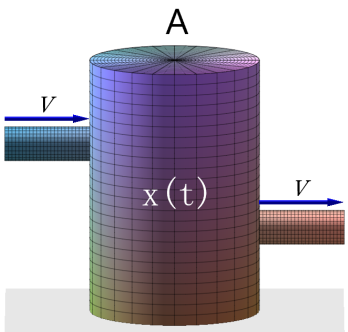
Miniprojektopgave 10

Koblede væskebeholdere

ved Karsten Schmidt (ksch@dtu.dk)

Mange real life problems i teknik, naturvidenskab og samfund modelleres vha. systemer af differentialligninger. Helt oplagte eksempler er elektriske netværk eller svingninger i bygningskonstruktioner. I alle tilfælde er den matematiske udfordring den samme: Først drejer det drejer sig om at kunne modellere det givne problem, tænke ud af boksen så at sige, og derefter at bruge de matematiske løsningsmetoder der er til rådighed. I dette miniprojekt har vi valgt at beskrive udviklingen af saltkoncentrationer i koblede væskebeholdere, og vi indskrænker os til eksempler der kan modelleres som systemer af lineære førsteordens differentialligning med konstante koefficienter. Som en introduktion til modelleringsarbejdet analyserer vi først en enkelt (ikke koblet) væskebeholder.



På figuren ser vi en beholder A med volumen 100, som er fuld af vand tilsat salt. Til tiden $t = 0$ åbnes der for en indstrømning i beholderen af saltholdigt vand (samme slags salt) med konstant koncentration k . Indstrømninghastigheden (som fx måles i Liter/Sek) betegnes v . Der sker en tilsvarende udstrømning fra beholderen med strømningshastighed v .

Saltkoncentrationen i beholderen betegnes $x(t)$, den er ens overalt i beholderen på grund af omrøring. Vi ønsker et funktionsudtryk for $x(t)$ således at vi til ehvert tidspunkt kender saltkoncentrationen. Men det kan vi ikke trække ud af de givne informationer. Vi er nødt til at gå indirekte frem. Det viser sig muligt at tænke sig frem til et

Projektopgaven fortsætter $\longmapsto$

udtryk for den hastighed $x'(t)$ hvormed saltkoncentrationen i beholderen ændres. Det er problemets matematiske model, og når vi har opstillet den, kan vi gå videre og håbe på at vi kan finde løsninger, dvs. vil sige finde $x(t)$. I den følgende indledende opgave skal modellen opstilles helt fra bunden.

|||| Opgave 1 Øvelse med opstillling af matematisk model og løsning

Lad δt betegne et lille tidsinterval, og besvar følgende spørgsmål:

a) Hvor meget vand strømmer der ind/ud af beholderen i løbet af δt?

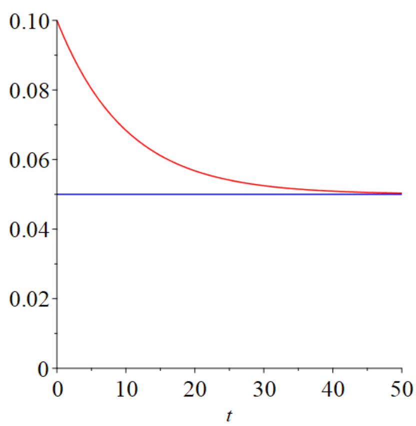
b) Hvor meget salt strømmer der ind i beholderen i løbet af δt?

c) Hvor meget salt strømmer der ud af beholderen i løbet af δt, idet vi antager at udløbsvandets koncentration er $x(t)$?

d) Hvor stor er ændringen δx i beholderens saltkoncentration i løbet af δt (beholderens volumen er som ovenfor nævnt sat til 100)?

e) Find på basis af spørgsmål a) til d) et udtryk for $x'(t)$, det er en førsteordens lineær differentialligning. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen, idet vi sætter $k = \frac{1}{20}$ og $v = 10$.

