

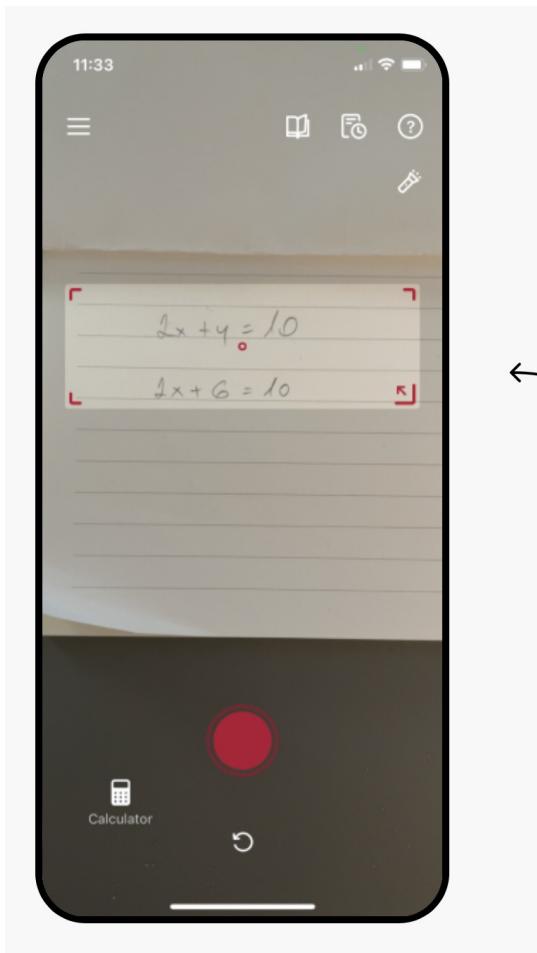
Digital matematik med mening, med fokus på programmering i matematikundervisningen

Morten Misfедt

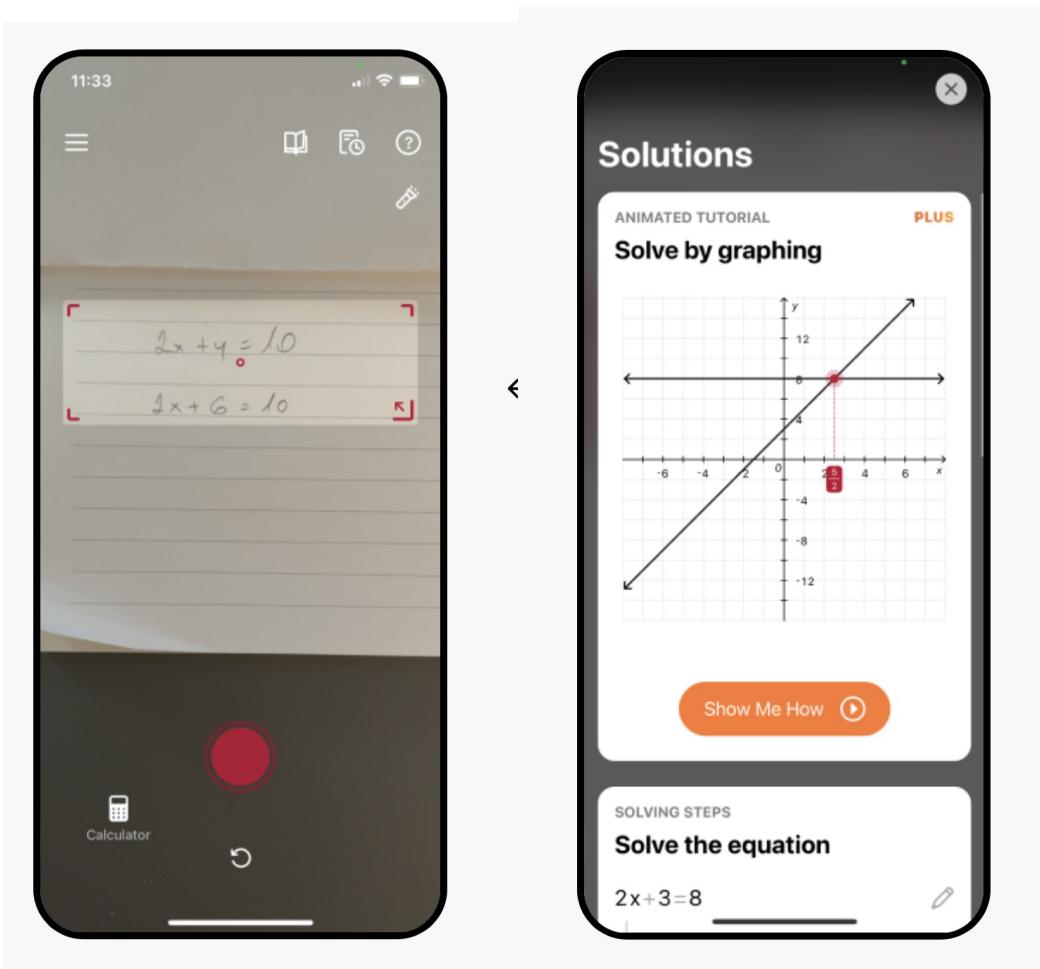
Tre dele

- Når teknologien udfordrer matematikkens meningsfuldhed
- Forsøgene på at tage teknologiuddannelse ind i matematikundervisningen
- Matematikundervisning som post-digital

