Lineær programmering (version 23)

Birkerød Gymnasium

Indhold

Afsnit 0: Formålet med emnet

Formålet med dette projekt er at træne dine evner til at

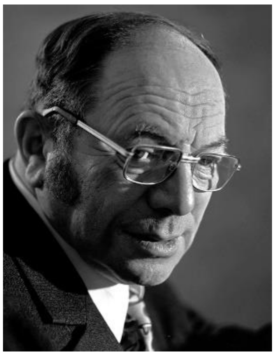
- Læse en tekst, trække den relevante information ud og give den en matematisk formulering
- Opstille en matematisk model og diskutere dens forudsætninger og rækkevidde
- Anvende den matematik du har lært på problemer fra "den virkelige verden".

Endelig må du godt få lidt forståelse for, at matematik er et fag som udvikler sig hele tiden, ofte i samspil med andre fag.

Afsnit 1: Introduktion og lidt historie

Lineær programmering er en matematisk metode, som har til formål at finde frem til den bedste udnyttelse af begrænsede ressourcer.
Det er et relativt nyt område af matematik, som først for alvor er kommet i gang efter fremkomsten af computere, men grundlaget for metoden blev udviklet nogle år inden i 30'ernes Sovjetunion, og, uafhængigt heraf, i USA under 2.verdenskrig.

I Sovjetunionen havde man under kommunismen "planøkonomi", hvor det i princippet var staten, som bestemte hvilke varer, der skulle produceres og hvorhenne. Derved opstod muligheden for at dele produktionen op på en måde så forskellige fabrikker tilsammen fremstillede mere end de kunne hver for sig.



Леони́д Канторо́вич

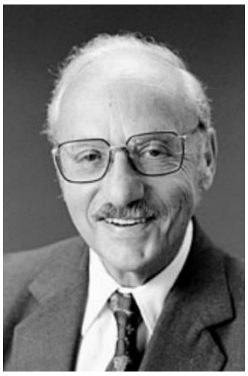
Ideen til lineær programmering i Sovjetunionen opstod i forbindelse med fremstilling af krydsfiner (*plywood*). Grundlæggeren af lineær programmering i Sovjetunionen, Leonid Kantorovich, fortæller historien således:

> The Thirties was also important for me as I began my first economics. The very starting point was rather accidental. In 1938, as professor of the university, I acted as a consultant for the Laboratory of the Plywood Trust in a very special extreme problem. Economically, it was a problem of distributing some initial raw materials in order to maximize equipment productivity under certain restrictions. Mathematically, it was a problem of maximizing a linear function on a convex polytope. The well-known general recommendation of calculus to compare the function values in the polytope vertices lost its force since the vertices number was enormous even in very simple problems.
>
> But this accidental problem turned out to be very typical. I found many different economic problems with the same mathematical form: work distribution for equipment, the best use of sowing area, rational material cutting, use of complex resources, distribution of transport flows.* This was reason enough to find an efficient method of solving the problem. The method was found under influence of ideas of functional analysis as I named the "method of resolving multipliers".

https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1975/kantorovich/biographical/

Som det fremgår af ovenstående citat, er optimeringen af en lineær funktion under givne begrænsninger et matematisk problem, som passer på mange forskellige områder; fordeling af produktion, transport af varer, dyrkning af afgrøder...

Kantorovich vidste, at løsningen på lineære programmeringsproblemer skal findes i det, vi senere vil kalde "hjørner af det tilladte område". Problemet er bare, at man ikke systematisk kan teste alle de forskellige hjørner fra en ende af – der er nemlig uoverkommeligt mange af dem. Kantorovich kom derfor ikke så meget længere – men han fik Nobelprisen i økonomi i 1972 for sit bidrag.



George Dantzig

I USA var det matematikere i det amerikanske luftvåben som under 2. verdenskrig arbejdede med at udnytte deres begrænsede ressourcer optimalt (Operations Research) i forbindelse med Stillehavskrigen, og det er herfra navnet "Lineær programmering" stammer. Amerikanerne fik løst problemet med at finde det bedste hjørne gennem George Dantzigs opfindelse af "Simplex-algoritmen" i 1948.

Simplex-algoritmen starter i et af de mange hjørner og bevæger sig derfra til det bedste blandt det begrænsede antal nabohjørner. Fra dette lidt bedre hjørne bevæger man sig derefter videre til det bedste af de nye nabohjørner – og sådan bliver man ved, indtil det ikke kan blive bedre.

Det er en metode, som er nem at algoritmisere og programmere, og som derfor egnede sig perfekt til de "nye elektronhjerner", som datidens regnemaskiner blev kaldt.
I dag er simplex-algoritmen og lineær programmering et af de mest anvendte matematiske værktøjer til løsning optimeringsproblemer i den virkelige verden, ligesom det er et område, der fortsat forskes i.

Prøv at se følgende artikler og videoer:

Opstilling af havvindmøller fra 2019:
https://www.dtu.dk/nyheder/nyhed?id=0C54F37B-8BCB-4917-8F28-993CC29F0776&utm_device=web&utm_source=RelatedNews&utm_campaign=Dynamo-Nemmere-at-forbinde-kabler-mellem-vindmoeller

Generel video om Operations Research / linear programming:
https://www.youtube.com/watch?v=sFWrmpXPVJw

Filen "Katz" indeholder mere information om historien.

Afsnit 2: Et problem i to dimensioner: Ralph's problem

Følgende opgave er hentet fra bogen ”*Introduction to Operations Research*”;

Ralph Edmund loves steaks and potatoes. Therefore, he has decided to go on a steady diet of only these two foods (plus some liquids and vitamin supplements) for all his meals. Ralph realizes that this isn't the healthiest diet, so he wants to make sure that he eats the right quantities of the two foods to satisfy some key nutritional requirements. He has obtained the following nutritional and cost information:

	Grams of ingredients per serving	Grams of ingredients per serving	Daily requirement
Ingredient	Steak	Potatoes	
Carbohydrates	5	15	≥ 50
Protein	20	5	≥ 40
Fat	15	2	≤ 60
Cost per serving	\$4	\$2	

Ralph wishes to determine the number of daily servings (may be fractional) of steak and potatoes that will meet these requirements at a minimum cost.

Opgave A

Hvis vi kalder antallet af bøffer for x og antallet af kartoffelportioner for y, kan problemet formuleres på følgende måde:

Minimér prisen $Z = 4x + 2y$,

givet betingelserne:

- $5x + 15y \geq 50$ *carbohydrat*
- $20x + 5y \geq 40$ *protein*
- $15x + 2y \leq 60$ *fedt*
- $x, y \geq 0$ *trivielle betingelser*

ikke-trivielle betingelser

Den funktion som skal optimeres (Z), kaldes ”objektfunktionen”, og værdier af (x, y) som opfylder betingelserne, kaldes ”tilladte løsninger”.

Ralph's problem er delt op i 8 nedenstående opgaver:

Opgave 0

a) Find en tilladt løsning (bare gæt!)
b) Find en ikke-tilladt løsning (bare gæt!)
c) Forsøg at finde den billigste løsning.

Opgave 1

Isoler y i hver af de tre ikke-trivielle betingelser – resultaterne angives med brøker, som <u>ikke</u> forkortes.

Opgave 2

Tænd nSpire og indtegn de tre ikke-trivielle betingelser i samme koordinatsystem. Da der også skal tages hensyn til de trivielle betingelse $x, y \geq 0$, skal du skal begrænse værdien af den uafhængige variable, så der ikke tegnes udenfor 1. kvadrant.

Hint: I *graflinje* ved indtegning af betingelsen for carbohydrat kan man skrive

$$f_1(x) = \frac{-5}{15}x + \frac{50}{15} \mid 0 \leq x \leq 10$$

eller

$$f_1(x) \geq \frac{-5}{15}x + \frac{50}{15} \mid 0 \leq x \leq 10$$

Den subtile forskel er, om der står ”=” eller ”≥” efter $f_1(x)$. Du kan prøve begge dele.

Når du har indtegnet alle 3 betingelser, kan du se ”det tilladte område” i 1. kvadrant.

En matematiker ville beskrive områdets facon som *konvekst*. Det betyder at lige meget hvilke to punkter man vælger i området, så vil den rette linje mellem de to punkter forløbe inde i området.

Opgave 3 (forstås nok bedst efter afsnittet med simplex-algoritmen – så spring over indtil da)
Hvor mange ”hjørner” kan du finde? (Der er både tilladte og ikke-tilladte hjørner).

Opgave 4
Isoler y i objektfunktionen og indtegn funktionens graf (stadig brøker og ingen forkortelse og i det samme koordinatsystem, som de tidligere grafer).

(Undervejs spørger nSpire, om du vil oprette ”En skyder” til Z. Det vil du gerne… Du skal indstille minimumværdien af skyderen til 0, maximumværdien til 20, og steplængden til 0,01.

Værdien af Z på skyderen svarer til hvor mange penge Ralph vil bruge.)

Opgave 5
Kan Ralph få dækket sine ernæringskrav for 5 $? ($Z = 5$),

Kan Ralph få dækket sine ernæringskrav for 15 $?

Find den kombination af bøffer og kartofler i det tilladte område som er billigst mulig, samt prisen for denne kombination.

Ved at løse opgave 1-5 har du nu fundet ud af, at det er betingelserne for carbohydrat og protein, som bestemmer den optimale løsning. De to betingelser kaldes *bindende.*

Opgave 6 – følsomhedsanalyse for kartoffelprisen
I denne opgave skal du undersøge, hvilke konsekvenser det får for Ralphs middagsmad, hvis prisen på kartofler ændrer sig.

Hvis prisen på kartofler stiger hhv. falder, hvor meget dyrere/billigere bliver det så for Ralph - og skal han ændre på menuens sammensætning af bøf og kartofler?

Start med at ændre kartoffelprisen ”2” i objektfunktionen til ”kp” (for ”kartoffelpris”). Indstil den nye skyders steplængde til 0,01.

a) Bestem sammensætningen og prisen af den optimale menu, hvis kartoffelprisen stiger fra 2 $ til 5 $.
b) Bestem hvor meget kartoffelprisen kan stige, før Ralph skal ændre sin menu.
c) Bestem tilsvarende hvor meget kartoffelprisen skal falde, før det bedst kan betale sig kun at spise kartofler.
d) Angiv hvor meget prisen på kartoffel kan stige hhv. falde, inden Ralph skal ændre sin menu.

Du har nu udført en *følsomhedsanalyse* af kartoffelprisen.

Opgave 7 – Begrebet ”skyggepris”
Hvis man nu er interesseret i at spare lidt penge, kunne man spørge sig selv, hvor meget man kan spare ved at file lidt på Ralphs ernærningskrav. Man kunne f.eks. slække lidt på fedtbetingelsen, så man tillod Ralph 61 gram fedt, men det ville ikke betyde noget, for fedt var jo ikke en bindende betingelse. De bindende betingelser er carbohydrat og protein. Så man kan undersøge hvor meget man kan spare ved at ændre på f.eks. carbohydratbetingelsen.

a) Sæt kartoffelskyderen tilbage på 2 $ og erstat kravet 50 i carbohydrat funktionen med 49. Find den optimale menu og prisen af denne kombination og beregn, hvor meget billigere menuen bliver ved at skifte fra 50 til 49.

Besparelsen kaldes ”skyggeprisen”, og er den udgift, man har per gram ved at opretholde ernæringsbetingelsen.

b) Find den tilsvarende skyggepris for protein.