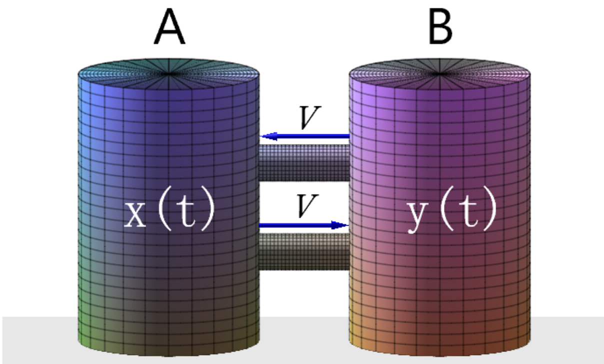
f) Den løsning til differentialligningen som opfylder begyndelsesværdibetingelsen, at saltkoncentrationen til tiden $t = 0$ er $\frac{1}{10}$, er her plottet vha. Maple med farven rød:



Find funtionsudtrykket for den betingede løsning, og beskriv med ord hvordan saltkoncentrationen udvikler sig!

Vi betragter nu et system af to beholdere A og B, se figuren.

Projektopgaven fortsætter ⟼



A har volumen R_1 og B volumen R_2, og de er fyldt af samme saltopløsning, men med forskellig koncentration. Til tiden $t = 0$ forbindes de med to rør, således at der i det ene strømmer væske fra A til B og i det andet væske fra B til A, i begge tilfælde med strømningshastigheden v. Vi ønsker at finde ud af hvordan saltudviklingen i hver af beholderne udvikler sig, dvs. finde et udtryk for saltkoncentrationen $x(t)$ i A og saltkoncentrationen $y(t)$ i B.

|||| Opgave 2 Matematisk model og løsning for to beholdere

a) Hvor stor er ændringen δx i A's saltkoncentration i løbet af tiden δt? Og hvor stor er ændringen δy i B's saltkoncentration i løbet af tiden δt?

b) Opstil nu den matematiske model ved på basis af spørgsmål a) at finde udtryk for $x'(t)$ og $y'(t)$. Vink: Modellen er et system af to koblede første ordens lineære differentialligninger med konstante koefficenter.

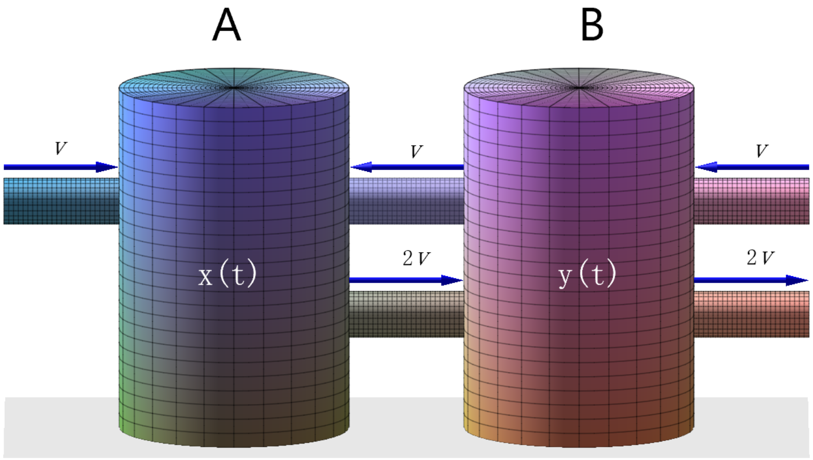
Vi sætter nu $R_1 = R_2 = 100$ og $v = 2$.

c) Opstil ligningssystemet på matrixform, og find egenværdier og tilhørende egenrum for systemmatricen. Bestem den fuldstændige løsning for systemet på matrixform.

d) Illustrér i samme plot de løsninger $x(t)$ og $y(t)$ til systemet der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 25 \end{bmatrix}$.

I forhold til det forrige scenarie er der nu også tilførsel udefra af rent vand til A og B. Desuden er der afløb ud af systemet fra B. Se forholdet mellem strømningshastighederne på figuren.