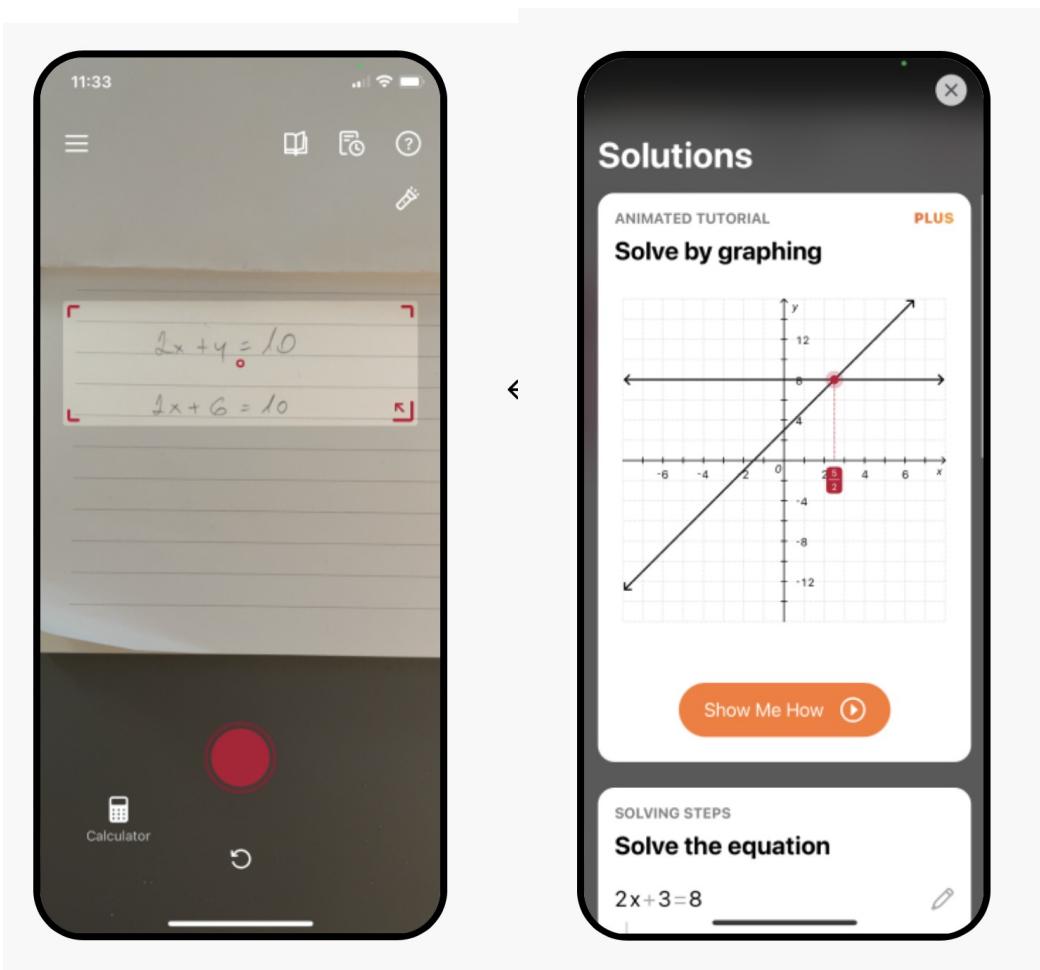
Photomath, cossincalc, casificering



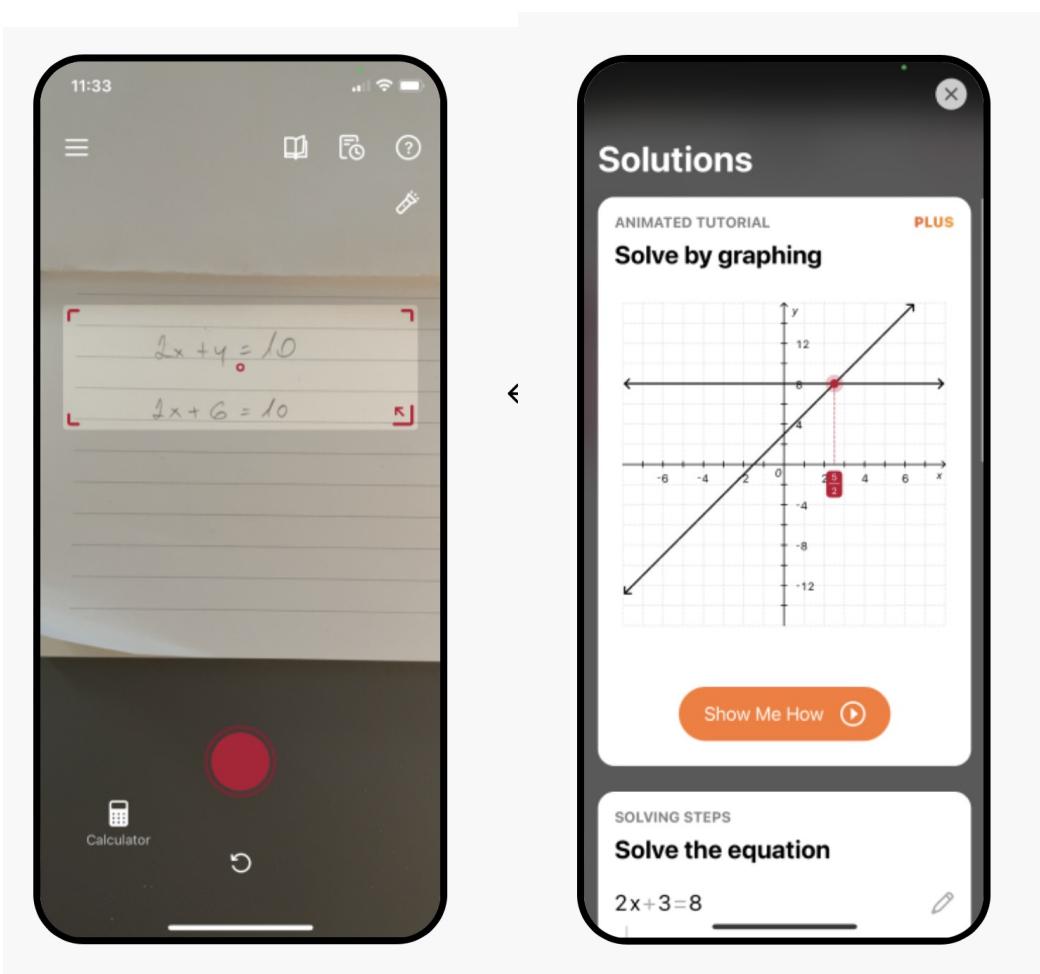
Photomath, cossincalc, casificering



Photomath, cossincalc, casificering



Photomath, cossincalc, casificering



The image shows a screenshot of the WolframAlpha computational intelligence interface.

Search Bar: Contains the equation $x^3 - 2x = 3$.

Input Field: Also contains the equation $x^3 - 2x = 3$.

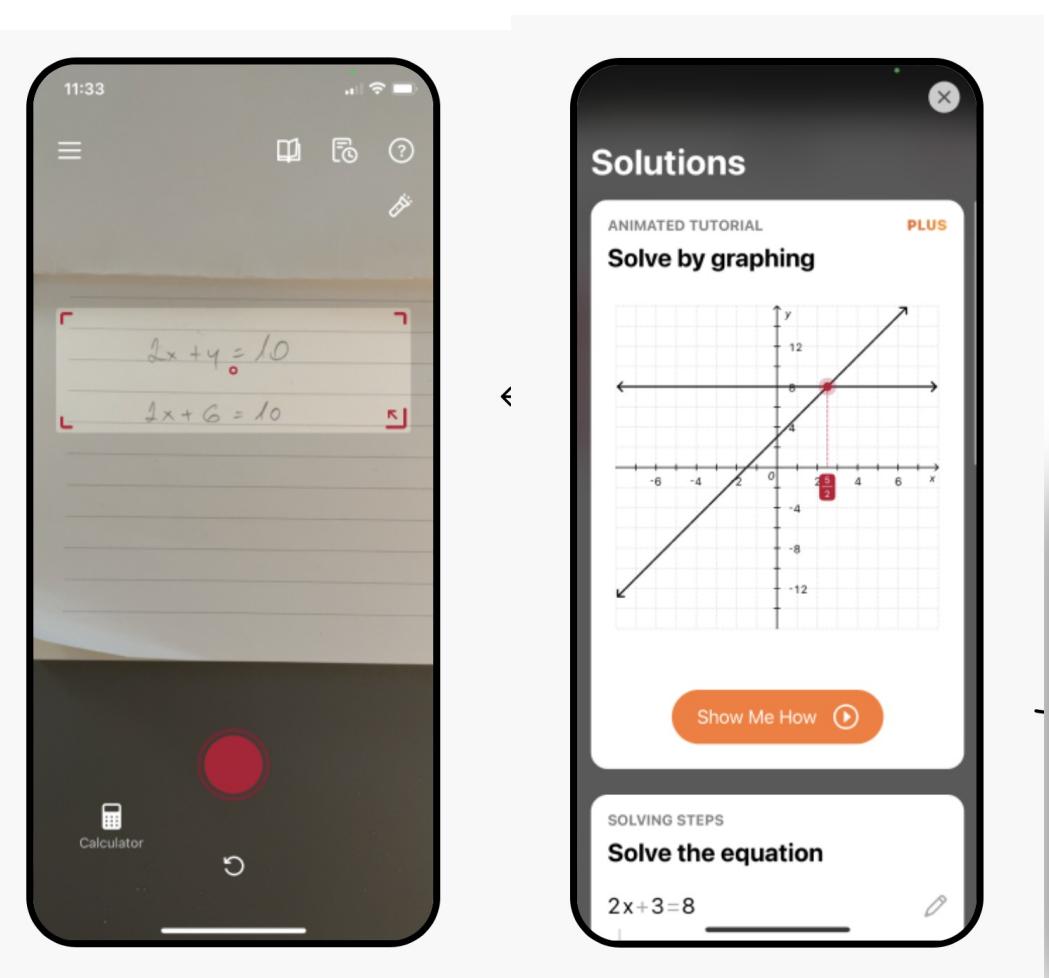
Alternate forms: Shows the equation in alternative forms: $x^3 = 2x + 3$ and $x(x^2 - 2) = 3$.

Number line: A horizontal number line from 1.4 to 2.4 with a blue dot at approximately 1.87, representing the real solution.

Real solution: Labeled 'Real solution' with a value of approximately 1.87.

Buttons: 'More digits', 'Exact form', and a checked checkbox.

Photomath, cossin calc, casificering



The image compares two different approaches to solving mathematical problems: a general computational engine and a specialized calculator.

WolframAlpha (Top Right): A screenshot of the WolframAlpha interface. It shows the search bar with the query $x^3 - 2x = 3$. Below the search bar are buttons for 'NATURAL LANGUAGE' and 'MATH INPUT'. To the right are buttons for 'EXTENDED KEYBOARD' and 'EXAMPLES'.