Afsnit 3: Et problem til: Julestruds

Struds forsøger at flygte

Opgave B

Familien Hansen med de mange børn vil prøve noget nyt i år. Derfor har de købt en struds, som de skal spise til jul. Strudsen kan fodres med to forskellige slags korn kaldet kornsort A og kornsort B. For at få råd til julegaver til de mange børn har Hr. og Fru Hansen tænkt sig, at strudsen skal fordres så billigt som muligt, men dog så den får sine daglige ernæringskrav med hensyn til jern og kulhydrat opfyldt. Selvom det sikkert ville være godt for studsen, får den ikke øko-foder, men må leve med, at der er rester af stråforkorter i begge fodertyper. For at julemenuen ikke også skal få en bismag af stråforkorter, skal strudsens daglige indtag heraf holdes under 8 mg.

Kornsort A indeholder 6 mg jern per kilo og 40 g kulhydrat per kilo samt 2 mg forkorter. Prisen for kornsort A er 3 kr. per kilo.

Kornsort B indeholder 2 mg jern per kilo og 80 g kulhydrat per kilo men kun 1 mg forkorter. Prisen for kornsort B er 4 kr. per kilo.

Studsen skal have mindst 10 mg jern og 240 g kulhydrat om dagen.

a) Betegn mængden af kornsort A med x og mængden af kornsort B med y. Opstil uligheder som udtrykker strudsens ernæringskrav mht. jern, kulhydrat og stråforkorter, og opstil et udtryk for prisen z af foderblandingen.
b) Illustrer det tilladte område og find den billigste daglige foderblanding som opfylder strudsens ernæringskrav.
c) Bestem de bindende betingelser.
d) Find skyggepriserne for kulhydrat og stråforkorter (tip: svaret vedr. stråforkorter kræver ikke nogen yderligere udregninger).

Afsnit 4: Ralph og de fire forudsætninger

Vi vender tilbage til Ralph's måltid. Opgaven var:

Minimer objektfunktionen $z = 4x + 2y$

givet betingelserne	$5x + 15y \geq 50$	*karbohydratkravet*
	$20x + 5y \geq 40$	*proteinkravet*
	$15x + 2y \leq 60$	*fedtkravet*
	$x, y \geq 0$	

hvor x betegner antallet af bøf-portioner og y antallet af kartoffel-portioner.

Modellen for Ralph's måltid er noget forenklet. Der indgår kun to ingredienser: bøf og kartofler. Når det er gjort så enkelt, skyldes det vi ønsker en model med kun 2 variable – ellers kan I nemlig ikke løse den grafisk. En mere realistisk model – stadig for en person som kun vil vide af en type middag – ville være at inkludere sovs til kartoflerne og noget at drikke – i det her tilfælde formentlig en øl, da Ralph næppe er glad for mælk. Så har man straks 4 variable og i hvert fald én yderligere betingelse, nemlig en som vil gå på en begrænsning af alkoholindtagelsen. Derudover burde man også tilgodese Ralphs behov for vitaminer ved at stille en frugtsalat eller lignende på bordet. Så ville man for alvor få mange variable – de forskellige typer frugter – og endnu flere betingelser i form af behovene for de forskellige vitaminer.

Når man laver en model af "virkeligheden", er man nødt til at vælge hvilke faktorer/variable man vil tage med i sin idealiserede beskrivelse/model. I vores måltidseksempel er det altså endt med kun 2 variable. Derudover kan man være nødt til at foretage nogle matematiske antagelser, som gør det muligt at stille en model op, som er tilpas enkel matematisk set til at den kan behandles.

I Lineære Programmeringsmodeller er der i alt **fire antagelser**, som vi nu skal diskutere. De fire er: Proportionalitet, additivitet, divisibilitet og vished (engelsk: *certainty*).

Certainty

Certainty-antagelsen går simpelthen ud på, at de tal, der optræder i modellen, skal være til at stole på. Det burde selvfølgelig ikke være noget man er nødt til at antage!

Men når man alligevel er nødt til at understrege, at det er en antagelse, skyldes det, at man ofte ikke kender tallene præcist. I Ralphs tilfælde er det jo slet ikke sikkert, at alle bøffer indeholder lige præcis de angivne mængder kulhydrat, protein og fedt. Der skal nok være lidt variation, men man kan jo så antage/vedtage med sig selv, at man kan bruge gennemsnits tallene for forskellige typer og størrelser af bøffer.

Ligeledes er priserne på bøffer og kartofler måske nok kendte nu, men kan jo ændre sig med tiden.

Følsomhedsanalysen undersøger, hvad der sker hvis man ændrer på nogle af tallene og er derved en måde at råde bod på en evt. usikkerhed med hensyn til de indgående tals gyldighed.

Divisibilitet
I nogle modeller må beslutningsvariablene – her x og y – kun antage heltallige værdier; 0 1,2,3, osv. I andre modeller er det muligt at antage alle mulige værdier.

Divisibilitets-antagelsen i Lineær Programmering går på, at beslutningsvariablene kan antage alle mulige ikke-negative værdier. Antagelsen er i orden for Ralph, hvis han laver sin middag hjemme, hvor han selv kan bestemme portionernes størrelse, men går han på restaurant, gælder divisibilitets-antagelsen formentlig ikke (her kan man jo som regel ikke bestille brøkdele af portioner).

Additivitet
Formuleret i ord kræver antagelsen, at den samlede sum er summen af de enkelte bidrag, eller at de forskellige variable ikke må påvirke hinanden. Additiviteten skal gælde både for objektfunktionen Z og for venstresiderne af hver af betingelserne.

Det er helt rimeligt, at den samlede pris Ralph skal betale er summen af prisen for kartofler og prisen for bøffer. Men optager man protein lige godt fra fed mad som fra fedtfattig mad? I modellen her antager man, at 30 g protein optages i kroppen som 30 g protein – ligegyldigt om det ledsages af lidt eller meget fedt. Det kan være rigtigt eller det kan være forkert i virkeligheden, men i denne model antages det at være rigtigt.

Proportionalitet
Her antages det, at både objektfunktionen Z og venstresiden i betingelserne kan skrives som

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

Hvis man sætter alle de variable til 0 på nær én variabel – lad os sige at det er x_i – så skal Z være en lineær funktion af den sidste variable: $Z = ax_i$. Indtegnet i et koordinatsystem med en x_i- og en Z-akse skal det give en ret linje, som går gennem (0,0).

I tilfældet med Ralph betyder det blot, at jo flere bøffer han spiser, jo mere skal han betale. Det er en helt acceptabel antagelse, medmindre Ralph får mængderabat. Hvis han får mængderabat på de bøffer, han spiser udover de første 10, gælder antagelsen om linearitet altså kun til og med $x = 10$. Derefter vil konstanten a ændre sig, og det må den ikke. Det er en del af proportionalitets-antagelsen, at konstanten faktisk er konstant.

Proportionalitetsantagelsen i betingelserne kan også være ugyldig, fordi man opnår en mætning, således at bidraget fra den variable flader ud, selvom den variable stiger yderligere. Det kunne f.eks. være optagelsen af iod. Hvis man spiser en iod-tablet, bliver systemet fyldt op, og man opnår ikke at få dobbelt så meget iod, fordi man spiser to tabletter. Iodet fra den næste bliver slet ikke optaget.

Afsnit 5: Problemer med biler: Auto Assembly

Opgave C

(Modified problem from "Introduction to Linear Programming)

Automobile Alliance, a large automobile manufacturing company, organizes the vehicles it manufactures into three families: a family of trucks, a family of small cars, and a family of midsized and luxury cars.

One plant outside Detroit, MI, assembles two models from the family of midsized and luxury cars.

The first model, the Family Thrillseeker, is a four-door sedan with vinyl seats, plastic interior, standard features, and excellent gas mileage. It is marketed as a smart buy for middle-class families with tight budgets, and each Family Thrillseeker sold generates a modest profit of $3,600 for the company.

The second model, the Classy Cruiser, is a two-door luxury sedan with leather seats, wooden interior, custom features, and navigational capabilities. It is marketed as a privilege of affluence for upper-middle-class families, and each Classy Cruiser sold generates a healthy profit of $5,400 for the company.

Rachel Rosencrantz, the manager of the assembly plant, is currently deciding the production schedule for the next month. Specifically, she must decide how many Family Thrillseekers and how many Classy Cruisers to assemble in the plant to maximize profit for the company. She knows that the plant possesses a capacity of 48,000 labor-hours during the month. She also knows that is takes 6 labor-hours to assemble one Family Thrillseeker and 10.5 labor-hours to assemble one Classy Cruiser.

Because the plant is simply an assembly plant, the parts required to assemble the two models are not produced at the plant. They are instead shipped from other plants around the Michigan area to the assembly plant. For example, tires, steering wheels, windows, seats and doors all arrive from various supplier plants. For the next month, Rachel knows that she will be able to obtain only 20,000 doors (10,000 left-hand doors and 10,000 right-hand doors) from the door supplier.

A recent labor strike forced the shutdown of that particular supplier plant for several days, and that plant will not be able to meet its production schedule for the next month. Both the Family Thrillseeker and the Classy Cruiser use the same door part.

In addition, a recent company forecast of the monthly demands for different automobile models suggests that the demand for the Classy Cruiser is limited to 3,500 cars. There is no limit on the demand for the Family Thrillseeker within the capacity limits of the assembly plant.

Opgaver

Lad x betegne antallet af Family Thrillseekers og y antallet af Classy Cruisers. Betingelserne på timer, døre og marked er hhv. føste, anden og tredje betingelse.

1. Opstil en lineær programmeringsmodel og diskutér, om hver enkelt af de fire forudsætninger er opfyldt
2. Illustrer og løs det lineær programmeringsproblem grafisk
3. Udfør en følsomhedsanalyse på prisen af en Classy Cruiser

For at øge sin indtjening kan det være nødvendigt at investere nogle flere penge. Kan det bedst betale sig at investere i en annoncekampagne for at øge marked for Classy Cruiser modellen, eller kan det bedre betale sig at investere i nogle overarbejdstimer?

4. Bestem skyggeprisen for de betingelser, der vedrører arbejdstidsressourcen. Hvor meget mere vil man højst betale for en overarbejdstime?
5. Gennem annoncering vil kan markedets efterspørgsel efter Classy Cruiser øges. Hvilken betydning vil det have for den mulige indtjening?

Afsnit 6: Ralph og lineær programmering i Excel

Excel kan løse lineære programmeringsproblemer ved hjælp af simplex-algoritmen, som er en integreret del af Excel's tilføjelsesprogram "Problemløser".

PC version:
I første omgang skal du installere "Problemløser" på Excel:
1. Vælg filer/indstillinger/tilføjelsesprogrammer
2. Vælg Administrer Exceltilføjelsesproblemer i pull-down-menuen og Udfør
3. Sæt hak ved "Tilføjelsesprogrammet Problemløser" og OK
4. Problemløseren burde så være tilgængelig i fanen "Data". Men vent med at starte den.

