad 10$$

Vi skal med andre ord bestemme en egenvektor hørende til egenværdien λ.

Vi skal derfor løse ligningssystemet

$$(0.28-\lambda)x_1+1.2x_2+0.5x_3=0 \qquad 11$$
$$0.51x_1-\lambda x_2+0x_3=0$$
$$0x_1-0.81x_2-\lambda x_3=0$$

hvor talværdien for λ indsættes.

Vi skriver for overskuelighedens skyld ligningssystemet som

$$(a-\lambda)x_1+bx_2-cx_3=0 \qquad 12$$
$$dx_1-\lambda x_2+0x_3=0$$
$$0x_1-ex_2-\lambda x_3=0$$

Indsættes værdien af λ ved vi (som I har set i modul 4), at en af ligningerne gennem rækkeoperationer kan reduceres til $0x_1+0x_2+0x_3=0$, som kan smides væk, da alle tal passer. Men andre ord; en af ligningerne skrives som en kombination af de to andre. Vi kan derfor smide en af ligningerne væk. Vi smider den øverste væk.

Ligningssystemet vi ønsker at løse, er nu reduceret til

$$dx_1-\lambda x_2+0x_3=0 \qquad 13$$
$$0x_1-ex_2-\lambda x_3=0$$

c) Sæt $x_3=t$ og vis at det giver resultatet

$$\boldsymbol{v_{egenvektorer}}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\dfrac{\lambda^2}{de}\\t\dfrac{\lambda}{e}\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda^2}{de}\\\dfrac{\lambda}{e}\\1\end{pmatrix} \qquad 14$$

d) Indsæt talværdierne for d, e og λ i 14, og find at alle egenvektorer kan skrives

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2.66938\\1.29662\\1\end{pmatrix} \qquad 15$$

e) Bestem endelig t og egenvektoren så det samlede antal rotter i egenvektoren er lig med start populationen fra opgave 2 på 300 rotter.

Svar (afrundet) $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}161\\78\\61\end{pmatrix}$

Ekstraopgaver til de hurtige

Opgave 5

a. I opgave 1 brugte du dit CAS-redskab til at beregne den inverse matrix. Vis at der for en generel Leslie-matrix for tre populationsgrupper

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

gælder at determinanten er $\det(\boldsymbol{L}) = cde$. Derfor ved vi at den inverse matrix findes, hvis ingen af tallene c, d, eller e er nul. Vis at der i så tilfælde gælder

$$\boldsymbol{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e} \\ \frac{1}{c} & -\frac{a}{c \cdot d} & -\frac{b}{c \cdot e} \end{bmatrix} \tag{17}$$

b. Løs matrixligningen i opgave 1 vha. Gauss elimination (dvs. rækkeoperationer) i stedet for invers matrix. Benyt gerne dit CAS-værktøj. Bemærk: det giver de pæneste tal, hvis du benytter brøker i stedet for decimaltal, eks. $0.51 = \frac{51}{100}$.

c. Findes der mon en ”stabil” population af unge, voksne og gamle rotter, så den samlede størrelse af kolonien ikke ændres fra generation til generation? (Det kaldes *steady state*.)

d. I opgave a. ovenfor fandt du et udtryk for determinanten for en 3×3 Leslie-matrix. Generaliser resultatet til større Leslie-matricer.

Henvisninger:

- Leslie, P. H. (1945)
  On the use of matrices in certain population mathematics. Biometrika 33: 183–212.
- Leslie, P. H. (1948)
  Some further notes on the use of matrices in population mathematics. Biometrika, 35 (3–4), 213–245.