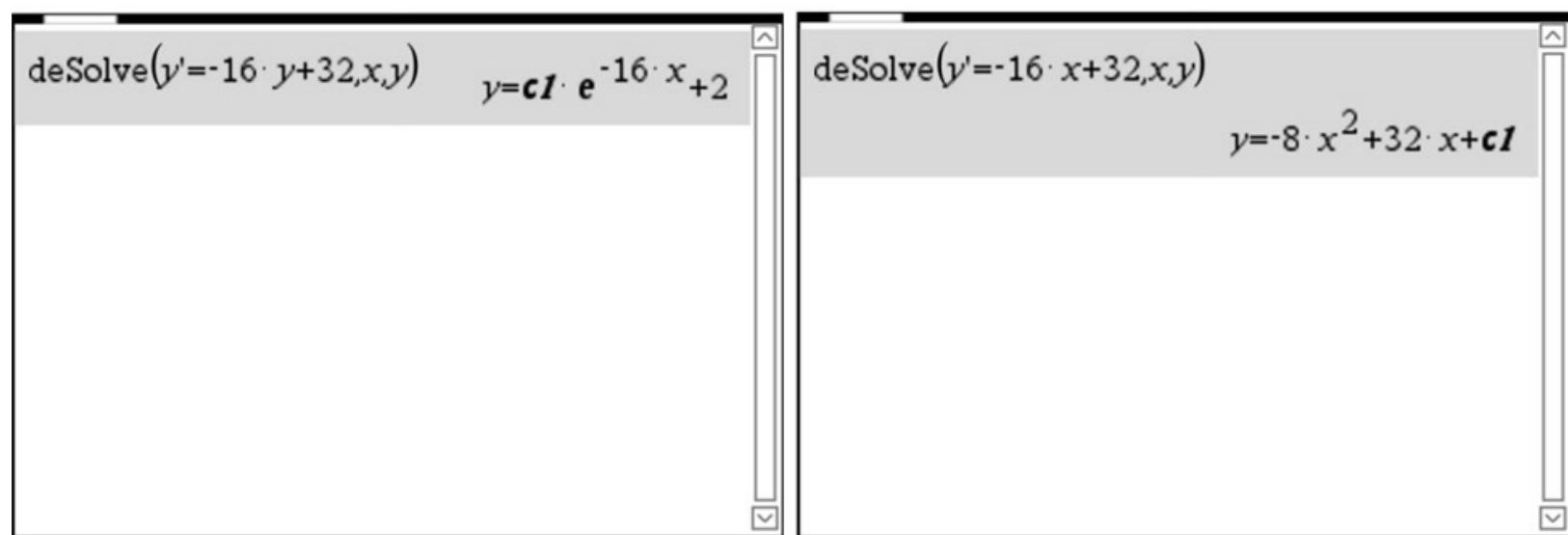
CosSinCalc (Bottom Left): A screenshot of the CosSinCalc website. It features a green header with the logo 'CosSinCalc .com' and tabs for 'Calculator', 'Result', 'Download', and 'About'. Below the header, there are fields for inputting angles A, B, C and sides a, b, c. Buttons for 'Calculate' and 'Clear' are at the bottom. To the right is a diagram of a triangle with vertices A, B, and C, and sides labeled a, b, and c.



Matematikundervisningens
kognitive singularitet

Solve, desolve, matematik eller black-boks betjening

- $dN/dt = -16N + 32$ med $N(10) = 1$, find et udtryk for $N(t)$



Jankvist, U., & Misfeldt, M. (2015). CAS-Induced Difficulties in Learning Mathematics? For the Learning of Mathematics, 35(1), 15-20.

Jankvist, U.T., Misfeldt, M. & Aguilar, M.S. What happens when CAS procedures are objectified?—the case of “solve” and “desolve”. *Educ Stud Math* 101, 67–81 (2019).
<https://doi.org/10.1007/s10649-019-09888-5>

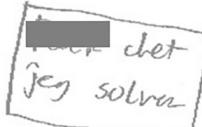
Students' identity work + CAS

Fig. 1 A 3rd year (grade 12) student's work with the linear equation: $220 - x = 208 - 0.7 \cdot x$. After a few attempts of solving this by hand, he gives up and turns to CAS instead, stating “[Expletive deleted] det, jeg solver” which translates into “[Expletive deleted] it, I'm solving”

$$220 - x = 208 - 0.7 \cdot x$$

~~manuærligt~~

$$\frac{12}{-0.7} - \frac{x}{-0.7} = \frac{-0.7 \cdot x}{-0.7}$$



$$-17 + \frac{x}{0.7} = x$$

$$x = 17$$

Jankvist, U.T., Misfeldt, M. Old Frameworks—New Technologies. *Can. J. Sci. Math. Techn. Educ.* **21**, 441–455 (2021).

<https://doi.org/10.1007/s42330-021-00164-4>

Møllegaard Iversen, S., Misfeldt, M., & Jankvist, U. T. (2018). Instrumental mediations and students' identities. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 38(2), 133–156. <https://revue-rdm.com/2018/instrumental-mediations-and-students-identities/>

Opgave 2

En partikel bevæger sig i planen, så den til tidspunktet t befinder sig i punktet med koordinaterne $f(t)$, hvor $f(t) = \begin{pmatrix} (t-1)^2 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}$. Bestem de tidspunkter t , for hvilke

- a) $f'(t) \cdot f''(t) = 0$
- b) $f'(t) \perp f''(t)$
- c) $f'(t) \parallel f''(t)$

A) Først differentier vi $f(x)$ to gange for at finde den afledte og dens dobbelte afledte. Vi anvender maple:

$$f(t) := [(t-1)^2, t^2 - 2t] \quad t \rightarrow [(t-1)^2, t^2 - 2t]$$

$$diff(f(t), t) \quad [2t-2, 2t-2]$$

$$g(t) := [2t-2, 2t-2] \quad t \rightarrow [2t-2, 2t-2]$$

$$diff(g(t), t) \quad [2, 2]$$

$$h(t) := [2, 2] \quad t \rightarrow [2, 2]$$

Herefter kan vi løseligning, når prikproduktet af $g(t)$ og $h(t)$ skal blive nul.

$$\binom{2t-2}{2t-2} \bullet \binom{2}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(2t-2) + 2(2t-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4t-4+4t-2=0 \quad \text{eller i maple } \quad t = solve\left(\left[\begin{array}{c} 2t-2 \\ 2t-2 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right] = 0, t\right) \quad t=1$$