Mac:

Youtube om installation af bla. tilføjelsesprogrammet solver på Mac.
https://www.youtube.com/watch?v=W1vhKTr5tAM

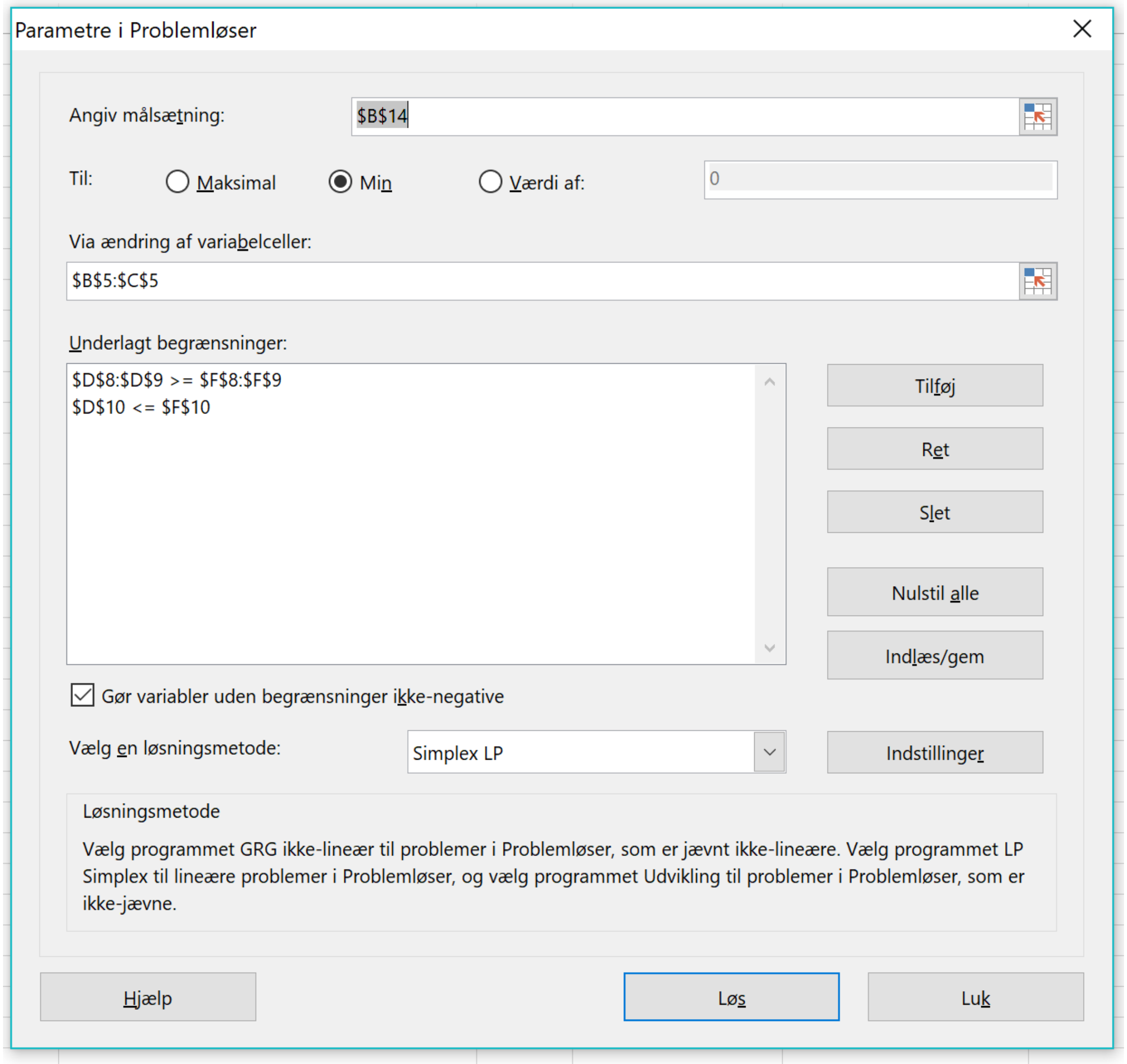
Opgave D: Ralph igen

For at løse Ralph-problemet skal du nu indtaste følgende i et Excel dokument:

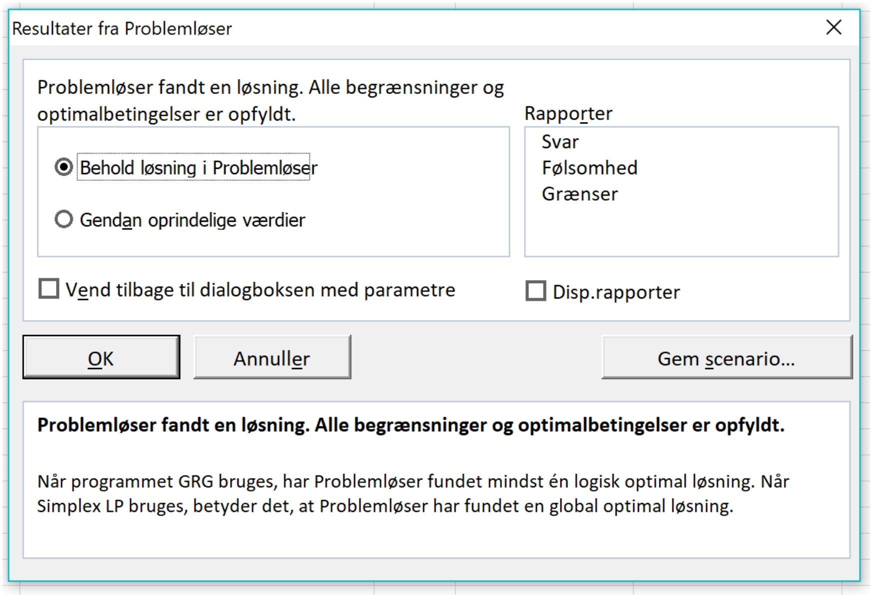
	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4		Steak	Potatoes			
5		1	1			
6						
7				amount		Daily requirement
8	Carbohydrates	5	15	=SUMPRODUKT(B$5:C$5;B8:C8)	>=	50
9	Protein	20	5	=SUMPRODUKT(B$5:C$5;B9:C9)	>=	40
10	Fat	15	2	=SUMPRODUKT(B$5:C$5;B10:C10)	<=	60
11						
12	Cost per serving	4	2			
13						
14	Cost	=SUMPRODUKT(B5:C5;B12:C12)				
15						

Opgave
Hvad gør kommandoen "Sumprodukt"?
Næste trin er at kalde (aktivere) Problemløseren i fanebladet "Data" og udfylde dialogboksen (der er et eksempel på en udfyldt dialogboks på næste side).

1. *Angiv målsætning*: det er den celle, vi vil have optimeret – her er det prisen på menuen som står i B14, så klik på cellen.
2. *Til: vælg "min",* idet vi ønsker cellens værdi minimeret.
3. *Via ændring i variabelceller:* overmal cellerne B5 til C5 – det er mængde af bøf og kartoffel vi skal finde.
4. *Underlagt begrænsninger:* Klik på tilføj og tilføj begrænsningerne, som du kan se i nedenstående dialogboks.
5. *Gør variabler uden begrænsninger ikke-negative:* Sæt flueben
6. *Vælg en løsningsmetode*: Vælg "Simplex LP".
7. *Løs.*



Resultatet af løsningen skulle gerne være at mængden af bøf og kartofler indstilles, så prisen bliver så lav som muligt, samt fremkomsten af en ny dialogboks:



Her skal du vælge "Svar", "Følsomhed".

I "Svarrapporten" kan du udover resultatet også se, at betingelserne fra protein og carbohydrat er udnyttet fuldt ud – dvs. de er bindende – mens der er 35 gram u-udnyttet fedt til rådighed. Fedt kravet er ikke-bindende og derfor ikke med til at bestemme løsningen.

I "Følsomhedsrapporten" kan du se, at kartoffelprisen kan øges med 10 eller mindskes med 1 uden at løsningen af problemet ændres. Og du kan se at skyggepriserne er 0.18 for protein, 0.07 for carbohydrat og 0 for fedt. Der er altså mest at spare ved at sænke behovet for protein, i det vi derved ville spare 0.18 $ per gram.

Opgave E: Joyce and Marvin's daycare

Opgave med mange variable.

fra Hillier og Lieberman "Introduction to Operations Research"
Opgavens oplysninger findes i forud indtastet fil.

3.4-20. Joyce and Marvin run a day care for preschoolers. They are trying to decide what to feed the children for lunches. They would like to keep their costs down, but also need to meet the nutritional requirements of the children. They have already decided to go with peanut butter and jelly sandwiches, and some combination of graham crackers, milk, and orange juice. The nutritional content of each food choice and its cost are given in the table below.

Food Item	Calories from Fat	Total Calories	Vitamin C (mg)	Protein (g)	Cost (¢)
Bread (1 slice)	10	70	0	3	5
Peanut butter (1 tbsp)	75	100	0	4	4
Strawberry jelly (1 tbsp)	0	50	3	0	7
Graham cracker (1 cracker)	20	60	0	1	8
Milk (1 cup)	70	150	2	8	15
Juice (1 cup)	0	100	120	1	35

The nutritional requirements are as follows. Each child should receive between 400 and 600 calories. No more than 30 percent of the total calories should come from fat. Each child should consume at least 60 milligrams (mg) of vitamin C and 12 grams (g) of protein. Furthermore, for practical reasons, each child needs exactly 2 slices of bread (to make the sandwich), at least twice as much peanut butter as jelly, and at least 1 cup of liquid (milk and/or juice).

Joyce and Marvin would like to select the food choices for each child which minimize cost while meeting the above requirements.

(a) Formulate a linear programming model for this problem.

C (b) Solve this model by the simplex method.

Hvilket ernæringskrav har den højeste skyggepris?

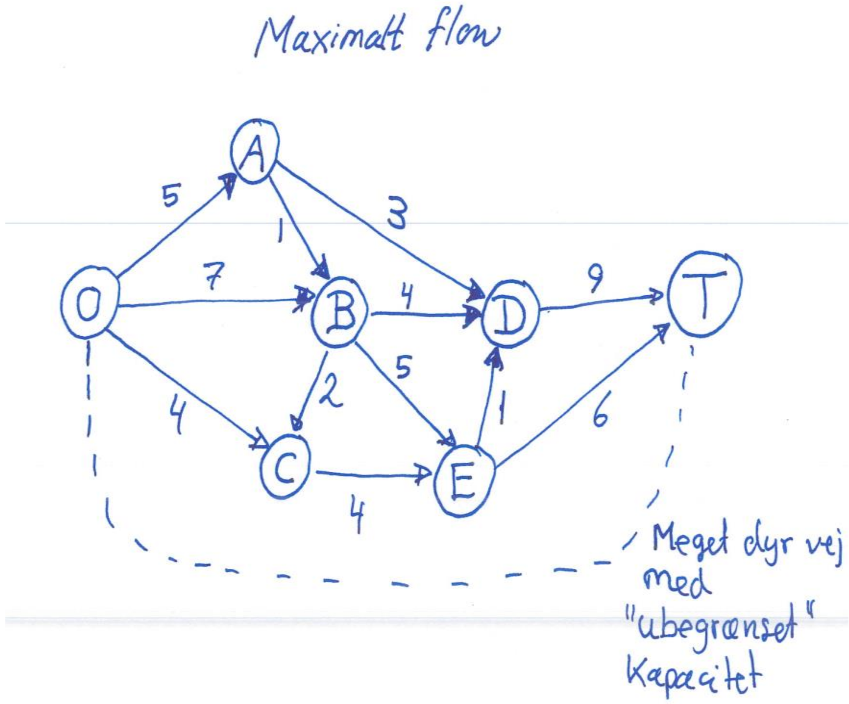
Det vil være det ernæringskrav, man så vil forsøge at reducere, hvis man som kommune vil spare flest penge.

Afsnit 7: Anvendelse af lineær programmering til maximalt flow i et netværk

Det har stor praktisk betydning at kunne analysere og optimere flow i *transportnetværk*; det kan være antallet af biler på et vejnet, eller det kan være containertrafik på skibe, eller fordeling af nødhjælp – hvad som helst, som skal transporteres ad kanaler med begrænset kapacitet. Det er vigtigt at kunne udnytte et givet netværk optimalt, men også at kunne se, hvor det bedst kan betale sig at sætte ind, hvis kapaciteten skal øges.

Et netværk repræsenteres af en samling af *knuder* og *kanter*. Hver kant har en øvre kapacitet og en orientering – svarende til, at kanten er ensrettet. Skal en ”vej” kunne benyttes i begge retninger, skal den repræsenteres med to kanter - en i hver sin retning.