Projektopgaven fortsætter ⟼



Opgave 3 Homogent og inhomogent system

a) Hvor stor er ændringen δx i A's saltkoncentration i løbet af tiden δt ? Og hvor stor er ændringen δy i B's saltkoncentration i løbet af tiden δt ?

b) Opstil den matematiske model ved på basis af spørgsmål a) at finde udtryk for $x'(t)$ og $y'(t)$. Vink: Modellen er et homogent system af to koblede første ordens lineære differentialligninger med konstante koefficenter.

Vi sætter nu $R_1 = R_2 = 100$ og $v = 5$.

c) Find (gerne med Maple's dsolve), og illustrér i samme plot de løsninger $x(t)$ og $y(t)$ til systemet der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$. Udtryk i ord hvad der sker med saltopløsningerne i A og B.

Vi antager nu yderligere at den udefra tilførte væske til A ikke er rent vand, men en saltopløsning med den variable koncentration $10(1 - \sin(t))$. Herved opnås et inhomogent system.

d) Vi sætter $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$. Opstil den matematiske model for systemet på matrixformen

$$\mathbf{x}'(t) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{q}(t) .$$

Bestem den fuldstændige løsning til det inhomogene system med Maple's dsolve. Sammenlign med løsningen til det homogene system.

e) Find, og illustrér i samme plot de løsninger $x(t)$ og $y(t)$ til systemet der opfylder begyndelsesværdibetingelsen $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$. Udtryk i ord hvad der sker med saltopløsningerne i A og B.

Projektopgaven fortsætter ⟼

Opgave 4 Ekstra: Numerisk løsning med Eulers metode

Intro: I dette miniprojekt arbejder vi generelt med differentialligninger og differentialligningssystemer som det er relativt nemt at løse analytisk/eksakt. Ofte er modellerne dog mere komplicerede, og man er nødt til at lave approksimationer, fordi det er svært eller umuligt at finde de analytiske løsninger. I denne sidste opgave vil vi give et eksempel på den approksimationsmetode som går under navnet *Eulers metode*. Formålet her er ikke at løse vanskelige differentialligninger, blot at give et (nemt) eksempel på numerisk løsning ved hjælp af Eulers formel, hvor vi kan sammenligne den analytiske løsning med approksimationen. Vi vælger derfor at bruge Eulers metode på differentialligningen i opgave 1. En beskrivelse af Eulers metode kan findes på:
`matematiksider.dk/projekter/eulers_metode.pdf`
(NB: der er andre betegnelser, y der svarer x her, og x der svarer til t her).

Vi betragter differentialligningen

$$x'(t) = \frac{1}{200} - \frac{1}{10}x(t)\,.$$

Vi indsætter i t-aksen fra 0 til 50 en række punkter med en fast indbyrdes afstand på h (hvis værdi oplyses nedenfor) således at $t_0 = 0$, $t_1 = h$, $t_2 = 2h$ osv. De tilsvarende approksimerede værdier til $x(t)$ benævnes x_0, x_1, x_2 osv. Vi sætter $x_0 = x(0)$ som fås umiddelbart fra begyndelsesværdibetingelsen i opgave 1. Her følger ideen til hvordan de følgende værdier regnes ud.

Vi indfører udtrykket $g(t,x) = \frac{1}{200} - \frac{1}{10}x$ og definerer:
$x_1 = x_0 + h \cdot g(t_0, x_0)$
$x_2 = x_1 + h \cdot g(t_1, x_1)$
og så videre. Generelt:
$x_k = x_{k-1} + h \cdot g(t_{k-1}, x_{k-1})\,.$

a) Sæt $h = 5$. Lav, fx med excel eller maple, en liste af punkter så du i et (t,x)-koordinatsystem kan illustrere approksimationen sammen med den eksakte løsning.

Vi interesserer os nu for hvad størrelsen af h betyder for nøjagtigheden af approksimationen.

b) Sæt $h = 2$. Lav igen, fx med excel eller maple, en liste af punkter så du i et (t,x)-koordinatsystem kan illustrere den nye approksimation sammen med den eksakte løsning.

NB: Eulers metode kan udvides til koblede differentialligninger, måske I sammen med jeres lærer har mod til at gå videre med dette!

Projektopgaveteksten er slut