$$8t=8$$

$$t=1 \quad \checkmark$$

Reificeringens onde cirkel

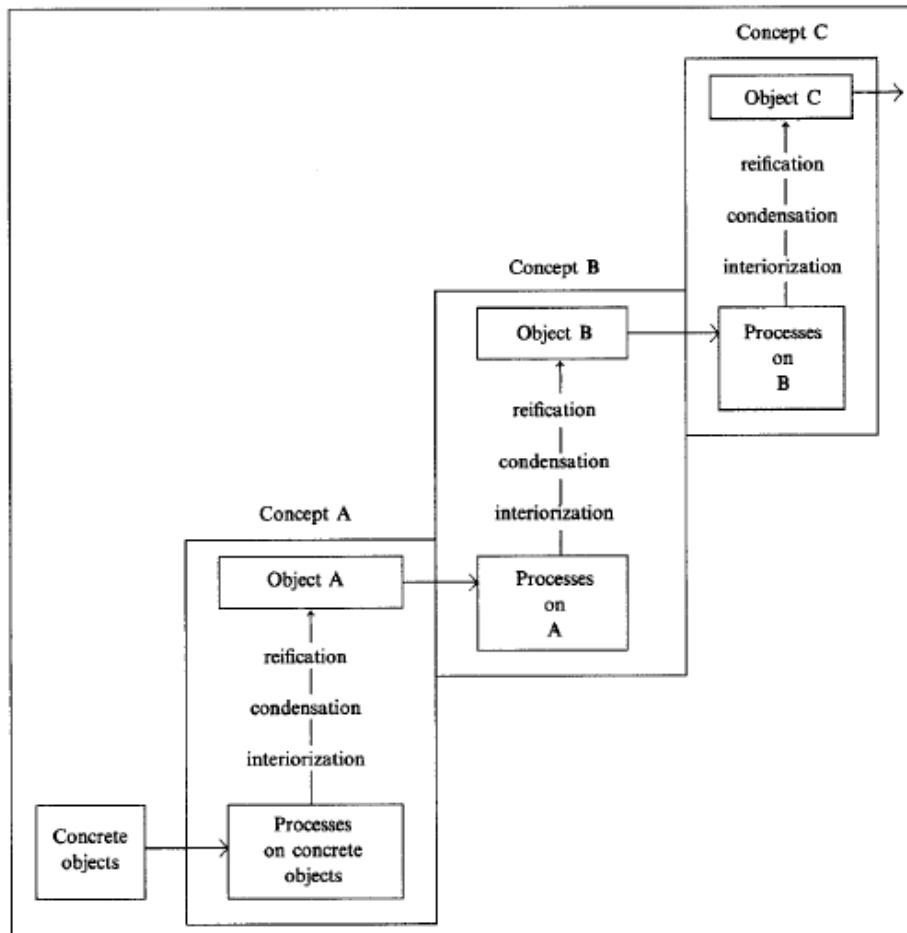
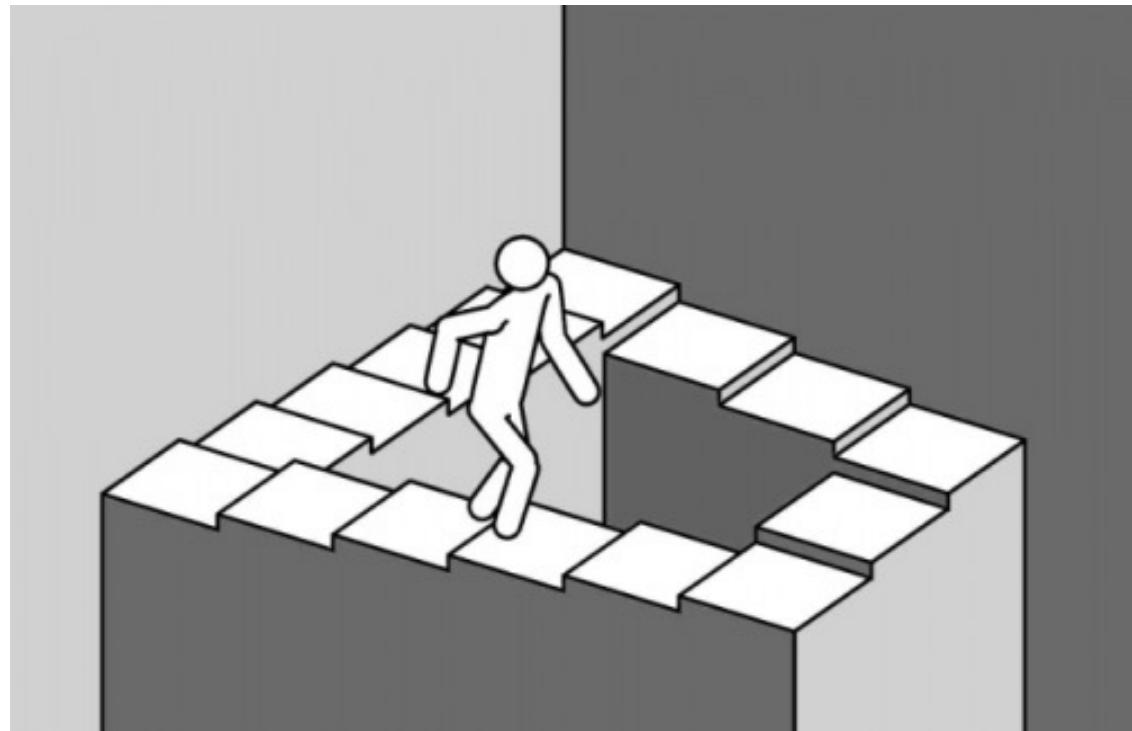


Fig. 4. General model of concept formation.

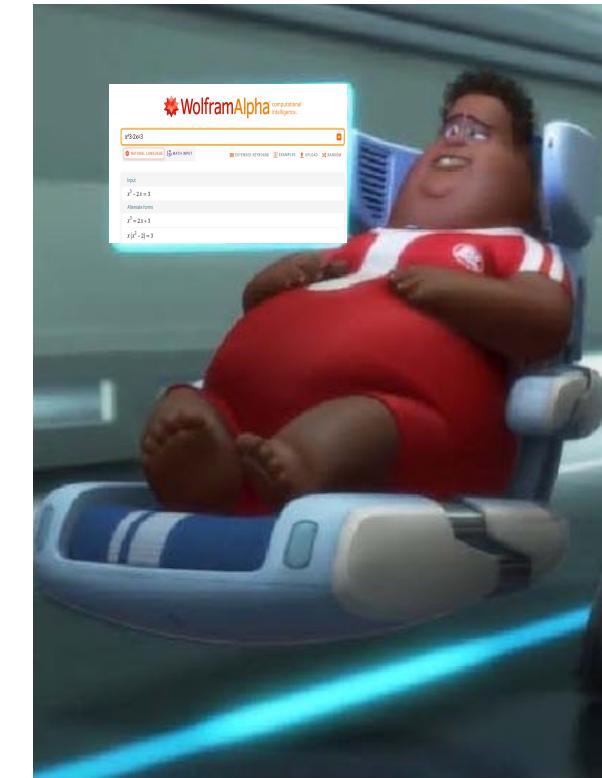
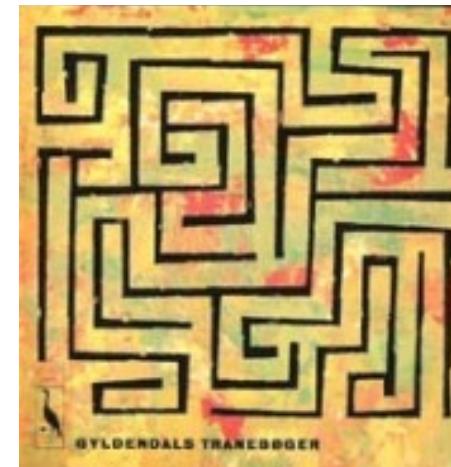


Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Den meningsløse digitalisering af matematik

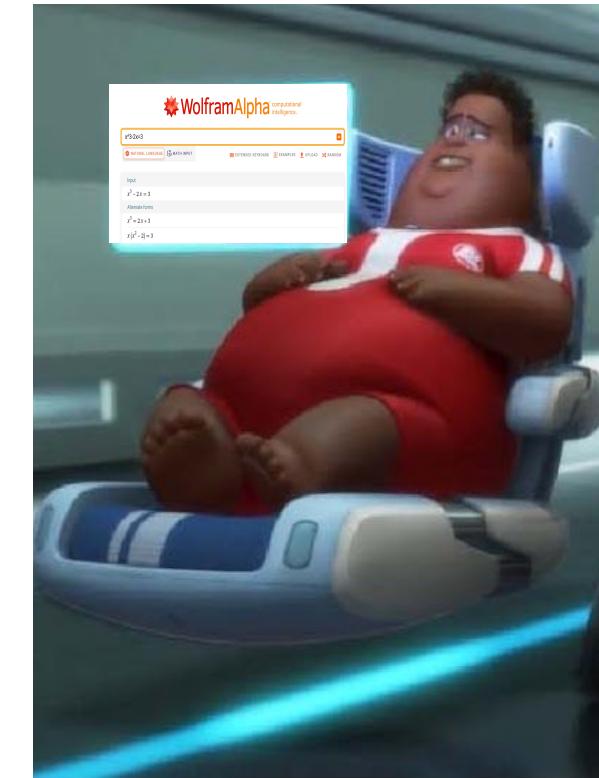
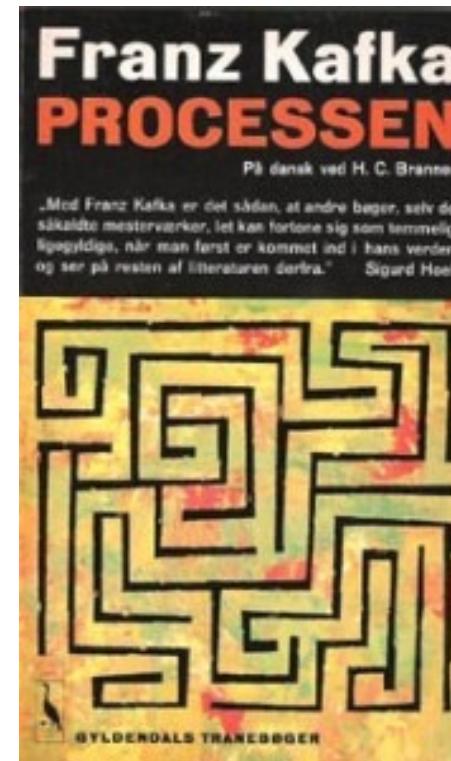
- Er kognitiv doven – mest bekymret om interface og instrumenter
- Mister grounding i virkeligheden og det menneskelige blik
- skubber black bokse rundt i et strukturalistisk tosseland