Nedenstående graf viser et netværk med et udgangspunkt ”O” (kaldet ”kilden”) og et slutpunkt ”T” (kaldet ”drænet”). I første omgang skal man se bort fra den stiplede kant mellem kilden og drænet – den findes ikke i ”det rigtige netværk”, men er en virtuel vej, man tilføjer senere.



Til hver kant knyttes en variabel, eksempelvis x_{OA} til vejen mellem O og A, og vi kan se, at der må gælde, at $x_{OA} \leq 5$. Vi ønsker forsat at have ikke-negative variable, så $0 \leq x_{OA}$. Dette er samtidig årsagen til, at vejene skal være orienterede, og at veje som kan benyttes i begge retninger, skal repræsenteres af to modsatrettede kanter. Derudover antager man, at alt, som kommer til et knudepunkt, også sendes videre frem mod slutpunktet/drænet, hvilket giver anledning til følgende betingelse for knudepunktet A:

$$x_{OA} - x_{AB} - x_{AD} = 0$$

Og tilsvarende for de øvrige knudepunkter B, C, D, E.

For at optimere transporten gennem netværket foretager man nu et rimeligt elegant træk; man tilføjer en ikke-eksisterende vej direkte fra kilden til drænet, med en meget stor kapacitet, samtidig med at man forlanger, at der strømmer mere ud fra kilden end det rigtige netværk kan håndtere – derved bliver man nødt til at sende noget ad den kunstigt indlagte vej fra kilde til dræn.

For at udnytte det egentlige netværk så meget som muligt, knytter man nu priser til vejene, nemlig 0 kr./enhed ad de egentligt veje, og 1 kr./enhed af den virtuelle vej og kræver at den samlede pris skal være minimal – derved sørger man for, at den virtuelle og dyre vej bliver brugt så lidt som muligt, og de gratis så meget som muligt – derved strømmer der så meget gennem det egentlige netværk som muligt: maximalt flow opnået ved at minimere prisen!

Det optimale flow kan derfor findes som løsning til følgende lineære programmerings-problem:

Minimer prisen $z = x_{OT}$

$x_{OA} + x_{OB} + x_{OC} + x_{OT} = M$ Kilden

$-x_{DT} - x_{ET} - x_{OT} = -M$ Drænet

$-x_{OA} + x_{AB} + x_{AD} = 0$ For knude A (og tilsvarende for alle de andre knuder)

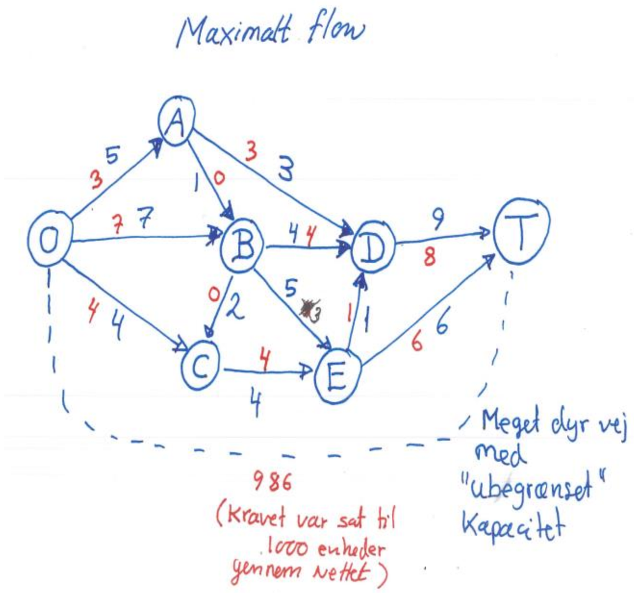
$x_{OA} \leq 5, \dots, x_{ET} \leq 6$ Kapacitetsbegrænsninger

Samt ikke-negative variable:

$x_{OA}, x_{OB}, \dots, x_{ET} \geq 0$ og M valgt tilpas stor.

Her ses det tilhørende regneark, med M sat til 1000 og løsningen, som er angivet med rødt:

M:	1000		F:	1000			
Edges	Values	Cost	Capacities	Nodes	Net flow		Demand
OT	986	1	uendelig	O	1000	=	1000
OA	3	0	5	A	0		0
OB	7	0	7	B	0		0
OC	4	0	4	C	0		0
AB	0	0	1	D	0		0
AD	3	0	3	E	0		0
BC	0	0	2	T	-1000		-1000
BD	4	0	4				
BE	3	0	5				
CE	4	0	4				
DT	8	0	9				
ED	1	0	1				
ET	6	0	6				
			Løsningen viser, at ud af de 1000 sendes 986				
Cost:	986		gennem overløbet OT, så der kan maksimalt sendes 14 gennem nettet.				



Der strømmer 14 enheder gennem netværket, og man kan se hvilke veje, der er udnyttet fuldt ud - og det vil være nemt at eksperimentere med kapacitetsudvidelser på baggrund af følsomhedsanalysen fra Excel.

Opgave F: Optimalt flow i netværk

Følgende tabel viser fragtkapaciteten for forbindelser mellem lufthavne. Tabellen viser, at der er en fragtkapacitet på 15 ton *fra* lufthavn B *til* lufthavn D.

Kapacitet	O	A	B	C	D	E	F	T
O		30	50	20				Ubegrænset
A			10		12			
B		10			15	20		
C						8	10	
D						15		25
E					15		10	40
F								40

Man kan forestille sig, at lufthavn O er nabo til et større UNICEF lager, hvorfra der skal distribueres nødhjælp til en lufthavn T som ligger i nærheden af et givent katastrofeområde.

Du skal tegne netværket (husk at tilføje den kunstige vej fra kilde til dræn) og opskrive det formelle matematiske lineære programmerings problem samt løse det i praksis ved hjælp af Excel.

Når du har fundet den optimale fordeling af nødhjælpstransporten, skal du analysere denne og give forslag til, hvor der skal sættes ind for at øge netværkets samlede kapacitet.

Afsnit 8: Simplex-algoritmen

Lineære Programmeringsproblemer med kun 2 beslutningsvariable kan tegnes og løses i et 2-dimensionelt koordinatsystem. Tilsvarende kan problemer med 3 variable anskueliggøres i et 3-dimensionelt koordinatsystem. Lineær Programmeringsmodeller med mere end 3 variable kan man til gengæld ikke løse ved at tegne, så her er der behov for andre metoder.

Den optimale løsning til et Lineært Programmeringsproblem ligger altid i et af hjørnerne af det tilladte område eller på linjestykket mellem et par lige gode hjørner. Så i princippet kan man bare finde alle hjørnepunkter, tjekke om de opfylder betingelserne, beregne værdien af objektfunktionen Z i hvert af dem og så vælge det bedste. I princippet lige ud af landevejen men i praksis helt umuligt på grund af et ofte overvældende antal hjørnepunkter. Hvis der er n beslutningsvariable og m betingelser udover standardkravet om ikke-negative værdier, er der $K(n+m,n)$ hjørner at undersøge. Med f.eks. 10 variable og 5 betingelser bliver det til 3003 hjørnepunkter. Koordinaterne til hvert hjørne skal beregnes ved at løse et ligningssystem med 5 ligninger og 5 ubekendte. Og for hvert hjørne skal man tjekke betingelserne og beregne værdien af Z. Bagefter skal man så finde den bedste værdi frem mellem alle de tilladte. Et stort arbejde! Med 40 variable og 12 betingelser (Kantarovich's krydsfiner problem) vokser antallet af hjørner til 5.586.853.480 som hver især tjekkes ved at løse l2 ligninger med 12 ubekendte. Et umuligt arbejde!

Dantzig opfandt i 1947 "Simplex" algoritmen som reducerer arbejdet så meget, at selv problemer med tusindvis af variable og betingelser kan behandles. Simplex algoritmen er en beskrivelse af hvilken rækkefølge man skal vælge hjørnerne, og hvordan man indser om man har fundet det bedste hjørne og kan stoppe. I princippet kan man altså komme ud for at skulle arbejde sig gennem alle hjørnerne - eller endnu værre; at metoden begynder at køre i ring - men det sker bare aldrig i praksis.

I det følgende illustreres metoden ved et eksempel med 2 variable og 3 betingelser. Man kan altså sagtens tegne sig til en løsning, men læg mærke til at det ikke betyder noget for Simplex algoritmen, at der kun er to beslutningsvariable.

Eksemplet: Opgave 3.1-5 fra "Introduction to Linear Programming"

Maximér $Z = 10x_1 + 20x_2$, givet betingelserne

(1) $-x_1 + 2x_2 \leq 15$
(2) $x_1 + x_2 \leq 12$
(3) $5x_1 + 3x_2 \leq 45$

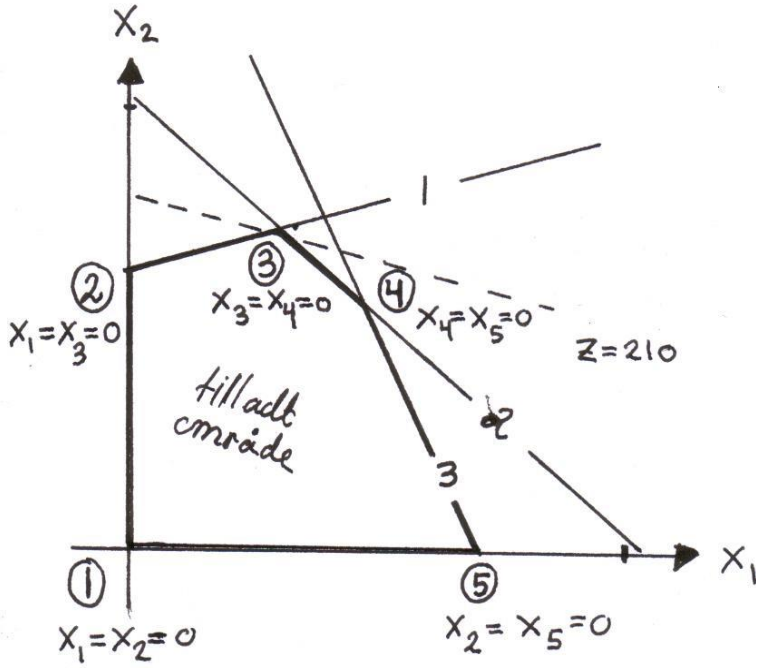
samt $x_1, x_2 \geq 0$.

Eksemplet indeholder 2 beslutningsvariable og 3 betingelser, hvilket giver 10 hjørner.

De hjørner, som ligger i det tilladte område, er nummereret fra 1 til 5. Derudover er der 5 hjørner, som ikke ligger i det tilladte område, f.eks. skæringen mellem linjerne fra betingelserne 1 og 3, eller mellem x_1-aksen og linjen fra betingelse 1 (ikke synligt på grafen).

Indtegnes linjen fra objektfunktionen ses det, at hjørnepunkt 3 (altså skæringen mellem betingelse 1 og 2) giver den optimale løsning. De er bindende.

Løsningen findes ved at løse ligningssystemet: $-x_1 + 2x_2 = 15$ og $x_1 + x_2 = 12$ og indsætte løsningen i udtrykket for Z. Endnu nemmere bliver det, hvis man tilføjer udtrykket for Z som endnu en ligning – så får man nemlig bestemt x_1, x_2 og Z på én gang. Ligningen for Z omskrives for syns skyld, så de variable optræder på venstre side af ligningen og konstanten på højre side ligesom de to andre ligninger.



Prøv selv at løse ligningssystemet (med solve i Nspire):

$$Z - 10x_1 - 20x_2 = 0 \text{ og}$$
$$-x_1 + 2x_2 = 15 \text{ og}$$
$$x_1 + x_2 = 12 \text{ og}$$

(Svar: $x_1 = 3$ og $x_2 = 9$ og $Z = 210$).