Find x



Den meningsløse digitalisering af matematik

- Er kognitiv doven – mest bekymret om interface og instrumenter
- Mister grounding i virkeligheden og det menneskelige blik
- skubber black bokse rundt i et strukturalistisk tosseland



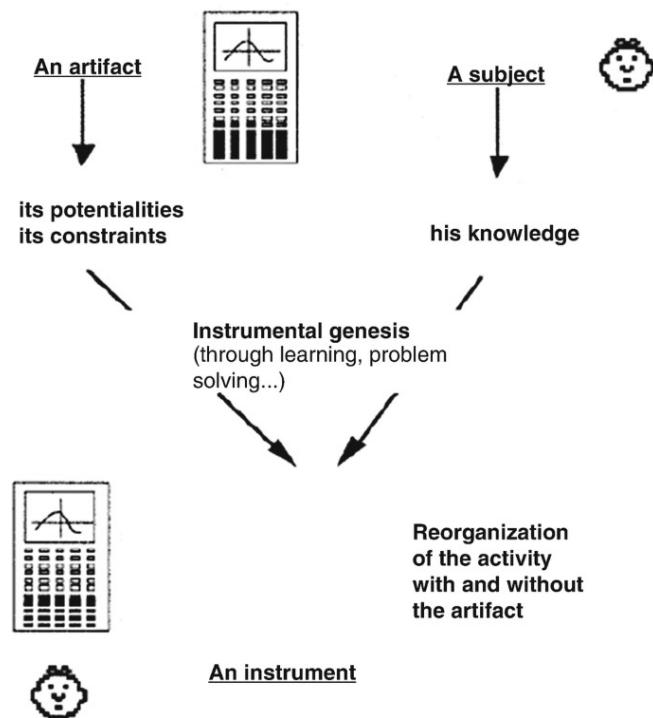
Svar på denne krise ...

- Tid til refleksion – hvad vil det sige at være matematisk
 - Mit eget bud
- Udvikling af bedre pædagogisk teori og mere reflekteret praksis
 - Den instrumentelle tilgang til matematikundervisning
- Revidering af mål og indhold af matematik i lyset af digitale muligheder
 - Computational thinking og matematik

Tid til refleksion – hvad vil det sige at være matematisk

FRISÆTTENDE MATEMATIK? 7
MATEMATISK FORESTILLINGSEVNE 13
MODELLER OG PROBLEMER 23
MATEMATIK-UNDERVISNING 33
DIGITAL MATEMATIK 49
ØKOLOGISK MATEMATIK 61
MORTEN ANBEFALER 69





can you draw a hammer and a magnifying glass in one and the same instrument. style: naturalistic but a little spooky

Bedre teori og praksis indenfor matematikundervisning

Computational thinking i matematik

(programming and computational thinking and mathematical digital competencies)

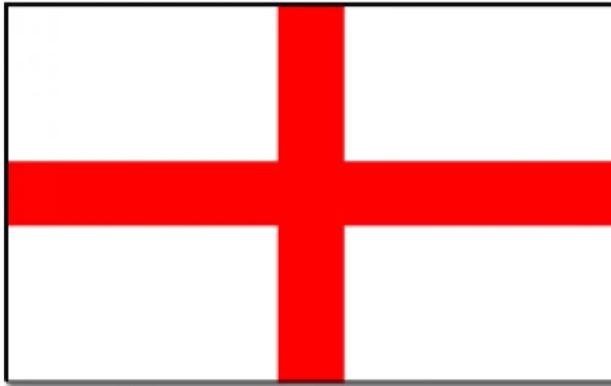
- Med Raimundo Elicer (*Postdoc, DPU, Aarhus Universitet/ IND, Københavns Universitet*) og Andreas Lindenskov Tamborg (*adjunkt, IND, Københavns Universitet*)
- "Computational thinking" en del af curriculum i 25 europæiske lande ([Bocconi et al., 2022](#))
- Stor variation i konkrete beslutninger
- Typisk en eller anden relation til matematikfaget
- Skabe systematisk, empirisk indblik i implementeringsprocesser, der kan informere udvikling af CT i mat i DK

Hvilke udfordringer? ... og hvilke løsninger?

Tamborg, A. L. (2022). A solution to what? Aims and means of implementing informatics-related subjects in Sweden, Denmark, and England. *Acta Didactica Norden*.

Mål: Flere ansøgere til datalogi + øget konkurrenceevne

Middel: Nyt, selvstændigt computing fag med overvejende datalogisk indhold
(2014)



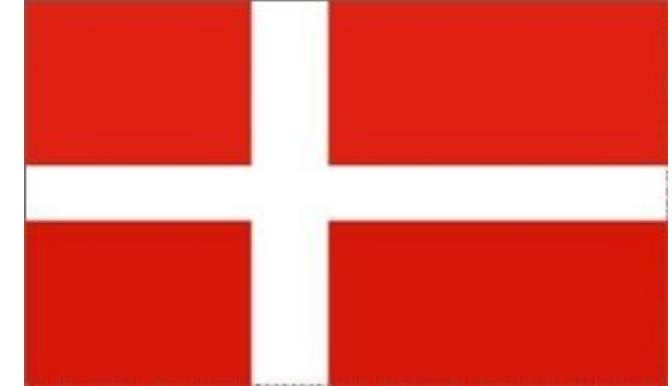
Mål: Lige digitale kompetencer på tværs af soc. øko faktorer

Middel: Revisioner af alle større fag, heriblandt implementering af programmering og algoritmer i matematik (2018)



Mål:
Kritiske og skabende elever i et digitaliseret, demokratisk samfund

Middel:
bredt forsøgsfag, hhv. i og som fag
(2018-2021)



Indhold i curriculum

Computing curriculum:

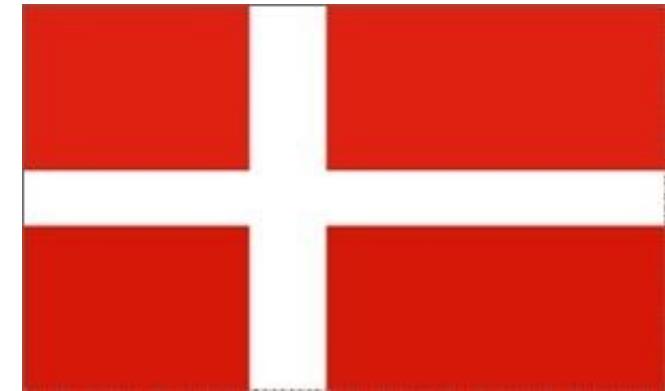
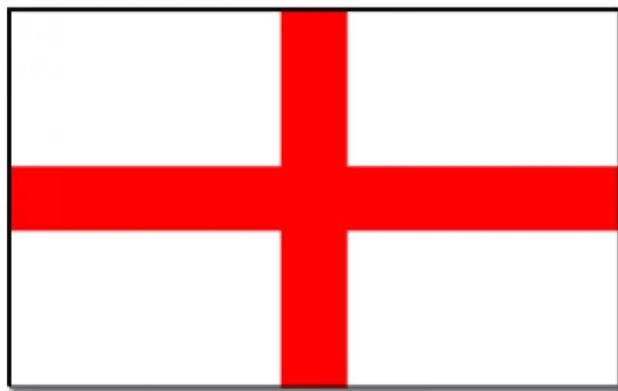
Forstå og anvende basale principper fra datalogi
Analysere problemer med datalogiske begreber
Evaluere nye og kendte teknologier