Indsættes $x_1 = 3$ og $x_2 = 9$ i betingelserne, fås

(1) $15 \leq 15$,
(2) $12 \leq 12$ og
(3) $42 \leq 45$,

så 1 og 2 udnyttes helt (hjørnet var jo skæringspunktet mellem 1 og 2), mens der er 3 til rest i den sidste betingelse.

Løsning med Simplex algoritmen

Trin 1 (Opsætning af ligningssystem)

Objektfunktionen inddrages som ligning og ulighederne omdannes til ligninger ved at tilføje restvariable x_3, x_4 og x_5 (!!! – det er snedigt):

$$\begin{array}{llcccccccccccc}
(0) & Z & - & 10x_1 & - & 20x_2 & & & & & & & = & 0 \\
(1) & & & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 15 \\
(2) & & & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\
(3) & & & 5x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & x_5 & = & 45
\end{array}$$

Vi har nu 4 ligninger med 6 ubekendte $(Z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, med det krav at $x_1, \ldots, x_5 \geq 0$.

Trin 2 (Valg af begyndelsespunkt for algoritmen)

Nu vælges et hjørnepunkt i det tilladte område, og Z beregnes i punktet. I dette tilfælde indgår hjørnet $(x_1, x_2) = (0,0)$. Hvis man sætter tal ind for to af de variable i ligningssystemet, er der kun 4 ubekendte tilbage i de 4 ligninger. I dette tilfælde, hvor $x_1 = x_2 = 0$, kan løsningen umiddelbart aflæses:

$$(Z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,0,15,12,45)$$

Trin 3 (Udvælgelse af variabel som skal øges)

Af ligning (0) kan man se at værdien af Z øges, hvis enten x_1 eller x_2 øges, hvis ligningen stadig skal være opfyldt. Spørgsmålet er om man skal vælge at x_1 eller x_2? Af koefficienten til x_1 kan man se at Z øges med 10 hver gang x_1 øges med 1 mens x_2

holdes konstant. Omvendt vil Z øges med 20 hver gang $x_2$øges med 1 medens x_1 holdes konstant. Simplex algoritmen bestemmer derfor at den variabel med den største negative koefficient skal øges. I dette tilfælde skal vi altså øge x_2.

Trin 4 (Bestemmelse af nyt hjørnepunkt og beregning af Z)

I dette trin bestemmes det, hvor meget den udvalgte variable kan stige og stadig give punkter inden for det tilladte område.

Ligning (1) viser, at x_3 bliver negativ hvis x_2 bliver større end 7,5: $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$, hvilket giver

$$x_3 = 15 - 2x_2. \text{ idet } x_1 = 0..$$

Ligning (2) viser at x_2 kan stige til 12 før x_4 bliver negativ, og ligning (3) viser at x_2 kan stige til 15 før x_4 bliver negativ.

Den mindste af de tre mulige stigninger er derfor det maksimale man kan øge x_2 og stadig blive i det tilladte område. Hvis x_2 øges maksimalt – så Z stiger så meget som muligt – falder x_3 samtidig til 0. Det svarer til, at vi bevæger os fra hjørne 1 til hjørne 2 på figuren over det tilladte område. Hver gang man går fra et hjørne til et nabohjørne øges en af de variable fra 0 og en anden variabel falder til 0. I dette tilfælde skal vi altså gå fra hjørnet bestemt af $(x_1, x_2) = (0{,}0)$ til hjørnet bestemt af $(x_1, x_3) = (0{,}0)$.

På figuren kan du se hvilke hjørner man får ved at sætte de forskellige variable til 0.

Beregningen af Z fås ved at løse ligningssystemet fra før, men nu med $x_1 = x_3 = 0$.

Ligningssystemet løses ved en variation af lige store koefficienters metode som kaldes "Gauss-Jordan elimination". Man sørger blot for at alle koefficienter til x_2 forsvinder på nær i ligning (1), som var den der bestemte værdien af x_2.

De følgende udregninger kommer til at se besværlige ud – men de er faktisk "trivielle" – og når de bliver lavet af en computer, kan man jo være ligeglad, men man er stadig nødt til at forstå metoden!

Først skaffes et 1-tal som koefficient til x_2 i ligning (1) ved at dividerer men den nuværende koefficient 2:

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
(0) & Z & - & 10x_1 & - & 20x_2 & & & & & & = & 0 \\
(1) & & & -0{,}5x_1 & + & 1x_2 & + & 0{,}5x_3 & & & & = & 7{,}5 \\
(2) & & & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & = & 12 \\
(3) & & & 5x_1 & + & 3x_2 & & & & & + \; x_5 & = & 45
\end{array}$$

Dernæst lægges 20 gang ligning (1) til ligning (0):

$$\begin{array}{llrcrcrcrcr}
(0) & Z & - & 20x_1 & & & + & 10x_3 & = & 150 \\
(1) & & & -0{,}5x_1 & + & 1x_2 & + & 0{,}5x_3 & = & 7{,}5
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
(2) & x_1 & + & x_2 & & + \; x_4 & & = 12 \\
(3) & 5x_1 & + & 3x_2 & & & + \; x_5 & = 45
\end{array}
$$

Ligning (1) trækkes fra ligning (2):

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
(0) & Z - & 20x_1 & & & + \; 10x_3 & & & = 150 \\
(1) & & -0{,}5x_1 & + & 1x_2 & + \; 0{,}5x_3 & & & = 7{,}5 \\
(2) & & 1{,}5x_1 & + & & - \; 0{,}5x_3 & + \; x_4 & & = 4{,}5 \\
(3) & & 5x_1 & + & 3x_2 & & & + \; x_5 & = 45
\end{array}
$$

Og endelig trækkes 3 gange ligning (1) fra ligning (3):

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
(0) & Z - & 20x_1 & & & + \; 10x_3 & & & = 150 \\
(1) & & -0{,}5x_1 & + & 1x_2 & + \; 0{,}5x_3 & & & = 7{,}5 \\
(2) & & 1{,}5x_1 & + & & - \; 0{,}5x_3 & + \; x_4 & & = 4{,}5 \\
(3) & & 6{,}5x_1 & + & & - \; 1{,}5x_3 & & + \; x_5 & = 22{,}5
\end{array}
$$

Løsningen kan nu umiddelbart aflæses:

$$(Z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (150\,,0\,,7.5\,,0, 4.5\,,22.5)$$

Simplex algoritmen er i trin 3+4 gået fra et punkt til et bedre ved først at finde den variable i ligningen til bestemmelse af Z med størst negativ koefficient. Dernæst ved at finde hvor meget den nye variabel kan øges og samtidig bestemme hvilken variabel der nu bliver 0. Endelig har den bestemt koordinaterne til det nye punkt og tilhørende værdi af Z. Disse trin ville også virke selvom der var flere variable og flere betingelser. Løsningsmetoden kaldes også **Gauss-Jordan elimination** og man snakker om **række-operationer**, når en ligning ganges med et tal, og evt. lægges til en anden ligning.

Herfra gentages trin 3 og 4 blot indtil Z ikke kan øges yderligere.

Trin 3 – igen

Den sidste version af ligning (0) viser at x_1 skal øges da den har den største (eneste) negative koefficient. Hvis man øger x_3 vil det derimod formindske Z.

Ligningerne (1), (2) og (3) tillader en øgning af x_1 til henholdsvis ∞, 3, 3.46. Så øgningen bliver på 3, og den nye variable som sættes til 0 bliver x_4. Så Simplex algoritmen går mod punkt 3 på figuren.

Trin 4 – igen

Den sidste udgave af ligningssystemet løses igen, men denne gang med $x_3 = x_4 = 0$. Den variable x_1 elimineres fra alle ligningerne på nær ligning (2) som bestemte hvor meget den kunne øges.

Resultatet bliver:

$$
\begin{array}{llcccccccccc}
(0) & Z & & & & + & \frac{10}{3}x_3 & + & \frac{40}{3}x_4 & & = & 210 \\
(1) & & & + & 1x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & & \frac{1}{3}x_4 & & = & 9 \\
(2) & & 1x_1 & + & & - & \frac{1}{3}x_3 & + & \frac{2}{3}x_4 & & = & 3 \\
(3) & & & + & & + & \frac{2}{3}x_3 & - & \frac{13}{3}x_4 & + \; x_5 & = & 3
\end{array}
$$

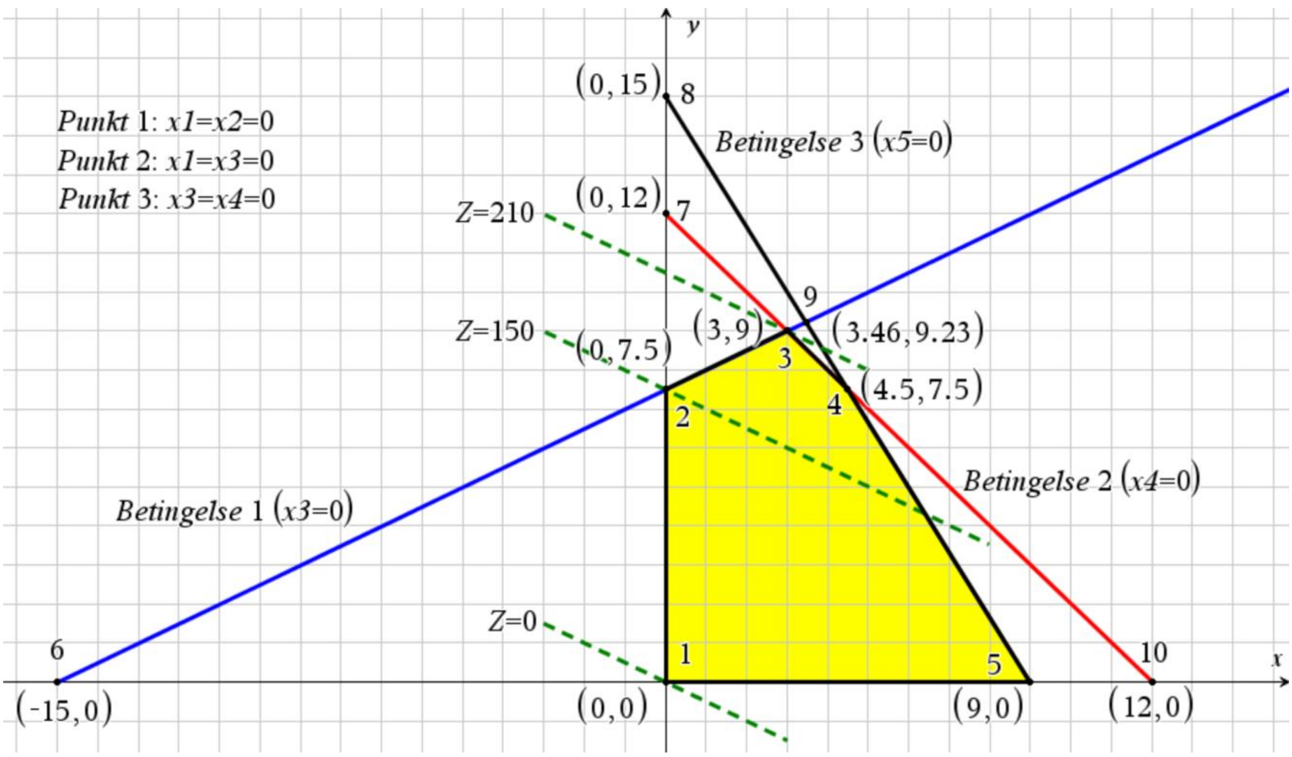
Og med $x_3 = x_4 = 0$ ses løsningen at

$$(Z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (210\,, 3\,, 9\,, 0, 0\,, 3)$$

Terminering

Trin 3 kan ikke gentages, i det der ikke er flere variable med negative koefficienter i ligning (0) som bestemmer Z. Det betyder at Z ikke kan øges yderligere og algoritmen slutter. Efter kun at have været igennem 3 hjørnepunkter i stedet for alle 10.

Løsningen viser at den optimale løsning giver $Z = 210$ og den findes for $(x_1, x_3) = (3{,}9)$. Yderligere ses at betingelse (1) og (2) er bindende, idet der ikke er noget til rest, og at der er $x_5 = 3$ til rest i betingelse (3).



Figuren viser det tilladte område i gult afgrænset af betingelserne 1,2,3 (svarende til hhv. $x_3, x_4, x_5 = 0$) og de to trivielle $x_1, x_2 \geq 0$. Hjørnerne 1-5 tilhører det tilladte område mens hjønerne 6-10 falder udenfor området. Niveaulinjer for objektfunktioner er tegnet stiplet, og man ser at punkt 3 er den optimale løsning. Simplex algoritmen starter i punkt 1 ($x_1 = x_2 = 0$) og finder derefter frem til punkt 2 ($x_1 = x_3 = 0$) og slutter i punkt 3 ($x_3 = x_4 = 0$).

Afsnit 9: Matricer og Lineær Programmering

Dette afsnit er tilføjet af hensyn til dem af jer som har erfaring med matricer, og kan springes over, hvis man ikke kender til matricer.

Matricer er et meget oplagt værktøj i forbindelse med Lineær Progrogrammering, og i dette afsnit vil det blive vist, hvordan et lineært programmeringsproblem kan formuleres og løses ved hjælp af matrixregning.
Undervejs vil du få introduceret begrebet ”blokmatricer”, og du vil se, at rækkeoperationer kan udtrykkes vha. matrixmultiplikation.
Vi vil også finde en fælles form af de ligningssystemer som opstår undervejs i simplex algoritmen, og endelig vil vi finde værdien af objektfunktion z som funktion af begrænsningerne b_i, hvilket igen leder til et generelt udtryk for skyggepriserne.

Vi vil behandle det samme maximeringsproblem som i forrige afsnit om simplex algoritmen og generalisere ud af dette eksempel.

Lineært programeringsproblem formuleret vha. matricer.

Det problem som vi introducerede simplex algoritmen gennem var:

Maximér $Z = 10x_1 + 20x_2$, givet betingelserne

(1) $-x_1 + 2x_2 \leq 15$
(2) $x_1 + x_2 \leq 12$
(3) $5x_1 + 3x_2 \leq 45$

samt $x_1, x_2 \geq 0$.

Det samme problem kan gives følgende formulering;

Maximér $Z = \begin{bmatrix} 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, givet betingelserne

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Samt $x_1, x_2 \geq 0$

Helt tilsvarende ville et generelt lineært programmeringsproblem med n variable og m betingelser:

$$Maximer\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

givet betingelserne

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

samt

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$$

kunne udtrykkes kort ved hjælp af matricer:

$$Maximer\ Z = \boldsymbol{cx}$$

givet betingelserne

$$\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$$

samt

$$\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$$

hvor $\boldsymbol{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \ldots \ c_n]$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Trin 1: Omforming af ulighederne til ligninger

Inden simplex algoritmen kan starte, skal ulighederne erstattes af ligninger gennem tilføjelse af restvariable og objektfunktionen inddrages som en ligning. Uden matricer så det sådan ud:

Trin 1
Objektfunktionen inddrages som ligning, og ulighederne omdannes til ligninger ved at tilføje restvariable x_3, x_4 og x_5:

$$\begin{array}{llllllll} (0) & Z - 10x_1 & - 20x_2 & & & & = & 0 \\ (1) & \quad -x_1 & + 2x_2 & + x_3 & & & = & 15 \\ (2) & \quad x_1 & + x_2 & & + x_4 & & = & 12 \\ (3) & \quad 5x_1 & + 3x_2 & & & + x_5 & = & 45 \end{array}$$

hvilket svarer til:

$$\begin{bmatrix} 1 & -10 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 12 \\ 45 \end{bmatrix}$$

som i sin generelle form skrives som:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

hvor bogstaver skrevet i bold face dækker over matricer. I eksemplet er

$$\boldsymbol{c} = [10 \quad 20],\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x_s} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Matricer som $\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_s} \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$, der er bygget op af andre matricer, kaldes for *"blokmatricer"*.

Trin 2 (Valg af begyndelsespunkt for algoritmen)

Vores eksempel er på standardform, og det betyder, at origo $(x_1, x_2) = (0{,}0)$ kan benyttes som startpunkt for simplex algoritmen. Indsættes disse værdier for x_1, x_2 kan de øvrige variable bestemmes til: $\begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 12 \\ 45 \end{bmatrix}$

Trin 3 (Udvælgelse af variable som skal øges) og Trin 4 (Bestemmelse af nyt hjørnepunkt og beregning af Z) – ved første gennemløb af algoritmen.

Algoritmen er selvfølgelig den sammen, hvad enten den formuleres ved hjælp af matricer eller ej.
I trinen 3 og 4 udvælges hvilken variable, som skal øges fra 0, og hvilken variable der i stedet bliver 0. Når dette bytte er sket skal værdien af de øvrige variable bestemmes.

Vi ved fra forrige kapitel, at byttet i første gennemløb af algoritmen er mellem x_2 og x_3 således, at vi går fra hjørnet bestemt af $x_1 = x_2 = 0$ til hjørnet bestemt af $x_1 = x_3 = 0$.

At det er x_3 som bliver 0, skyldes at forholdet mellem b-værdierne og koefficienterne i søjlen hørende til x_2 er mindst i den række hvor x_3 indgår.

Det næste der skal ske, er at vi skal bestemme værdien af de tilbageværende 4 variable i ligningssystemet, givet $x_1 = x_3 = 0$.

Det vil vi gøre på to forskellige måder: først ved hjælp rækkeoperationer udført som matrixmultiplikation, og derefter ved hjælp af den inverse matrix.

Løsning af ligningssystemet ved hjælp af rækkeoperationer

Givet $x_1 = x_3 = 0$ skal vi have fundet værdien af de øvrige variable i ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & -10 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 12 \\ 45 \end{bmatrix}$$

De søjler, der er farvet gule, er uden betydning for ligningssystemet, da de variable som der ganges med, har værdien 0. For at få matricen på en form, hvor der er 1-taller i diagonalen ud for alle de variable, som ikke er sat til 0, er det nødvendigt, at gøre noget ved 3.søjle som indeholder koefficienterne til variablen x_2.

Af hensyn til pladsen beskrives ligningssystemet nu ved sin total matrix:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -10 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 45 \end{bmatrix}$$

Rækkeoperationer kan udtrykkes ved multiplikation med matricer.
Her følger en matrix beskrivelse af rækkeoperationerne fra 1.iteration (matricerne skal ganges på fra venstre efter tur);

1. Række 2 ganges med 1/2; $R1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Opgave: definer T i dit CAS program og beregn $R1 \cdot T$

2. 20 gange række 2 lægges til række 1; $R2 = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (beregn $R2 \cdot R1 \cdot T$)

3. -1 gange række 2 lægges til række 3; $R3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(**beregn** $R3 \cdot R2 \cdot R1 \cdot T$)

4. -3 gange række 2 lægges til række 4; $R4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (**beregn** $R4 \cdot R3 \cdot R2 \cdot R1 \cdot T$)

Samlet ses fås:

$$(R4 \cdot R3 \cdot R2 \cdot R1) \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & -20 & 0 & 10 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 15/2 \\ 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 13/2 & 0 & -3/2 & 0 & 1 & 45/2 \end{bmatrix}$$

Vi genser resultatet fra kapitel 8 af 1.iteration:

$$\begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ 7.5 \\ 0 \\ 4.5 \\ 22.5 \end{bmatrix}$$

Den samlede effekt af rækkeoperationerne på totalmatricen er givet ved produktet

$$R4 \cdot R3 \cdot R2 \cdot R1 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I stedet for at oprette en totalmatrix kunne man også have udført rækkeoperationerne direkte på matrixligningen, med det samlede resultat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -10 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 12 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -20 & 0 & 10 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0\\ 0 & 13/2 & 0 & -3/2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}150\\ 15/2\\ 9/2\\ 45/2\end{bmatrix}$$

Løsning af ligningssystemet ved hjælp af invers matrix

I første omgang bestemmes koordinaterne til det nye hjørnepunkt og bestemmelsen af Z udskydes. Derved bliver det oprindelige ligningssystem

$$\begin{bmatrix}1 & -10 & -20 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 15\\ 12\\ 45\end{bmatrix} \text{ med den generelle form: } \begin{bmatrix}1 & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z\\ \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x_s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$$

reduceret til

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ x_2\\ 0\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\ 12\\ 45\end{bmatrix} \text{ med generel form } [\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{E}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x_s}\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}$$

Da 1. og 3. søjle ganges med 0 bidrager de ikke til ligningssystemet, og de kan slettes:

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\ 12\\ 45\end{bmatrix} \text{ generel form } \boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B}=\boldsymbol{b}$$

Man kan sige, at ligningssystemet er dannet ved at slette de variable som er sat til 0 fra søjlen $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x_s}\end{bmatrix}$ og fjerne de tilhørende koefficient søjler fra $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{E}]$. Matricen $\boldsymbol{B}$ består dermed af de søjler, som indeholder koefficienterne til de variable, som ikke er sat til 0. Tilsvarende består $\boldsymbol{x_B}$ af de variable som ikke er sat til 0.

Ganges nu fra venste med den inverse matrice (som vi antager findes) fås:

$$\begin{bmatrix}x_2\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}15\\ 12\\ 45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{-1}{2} & 1 & 0\\ \frac{-3}{2} & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15\\ 12\\ 45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.5\\ 4.5\\ 22.5\end{bmatrix} \text{ med den generelle form } \boldsymbol{x_B}=\boldsymbol{B^{-1}b}$$

Værdien for Z kan nu bestemmes alene udfra værdierne af x_2, x_4, x_5 og deres koefficienter i udtrykket for Z (da de øvrige variable er 0);

$$Z=[20 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}7.5\\ 4.5\\ 22.5\end{bmatrix}=150 \text{ generel form } Z=\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{x_B}=\boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B^{-1}b}$$

hvor $\boldsymbol{c_B}$ altså indeholder koefficienterne til $\boldsymbol{x_B}$ i udtrykket for Z.

Bemærkning:
Sammenlignes matricen, som repræsenterer de samlede rækkeoperationer

$R4 \cdot R3 \cdot R2 \cdot R1 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, med den inverse matrix til B; $\boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ses det, at $\boldsymbol{B^{-1}}$ udgør en blok i den første af de to.

Ligningssystemet i et vilkårligt hjørnepunkt

Vi har tidligere set, at det lineære programmeringsproblem efter indførelsen af restvariable, kan opskrives som følgende ligningssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Vi har set i eksemplet at hjørnepunkterne er karakteriseret ved, at 2 af de 5 variable er 0. (I et generelt problem med *n* variable og m betingelser, er hjørnepunkter karakteriseret ved at *n* ud af de *n+m* variable er 0).

Simplex algoritmen giver en beskrivelse af i hvilken rækkefølge hjørnepunkterne skal findes.

Når først algoritmen har angivet hvilket hjørnepunkt, som skal undersøges gennem valget af variable, der skal øges fra 0, og hvilken der skal sættes til 0, handler det blot om at bestemme de øvrige variable i det givne hjørnepunkt.

Det er derfor muligt at give et fælles udtryk for alle de ligningssystemer man møder udvejs i udførelsen af algoritmen på vej mod den optimale løsning.