"Digital kompetans" i matematik:

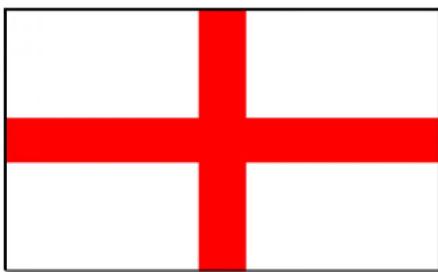
Programmering en del af algebra
Algoritmer en del af problemløsning
Simulationer en del af statistik

Teknologiforståelse (i mat):

Teknologisk handleevne
Digital design og designprocesser
Computationel tænkning
Digital myndiggørelse



Relationen mellem matematik og CT i curricula



Computing

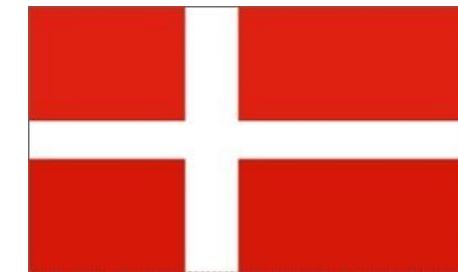


Matematik



Matematik

Digital kompetans	Statistik/ simulering	Algebra/ Programmering
Dig.kom./mat	Dig.kom./mat	



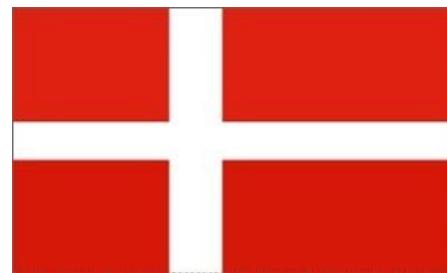
Matematik

- problemløsningskompetence
- Statistik og sandsynlighed
- Etc.

Teknologiforståelse

- digital myndiggørelse
- Computational thinking
- Etc.

Tendenser i tilgængelige UV materialer i SE/DK



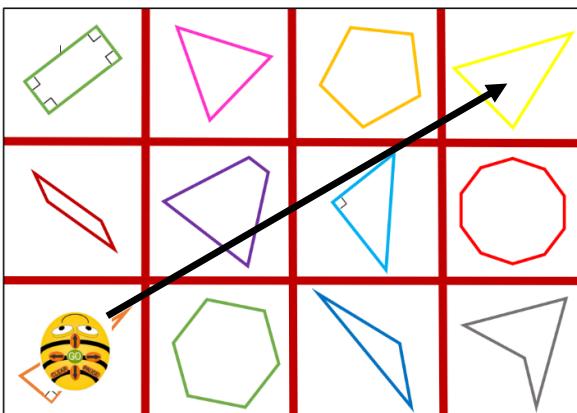
- Små isolerede opgaver
- Indeholder konskevent mat + CT
- Fokus på at følge instruktioner

- Lange forløb (mange lektioner over flere uger)
- Delopgaver, der ofte **kun** behandler mat eller tekforståelse
- Ligevægt ml. opgaver, hvor elever følger instruktioner, programmerer og **forklarer** (mange plenumdrøftelser)

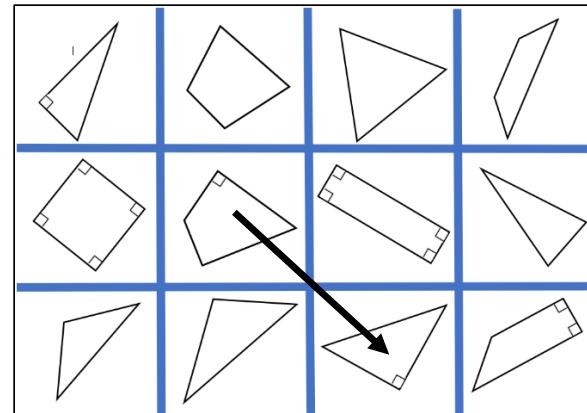
Elicer, R., Tamborg, A. L., Bråting, K., & Kilhamn, C. (forthcoming). *Comparing the integration of programming and computational thinking into Danish and Swedish elementary mathematics teaching resources.*

BeeBot og polygoner

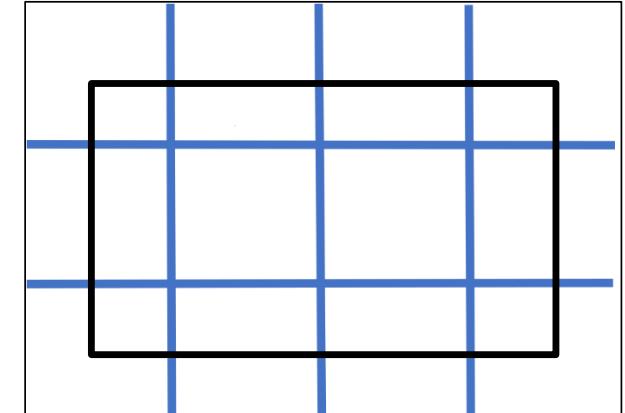
Hvordan kommer BeeBot-en hen til den gule trekant?



Hvilke forskellige egenskaber har de to figurer?



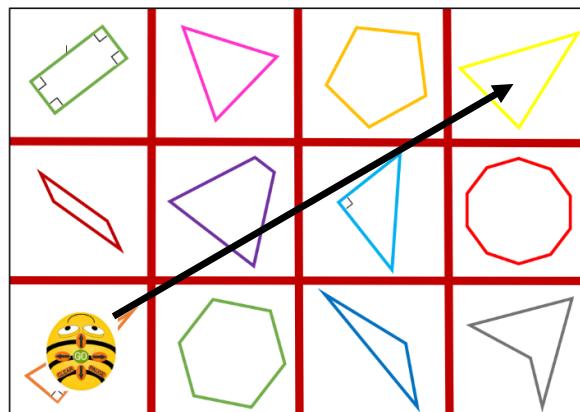
Lav flere forskellige algoritmer for et rektangel.
Hvor stor et rektangel kan I lave?



På hvilken måde er disse opgaver forskellige?

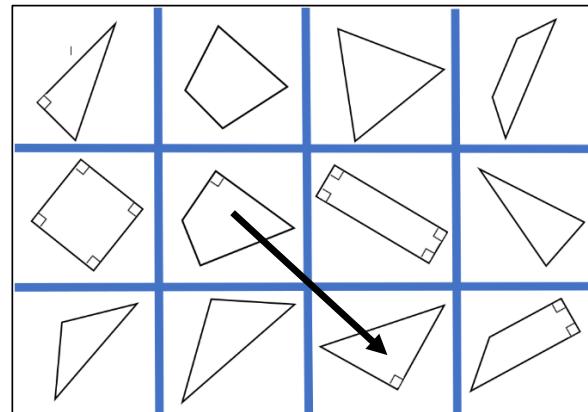
4. Resultater

Eksempel: [Polygoners geometriske egenskaber](#)



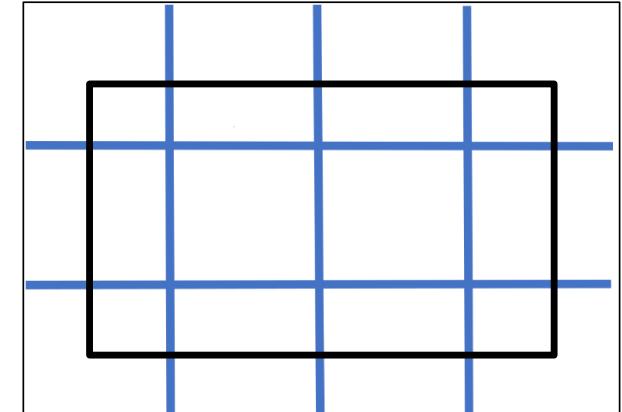
Mat: Konceptuel
PCT: Operationel

Matematik som kontekst



Mat: Operationel
PCT: Konceptuel

PCT som kontekst



Mat: Operationel
PCT: Operationel

Operationel integration

Analyse af opgaver

Matematik PCT	Fraværende	Konceptuel	Operationel
Fraværende		Ingen PCT	
Konceptuel	Ingen matematik	Konceptuel integration	PCT som kontekst
Operationel		Matematik som kontekst	Operationel integration