Dette udtryk vil vi nu udlede. For at udlede dette udtryk, skal der først defineres nogle matricer.

Antag at vi er nået til et givet hjørnepunket, og det er bestemt hvilke variable der skal være 0. Disse variable slettes fra $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_s} \end{bmatrix}$ og den resulterende matrix benævnes $\boldsymbol{x_B}$. Matricen $\boldsymbol{B}$ dannes ved at fjerne de tilhørende søjler fra $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{E}]$. Endelig dannes $\boldsymbol{c_B}$, der er en *1xm* matrix, som indeholder koefficienterne i udtrykket for *Z,* til de variable der ikke er 0.

I vores eksempel $Z = 10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$. På dette trin i udførelsen af algoritmen er $x_1 = x_3 = 0$, så det er koefficenterne til x_2, x_4, x_5 som indgår i $\boldsymbol{c_B}$:

$$\boldsymbol{c_B} = [20 \quad 0 \quad 0]$$

De nye matricer udnyttes til at danne følgende blokmatrix $\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B B^{-1}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B^{-1}} \end{bmatrix}$.

Med eksemplets tal indsat fås $\boldsymbol{c_B B^{-1}} = [20 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} = [10 \quad 0 \quad 0]$, og dermed genkender vi $\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B B^{-1}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B^{-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, som den matrice der udtrykte den samlede effekt af rækkeoperationerne.

Har vi bestemt, hvilke variable der er 0 – og dermed fastlagt $\boldsymbol{c_B}$, $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{x_B}$ - kan vi derfor løse symbolsk for de øvrige variable, ved at gange $\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B B^{-1}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B^{-1}} \end{bmatrix}$ ind på ligningssystemet

$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ som udtrykker det lineærprogrammeringsproblem.

Vi går i gang:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B B^{-1}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B B^{-1}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Som kan beregnes til (prøv at tjekke om dimensionerne af matricerne passer sammen!)

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{-c + c_B B^{-1} A} & \boldsymbol{c_B B^{-1} E} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B^{-1} A} & \boldsymbol{B^{-1} E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_B B^{-1} b} \\ \boldsymbol{B^{-1} b} \end{bmatrix}$$

Hvis man tager højde for at multiplikation med enhedsmatricen $\boldsymbol{E}$ ikke ændre noget kan vi skrive ligningssystemet som

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B B^{-1} A - c} & \boldsymbol{c_B B^{-1}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B^{-1} A} & \boldsymbol{B^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_B B^{-1} b} \\ \boldsymbol{B^{-1} b} \end{bmatrix}$$

Denne overordnede form er fælles for alle hjørnepunkterne i udførelsen af simplex algoritmen. De konkrete matricer $\boldsymbol{B^{-1}}$ og $\boldsymbol{c_B}$ vil afhænge af hvilke variable som er sat til 0, mens matricerne $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$ er de oprindelige matricer, som beskriver det lineære programmeringsproblem.

Eksempel på anvendelse af det generelle udtryk

I eksemplet starter simplex algoritmen i punktet (0,0) og de variable har værdierne:

$$\begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 12 \\ 45 \end{bmatrix}$$

I næste trin øges x_2 fra 0 og x_3 bliver 0, så vi går fra hjørnepunktet bestemt af $(x_1, x_2) = (0,0)$ til hjørnepunktet bestemt af $(x_1, x_3) = (0,0)$, og vi fandt foroven, at værdien af de variable blev:

$$\begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ 7.5 \\ 0 \\ 4.5 \\ 22.5 \end{bmatrix}$$

I næste trin blev det i kapitel 8 vist, at $x_1$øges fra 0 og x_4 derved bliver 0. Det nye hjørnepunkt er så bestemt af $x_3 = x_4 = 0$.

Nu prøver vi formlen for den nye fælles form af ligningssystemet:

Vi danner den nye $\boldsymbol{B}$ matrix ud fra $[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{E}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ved at fjerne 3. og 4. søjle; $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ og gennem et CAS program bestemmes

$$\boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-13}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Udtrykket for objektfunktion er $Z = 10x_1 + 20x_2 = 10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$. Matricen som indeholder koefficienterne til de variable som ikke er sat til 0 bliver så

$$\boldsymbol{c_B} = [10 \quad 20 \quad 0]$$

Derefter er det blot at beregne de enkelte blokke:

$$\boldsymbol{c_B B^{-1} A - c} = [10 \quad 20 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-13}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - [10 \quad 20] = [0 \quad 0]$$

$$\boldsymbol{c_B B^{-1}} = [10 \quad 20 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-13}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{40}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B^{-1} A} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-13}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_B B^{-1} b} = [10 \quad 20 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-13}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 45 \end{bmatrix} = [210]$$

$$\boldsymbol{B^{-1} b} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-13}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Indsættes disse beregninger i udtrykket:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B B^{-1} A - c} & \boldsymbol{c_B B^{-1}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B^{-1} A} & \boldsymbol{B^{-1}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_B B^{-1} b} \\ \boldsymbol{B^{-1} b} \end{bmatrix}$$

får vi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{40}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-13}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 \\ 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

hvilket svarer til

Ligningerne:

$$1Z + 0x_1 + 0x_2 + \frac{10}{3}x_3 + \frac{40}{3}x_4 + 0x_5 = 210$$

$$0Z + 1x_1 + 0x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 + 0x_5 = 3$$

$$0Z + 0x_1 + 1x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 0x_5 = 9$$

$$0Z + 0x_1 + 0x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{-13}{3}x_4 + 1x_5 = 3$$

Da der ikke er nogen negative koefficienter i ligningen for Z stopper algoritmen, og vi har fundet maximaet givet vet Z=210 og $x_1 = 3, x_2 = 9, x_3 = x_4 = 0, x_5 = 3$. De to første betingelser er altså bindende og der er 3 til rest i den sidste.

Bemærkning om bestemmelse af skyggepriser

I hver iteration er værdien af Z givet ved udtrykket $Z = \boldsymbol{c_B B^{-1} b}$. Hvis vi i den sidste iteration lader højresiden med begrænsningerne stå som $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, får vi i dette eksempel Z som funktion af begrænsningerne;

$$Z = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-13}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{40}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{10}{3} b_1 + \frac{40}{3} b_2 + 0 b_3$$

Dette udtryk for Z viser at værdien af Z øges med $\frac{10}{3}$ når b_1 øges med 1, og tilsvarende øges værdien af Z med $\frac{40}{3}$ når b_2 øges med 1. Det har ingen effekt at øge b_3, svarende til at betingelsen med b_3 ikke er bindende.

Skyggepriserne ved den optimale løsning er altså givet ved $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$, hvilket vi ikke kunne have formuleret uden at bruge matrix notationen.

Opgave G: Smuglere og Simplex

(Oprindelse ukendt)

Det er før EU's tid. To smuglere tager til Tyskland for at hente billig sprut. Her kan de købe whisky og rom for henholdsvis 40 og 30 kroner pr. flaske. Der er i alt 70 flasker whisky og 80 flasker rom hos den tyske købmand. De to smuglere råder over 3400 kr. til indkøb, og de har aftalt, at de højst vil forsøge at smugle 100 flasker sprut over grænsen. Smuglerne ved fra tidligere, at de kan tjene 60 kr. på en flaske whisky og 50 kr. på en flaske rom.

Gør rede for at smuglerne inden rejsen bør have tænkt over følgende LP-problem:

a. Maximer $Z = 60x_1 + 50x_2$

givet betingelserne:

$$\begin{aligned} &40x_1 + 30x_2 \le 3400 \\ &x_1 + x_2 \le 100 \\ &x_1 \le 70 \\ &x_2 \le 80 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

b. Løs problemet grafisk.
c. Omform problemet ved hjælp af restvariablene x_3, x_4, x_5, x_6, så du kan løse problemet vha. Simplex algoritmen:

$$Z - 60x_1 - 50x_2 = 0$$

$$\begin{aligned} &40x_1 + 30x_2 + x_3 = 3400 \\ &\vdots \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{aligned}$$

d. Opret matricen:

$$\mathbf{a} := \begin{bmatrix} z\_ & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & b \\ 1 & -60 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 30 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3400 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 80 \end{bmatrix}$$

i nSpire. Og følg nu trinene i Simplex-algoritmen som beskrevet i et af de foregående afsnit. Benyt nSspire kommandoerne "mrow(...)" og "mrowadd(...) til de nødvendige rækkeoperationer.

Du skal vælge $x_1 = x_2 = 0$ som startpunkt.

Løsningen i startpunktet ses at være $(Z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 3400, 100, 70, 80)$.

Algoritmen viser dernæst i trin 3, at du skal øge x_1. Øgningen af x_1 begrænses til 70 af den næstsidste række/ligning i matricen – alle de andre rækker/ligninger giver mulighed for en større øgning. Hvis x_1 øges til 70, falder x_5 til 0. Det nye og bedre hjørne bliver derfor bestemt af løsningen af ligningssystemet med $x_2 = x_5 = 0$.

Benyt "mrow" og "mrowadd" til at udføre rækkeoperationerne i trin 4.
Resultatet af trin 4 skulle gerne være følgende matrix:

$$
\begin{bmatrix}
z\_ & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & b \\
1 & 0 & -50 & 0 & 0 & 60 & 0 & 4200 \\
0 & 0 & 30 & 1 & 0 & -40 & 0 & 600 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 30 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 70 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 80
\end{bmatrix}
$$

som viser at værdierne af de variable i det nye hjørne er:
$(Z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (4200, 70, 0, 600, 30, 0, 80)$.

Bemærk hvordan du har bevæget dig fra et hjørne i din grafiske løsning til et bedre nabo-hjørne.

De efterfølgende gennemløb af trin 3 og 4 bør giver følgende løsninger:

$$(Z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (5200, 70, 20, 0, 10, 0, 60)$$
$$(Z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (5400, 40, 60, 0, 0, 30, 20)$$

Nu kan man ikke øge nogle af de variable, da ingen har negative koefficienter i ligningen med Z.

Konklusionen er, at den optimale indkomst bliver på 5400 kr. ved videresalg af 40 flasker whisky og 60 flasker rom.

Restvariablene $x_3 = x_4 = 0$ viser at de betingelser hvori de indgår er bindende – dvs. den optimale løsning er begrænset af penge til indkøb og det samlede antal flasker på højst 100.

Restvariablene $x_5 = 30$ og $x_6 = 20$ viser at smuglerne må undlade at medtage 30 hhv. 20 flasker whisky og rom, som en bedre økonomi og en større lastkapacitet ville have kunne draget fordel af.

Afsnit 10: Ralph, Simplex og kunstige variable

Hvis man vil løse Ralph problemet med simplex algoritmen, løber man hurtigt ind i problemer; dels er det ikke en maximeringsopgave, og dels er det ikke muligt at starte simplex algoritmen i (0,0), da ulighedstegnene vender den gale vej i nogle af betingelserne, hvilket har den kedelige virkning at (0,0) ikke er et tilladt startpunkt. Begge dele kan dog fikses på smarteste vis.

For at du ikke skal blade frem og tilbage gentager vi lige Ralph problemet:

Minimer objektfunktionen $z = 4x_1 + 2x_2$

givet betingelserne	$5x_1 + 15x_2 \geq 50$	*karbohydratkravet*
	$20x_1 + 5x_2 \geq 40$	*proteinkravet*
	$15x_1 + 2x_2 \leq 60$	*fedtkravet*
	$x_1, x_2 \geq 0$	

hvor x_1 *betegner antallet af bøf-portioner og* x_2 *antallet af kartoffel-portioner.*

Fra minimering til maximering

I modellen for Ralph's menu gælder det om at minimere funktionen $Z = 4x_1 + 2x_2$, hvor x_1 er antallet af bøffer og x_2 er antal kartofler. Her er det oplagt, at et menuforslag som koster $Z = 12$ er bedre end en menu til $Z = 20$, i det fordi $12 \leq 20$. Hvis vi nu vender fortegnet, og så sammenligner $-Z = -12$ og $-Z = -20$, så gælder der at $-12 \geq -20$. Så i stedet for at minimere Z, kan vi arbejde på at maximere $-Z$. Når vi så har fundet den maksimale værdi for $-Z$ ved hjælp af simpelx algoritmen, så kan vi skrælle fortegnet af, og vi har fundet den minimale værdi af Z.

Vi kan derfor erstatte *minimer* $Z = 4x_1 + 2x_2$ med *maximer* $-Z = -4x_1 - 2x_2$

Udvidelses af det tilladte område vha. "*kunstige variable*"

Den første betingelse $5x_1 + 15x_2 \geq 50$, er dels ikke en lighed som det kræves i simplex algoritmen, dels er (0,0) ikke en mulig løsning.
For at få betingelsen lavet om til en ligning indføres en restvariabel $x_3 \geq 0$, som måler, hvor meget større venstresiden er end højresiden, således at uligheden $5x_1 + 15x_2 \geq 50$ bliver til ligningen $5x_1 + 15x_2 - x_3 = 50$. Det får dog ikke $(x_1, x_2) = (0,0)$ til at blive en tilladt løsning, i det x_3 ikke må være negativ.

Det trick man bruger for at få $(x_1, x_2) = (0,0)$ ind i det tilladte område er særdeles kreativt; man indfører en "kunstig variabel" $\widetilde{x_4} \geq 0$, vis eneste formål er at få $x_1 = 0$ og $x_2 = 0$ til at være del af et tilladt startpunkt for simplex algoritmen;
$5x_1 + 15x_2 - x_3 + \widetilde{x_4} = 50$. Med den kunstige variable indført er det muligt at have $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Den kunstige variabel hører ikke til i det egentlige problem, og man skal derfor få den til at forsvinde igen. Det gør man ved at gøre det meget dyrt at have løsninger, hvor den har andre værdier end 0, og det opnår man ved at inkludere

den i objektfunktionen med en ”Mega” stor postiv værdi M, således at objektfunktionen ændres fra:
$maximer - Z = -4x_1 - 2x_2$ til $maximer - Z = -4x_1 - 2x_2 - M\widetilde{x_4}$ En optimal løsning må have $\widetilde{x_4} = 0$, hvilket betyder at den kunstige variable er forsvundet ud af løsningen, og man altså har fundet den optimale løsning til det oprindelige problem, som ikke indeholdt kunstige variable.

Den næste betingelse ændres på samme måde;

$$20x_1 + 5x_2 \geq 40 \text{ ændres til } 20x_1 + 5x_2 - x_5 + \widetilde{x_6} = 40, \text{ og } -M\widetilde{x_6} \text{ tilføjes}$$

til objektfunktionen: $maximer - Z = -4x_1 - 2x_2 - M\widetilde{x_4} - M\widetilde{x_6}$

I den en sidste betingelse $15x_1 + 2x_2 \leq 60$ tilføjes der blot en restvariable, så den bliver til $15x_1 + 2x_2 + x_7 = 60$.

Udtrykket for Z inkluderes som en ligning og vi har nu omskrevet problemet til

Maximer $(-Z)$

$$\begin{array}{lllllllll}
(0) & (-Z) + 4x_1 & + \; 2x_2 & & + M\widetilde{x_4} & & + M\widetilde{x_6} & & = 0 \\
(1) & 5x_1 & + \; 15x_2 & - x_3 & + \; \widetilde{x_4} & & & & = 50 \\
(2) & 20x_1 & + \; 5x_2 & & & - x_5 & + \; \widetilde{x_6} & & = 40 \\
(3) & 15x_1 & + \; 2x_2 & & & & & + x_7 & = 60
\end{array}$$

Her er der 8 variable; $Z, x_1, \ldots, x_7$ og 4 ligninger. Et hjørne er derfor bestemt ved at sætte 4 af de variable til 0. Her vælges så $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$, og $Z, \widetilde{x_4}, \widetilde{x_6}, x_7$ skal bestemmes. Det gøres ved at hjælp af et par rækkeoperationer i Nspire.

$$\mathbf{a} := \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & 4 & 2 & m & m & m & m & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 5 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 15 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & 4 & 2 & m & m & m & m & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 5 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 15 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{bmatrix}$$

x1=x2=x3=x5=0 , Variable z, x4,x6,x7

$$\mathbf{a1} := \text{mRowAdd}(-m, \mathbf{a}, 3, 2) \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & 4-5\cdot m & 2-15\cdot m & 2\cdot m & 0 & m & m & 0 & -50\cdot m \\ 0 & 5 & 15 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 5 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 15 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a2}:=\mathrm{mRowAdd}(-m,\mathbf{a1},4,2) \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & 4-25\cdot m & 2-20\cdot m & 2\cdot m & 0 & 2\cdot m & 0 & 0 & -90\cdot m \\ 0 & 5 & 15 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 5 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 15 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{bmatrix}$$

Nu har vi opnået, at de variable som ikke er 0 kun indgår i én ligning hver, og vi kan se løsningen:

$$\begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 \\ 90m & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 40 & 60 \end{bmatrix}$$

Herfra er det blot at køre ren standard simplex; den variable med "mest negativ" koefficient er x_1, og vi ser, at man maksimalt kan øge $x_1$til 2, hvorved $\widetilde{x_6}$ bliver 0 og forsvinder. Vi har så $x_2 = x_3 = x_5 = \widetilde{x_6} = 0$, og $Z, x_1, \widetilde{x_4}, x_7$ skal bestemmes, hvilket klares gennem rækkeoperationer:

$$\mathbf{a3}:=\mathrm{mRow}\left(\frac{1}{20},\mathbf{a2},4\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & 4-25\cdot m & 2-20\cdot m & 2\cdot m & 0 & 2\cdot m & 0 & 0 & -90\cdot m \\ 0 & 5 & 15 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1}{20} & \frac{1}{20} & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a4}:=\mathrm{mRowAdd}(-(4-5\cdot m),\mathbf{a3},4,2)$$

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & -20\cdot m & 1-\frac{75\cdot m}{4} & 2\cdot m & 0 & \frac{7\cdot m}{4}+\frac{1}{5} & \frac{5\cdot m-4}{20} & 0 & -80\cdot m-8 \\ 0 & 5 & 15 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1}{20} & \frac{1}{20} & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a5}:=\mathrm{mRowAdd}(-5,\mathbf{a4},4,3) \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & -20\cdot m & 1-\frac{75\cdot m}{4} & 2\cdot m & 0 & \frac{7\cdot m}{4}+\frac{1}{5} & \frac{5\cdot m-4}{20} & 0 & -80\cdot m-8 \\ 0 & 0 & \frac{55}{4} & -1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 40 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1}{20} & \frac{1}{20} & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{bmatrix}$

$\mathbf{a6}:=\mathrm{mRowAdd}(-15,\mathbf{a5},4,5) \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & -20\cdot m & 1-\frac{75\cdot m}{4} & 2\cdot m & 0 & \frac{7\cdot m}{4}+\frac{1}{5} & \frac{5\cdot m-4}{20} & 0 & -80\cdot m-8 \\ 0 & 0 & \frac{55}{4} & -1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 40 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1}{20} & \frac{1}{20} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-7}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 & 30 \end{bmatrix}$

$\mathbf{a7}:=\mathrm{mRowAdd}(20\cdot m,\mathbf{a6},4,2) \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & 0 & 1-\frac{55\cdot m}{4} & 2\cdot m & 0 & \frac{3\cdot m}{4}+\frac{1}{5} & \frac{5\cdot m}{4}-\frac{1}{5} & 0 & -40\cdot m-8 \\ 0 & 0 & \frac{55}{4} & -1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 40 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1}{20} & \frac{1}{20} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-7}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 & 30 \end{bmatrix}$

Løsning:

$\begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 \\ 40m+8 & 2 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$

Den eneste variabel med negativ koefficient i udtrykket for $-Z$ er x_2. For at finde ud af hvor meget x_2 kan øges, beregnes forholdet mellem konstantledet b og hver af de 3 positive koefficienter til x_2;

$\text{expand}\left(\frac{-40\cdot m-8}{1-\frac{55\cdot m}{4}}\right) \blacktriangleright \frac{480}{11\cdot(55\cdot m-4)}+\frac{32}{11}$

$\frac{40}{\frac{55}{4}} \blacktriangleright \frac{32}{11}$

$\frac{2}{\frac{1}{4}} \blacktriangleright 8$

Vi øger derfor x_2 og $\widetilde{x_4}$ bliver 0, hvorved den sidste af de to kunstige variable forsvandt.
Vi har $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ og vi skal bestemme Z, x_1, x_2, x_7. Rækkeoperationer…

$$\mathbf{a8}:=\text{mRow}\left(\frac{4}{55},\mathbf{a7},3\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & 0 & 1-\frac{55\cdot m}{4} & 2\cdot m & 0 & \frac{3\cdot m}{4}+\frac{1}{5} & \frac{5\cdot m}{4}-\frac{1}{5} & 0 & -40\cdot m-8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{55} & \frac{4}{55} & \frac{1}{55} & \frac{-1}{55} & 0 & \frac{32}{11} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1}{20} & \frac{1}{20} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-7}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a9}:=\text{mRowAdd}\left(-\left(1-\frac{55\cdot m}{4}\right),\mathbf{a8},3,2\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & 0 & 0 & m+\frac{4}{55} & \frac{55\cdot m-4}{55} & m+\frac{2}{11} & m-\frac{2}{11} & 0 & \frac{-120}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{55} & \frac{4}{55} & \frac{1}{55} & \frac{-1}{55} & 0 & \frac{32}{11} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1}{20} & \frac{1}{20} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-7}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a10}:=\text{mRowAdd}\left(\frac{-1}{4},\mathbf{a9},3,4\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & 0 & 0 & m+\frac{4}{55} & \frac{55\cdot m-4}{55} & m+\frac{2}{11} & m-\frac{2}{11} & 0 & \frac{-120}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{55} & \frac{4}{55} & \frac{1}{55} & \frac{-1}{55} & 0 & \frac{32}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{55} & \frac{-1}{55} & \frac{-3}{55} & \frac{3}{55} & 0 & \frac{14}{11} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a11}:=\text{mRowAdd}\left(\frac{7}{4},\mathbf{a10},3,5\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 & b \\ -1 & 0 & 0 & m+\frac{4}{55} & \frac{55\cdot m-4}{55} & m+\frac{2}{11} & m-\frac{2}{11} & 0 & \frac{-120}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{55} & \frac{4}{55} & \frac{1}{55} & \frac{-1}{55} & 0 & \frac{32}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{55} & \frac{-1}{55} & \frac{-3}{55} & \frac{3}{55} & 0 & \frac{14}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{55} & \frac{7}{55} & \frac{43}{55} & \frac{-43}{55} & 1 & \frac{386}{11} \end{bmatrix}$$

Der er nu ikke nogle negative koefficienter i ligning 0, så Simplex algoritmen stopper.

Løsning:

$$\begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 \\ \frac{120}{11} & \frac{14}{11} & \frac{32}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{386}{11} \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright \begin{bmatrix} z & x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & x7 \\ 10.9091 & 1.27273 & 2.90909 & 0. & 0. & 0. & 0. & 35.0909 \end{bmatrix}$$

Opgave H: Julestrudsen igen

Forsøg at løse ”Julestrudsen” ved hjælp af kunstige variable og ved maximering af $-Z$.