[Elicer & Tamborg \(2022\)](#). *Nature of the relations between programming and computational thinking and mathematics in Danish teaching resources.*

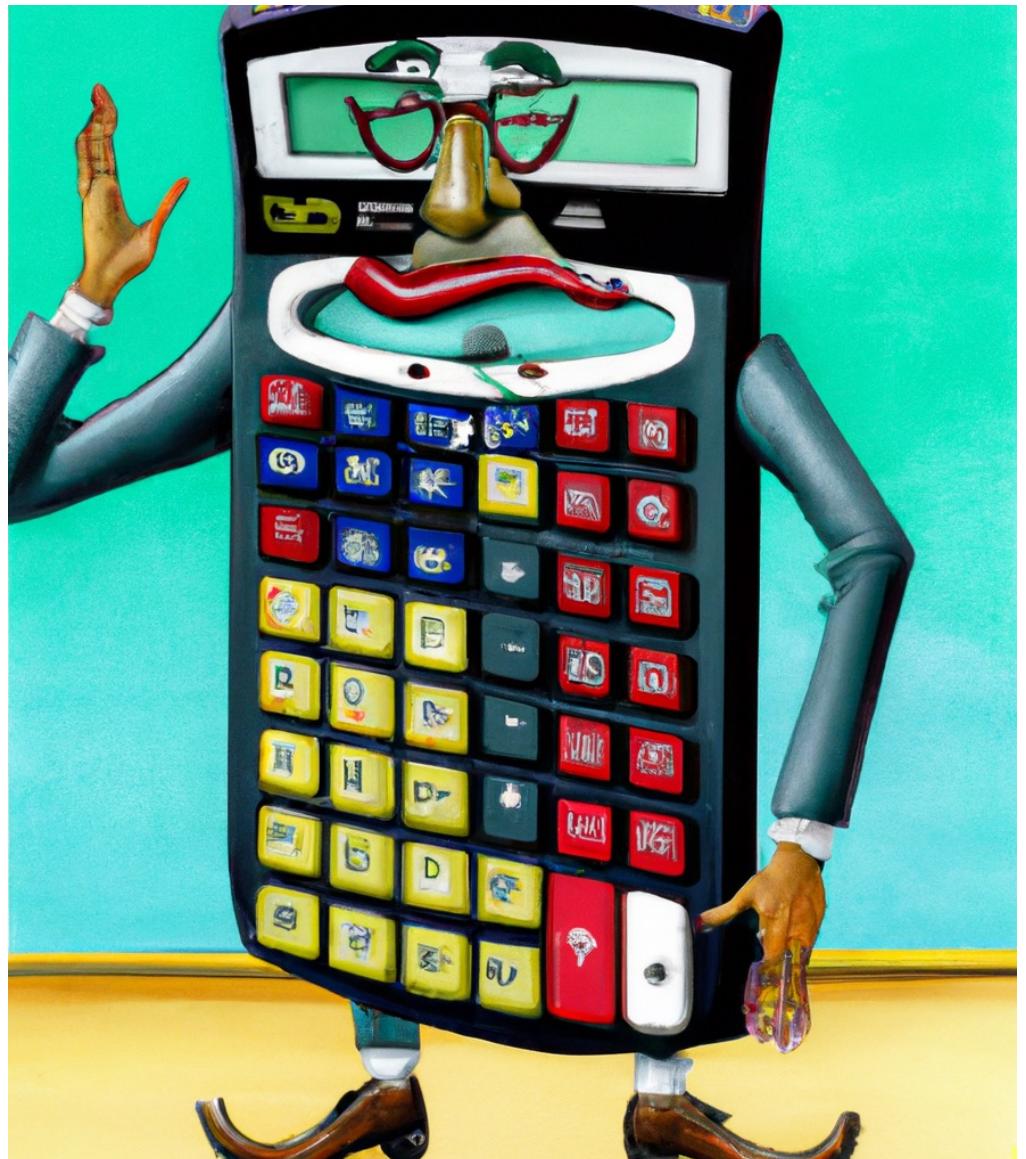
Post-digital matematikundervisning

Ikke blot digitale værktøjer

Dyb integration med
programmering og CT

Matematik som digitale
byggesten

Skjult matematik og
teknokritisk
matematikundervisning



Det Post-Digitale perspektiv

- Holder op med at se digitalisering som noget særligt
 - Og derfor er digitalisering heller ikke et mål i sig selv
- Men anerkender samtidigt store transformative konsekvenser af digitalisering
 - Og derfor kan vi heller ikke vælge digitalisering fra
- Økologisk og situeret forståelse af digitale indflydelses på læring
 - Digitalisering er:
 - konkret – noget kommunikeres eller behandles digitalt
 - Situeret – det foregår et sted (kontekst)
 - Hænger systemisk sammen med alt muligt andet

Forståelser af det post-digitale (Knox 2019)

- Straight forward historisk: "Efter" det digitale. Det digitale som en særlig periode i historien hvor vi var meget optagede af digitale gadgets og systemer. Post-digital = vi er videre...
- "Post-isme" : som i postmodernisme, posthumanisme, postkolonialisme. Post-digital = udfordring af de store myter og kategorier som vi tidligere har naturaliseret

De store myter og kategorier

- Digital matematik som værende i "en anden kategori" end almindelig matematik og dermed noget man kan være for eller imod.
- Digitale værktøjer til at 1) lære med og til at 2) løse med
- Matematiske værktøjer som værende "bare værktøjer" og uden indflydelse på begrebsforståelse og indhold (dette gælder både digitale og analoge værktøjer)
- Informatik er det nye matematik ☺

- Find selv på flere

Frem mod post-digital matematik med mening

Matematik som tæmmet fantasi (men flere greb at tæmme med)

Arbejde med problemer og modeller

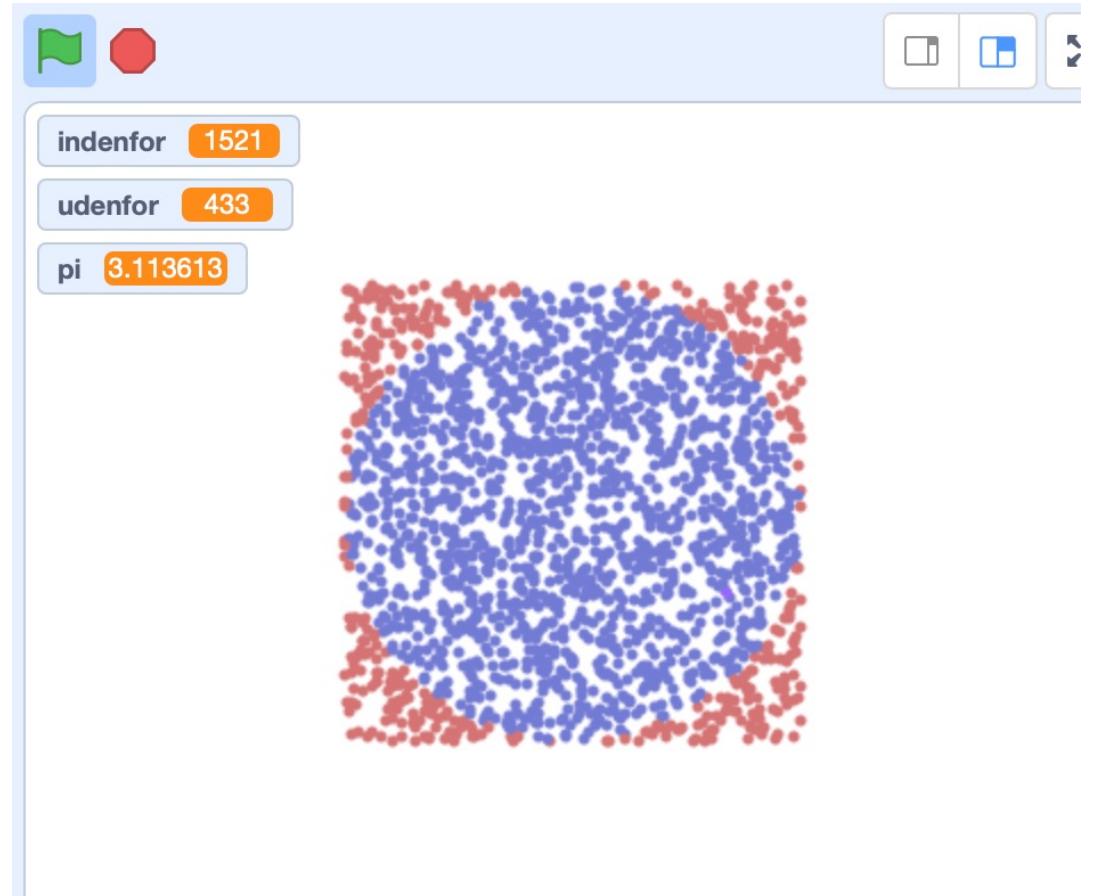
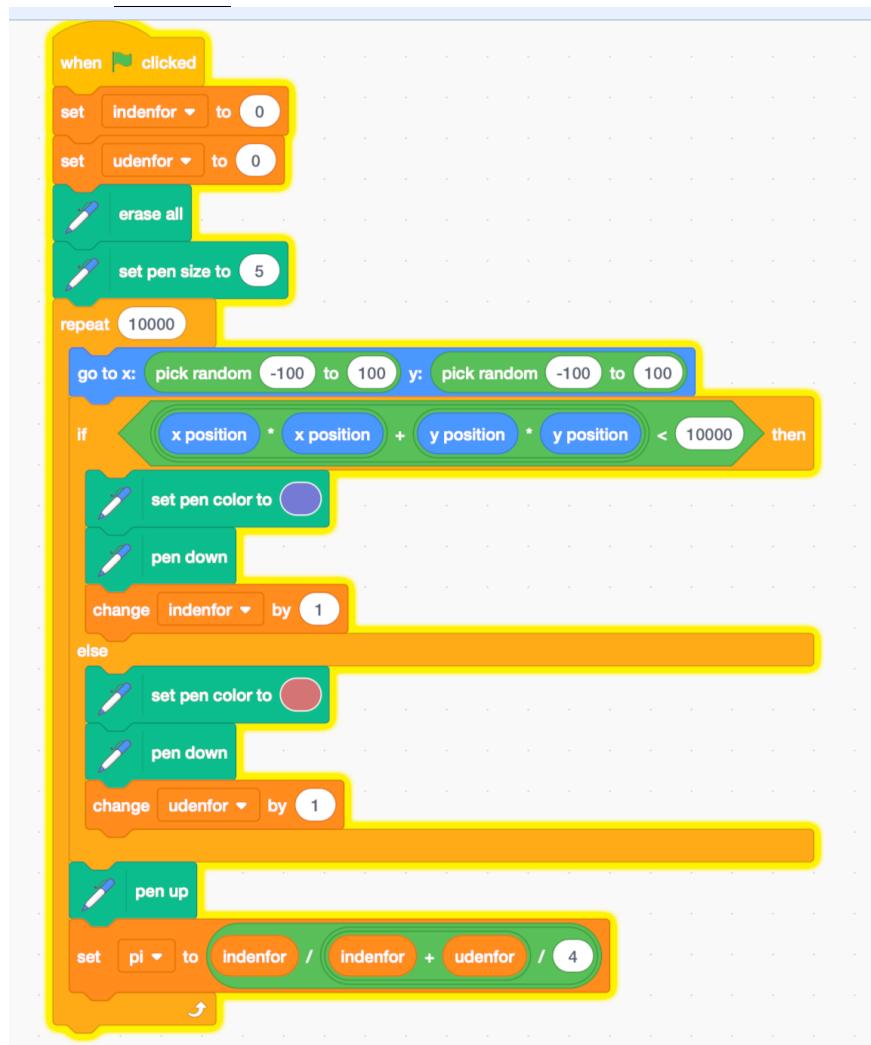
Dyb integration med programmering og CT

Matematik som digitale byggesten

Skjult matematik og teknokritisk matematikundervisning



Dyb integration



Matematik som digitale byggesten

- CT tilbyder en meget konstruktiv og direkte måde at anvende matematik på



Anna (elev)
Hvem vil med hjem og se film hos mig i aften

12 4

Karen (lærer)
Vi skal på udflugt fredag (til Zoo) – husk madpakke og drikkepunkt.
Der er en besked på intra til jeres forældre, men det er vigtigt i
kommer på skolen senest 8.15.

1

Tommy (elev)
jeg kan ikke finde min lommeregner, nogen der har set den?

1

Trine (lærer)
idræt aflyst de næste to uger. Der er håndværkere i salen.
Tag jeres grammatips med i stedet

1

Sigurd (elev)
Tjeck mine billeder fra Møns klint i sidste uge (der er både rav og
kridt og også nogen af klassen)

19 2

Berit (elev)
hvem vil være med til at lave et band og øve til juleafslutningen

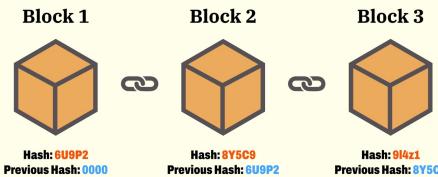
2

Mads (lærer)
ny kageliste til klassens time er på intra. Husk bedste kage kåres
til juleafslutningen.

12

Sebastian (elev)
Er der nogen der vil mødes og lave biologirapport efter skole i
næste uge

6 4



valutakurser

Valutaomregner

Skriv beløb	USD	↑
Skriv beløb	DKK	↓

Populære

Schweiziske franc	CHF	-0.3% ▼	752,42
Euro	EUR	-0.0% ▼	744,29
Britiske pund	GBP	-0.3% ▼	844,44
Norske kroner	NOK	0.1% ▲	67,94
Svenske kroner	SEK	-0.4% ▼	67,31
Amerikanske dollar	USD	0.2% ▲	701,10

Skjult matematik og teknokritisk matematikundervisning

Budskaber

- Undgå fælderne
- Dyb integration mellem CT og mat er vigtig men svær
- Reflekter over myter og kategoriseringer
- Tænk over hvad det vil sige at være matematisk
- Eksperimenter med nye muligheder og understøt elevernes eksperimenter

- Elicer & Tamborg (2022). Nature of the relations between programming and computational thinking and mathematics in Danish teaching resources.
- Knox, J. (2019). What does the ‘postdigital’ mean for education? Three critical perspectives on the digital, with implications for educational research and practice. *Postdigital Science and Education*, 1(2), 357-370.
- Misfeldt, M. (2022). *Matematik med mening* (Vol. 22). Aarhus Universitetsforlag.
- Trouche, L. (2005). An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. In: Guin, D., Ruthven, K., Trouche, L. (eds) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. Mathematics Education Library, vol 36. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_7
- Jankvist, U.T., Misfeldt, M. Old Frameworks—New Technologies. *Can. J. Sci. Math. Techn. Educ.* 21, 441–455 (2021). <https://doi.org/10.1007/s42330-021-00164-4>
- Jankvist, U., & Misfeldt, M. (2015). CAS-Induced Difficulties in Learning Mathematics? For the Learning of Mathematics, 35(1), 15-20.
- Jankvist, U.T., Misfeldt, M. & Aguilar, M.S. What happens when CAS procedures are objectified?—the case of “solve” and “desolve”. *Educ Stud Math* 101, 67–81 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09888-5>
- Møllegaard Iversen, S., Misfeldt, M., & Jankvist, U. T. (2018). Instrumental mediations and students' identities. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 38(2), 133–156. <https://revue-rdm.com/2018/instrumental-mediations-and-students-identities/>